УДК 629

# О ПРИРОДЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ИДЕАЛЬНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*А. А. Рухадзе, М. Е. Чоговадзе*
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

*Теория неустойчивости тангенциального разрыва в идеальной проводящей жидкости обобщается с учетом излучения с поверхности разрыва. В отличие от известной неустойчивости разрыва по отношению к возбуждению локализованных поверхностных волн, по своей природе связанной с неутойчивостью неоднородного течения с перегибом скорости (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца), излучательная неустойчивость разрыва связана с вынужденным черенковским излучением при проскальзывании одного слоя жидкости по отношению к другому, более плотному.*

Известно, что течение идеальной проводящей жидкости с неоднородными параметрами в магнитной гидродинамике неустойчиво. Обычно для анализа устойчивости такого течения рассматривают малые колебания вблизи равновесия, причем исследуются устойчивости либо объемного течения с протяженными в пространстве неоднородными параметрами, либо течения с резкими неоднородностями (течения с тангенциальной поверхностью разрыва равновесных величин). При этом неустойчивость тангенциального разрыва анализируется по отношению к возбуждениям поверхностного типа, локализованным вблизи разрыва и экспоненциально апериодически убывающим при удалении от нее. Неустойчивость же объемного течения изучается в канале с "твердыми" стенками, на которых возмущения отсутствуют. Естественно, что неустойчивость тангенциального разрыва по отношению к возмущениям поверхностного типа по своей природе связана с неустойчивостью неоднородного объемного течения с перегибом скорости неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца. Эта неустойчивость имеет более чем вековую историю и ее теория изложена во многих монографиях и даже учебниках. В связи с огромным числом прикладных проблем, в которых она играет важную роль, в литературе до последных дней не прекращается поток работ, в которых обсуждаются различные аспекты ее проявления. Нам, однако, в дальнейшем достаточна теория неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, изложенная в работе [1].

Ниже теория неустойчивости тангенциального разрыва обобщается с учетом возможности излучения нарастающей во времени волны, незатухающей (либо слабо затухающей) при удалении от поверхности разрыва. При этом показывается, что возникает неустойчивость нового типа, когда скорость относительного течения в одной (менее плотной) среде больше фазовой скорости волны, распространяющейся в другой среде (более плотной). Такую неустойчивость, очевидно, следует классифицировать как неустойчивость черенковского типа, обусловленную вынужденным черенковским излучением волн при движении одной среды относительно другой.

Имея в виду возможность обобщения теории на случай проводящей жидкости, будем исходить из системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики [2]:

$$\operatorname{div}\vec{H}=0,\quad \operatorname{rot}\left[\vec{V}\cdot\vec{H}\right]=\frac{\partial\vec{H}}{\partial t};$$
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V}=-\frac{\nabla P}{\rho}+\frac{1}{4\pi\rho}\left[\operatorname{rot}\vec{H}\cdot\vec{H}\right]; \tag{1}$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{V}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial\rho}=C_0^2.$$

Эта система уравнения допускает существование плоского равновесного течения с неоднородным профилем параметров $\rho_0(x)$, $P_0(x)$, $\vec{V}_0(x)$ и $\vec{H}_0(x)$, $\vec{V}_0\|\vec{H}_0\|\overrightarrow{OZ}$, если только между ними выполнено соотношение равновесия:

$$P_0(x)+\frac{H_0^2(x)}{8\pi}=\text{const}. \tag{2}$$

Наиболее полно неустойчивость тангенциального разрыва в равновесном течении (2) по отношению к возмущениям поверхностного типа была исследована в работе [3]. Там же приведена довольно подробная библиография последних лет по этой проблеме. Следуя этой работе, линеаризуем систему (1) для малых возмущений и сведем ее к одному уравнению для величины

$$Y=\frac{V_{1x}}{\omega-K_z V_0},$$

считая $Y\sim\exp\left(-i\omega t+iK_z Z\right)$.

Это уравнение записывается в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{\left[(\omega-K_z V_0)^2-K_z^2V_A^2\right]\left[(\omega-K_z V_0)^2-K_z^2C_0^2\right]}{(\omega-K_z V_0)^2\left(C_0^2+V_A^2\right)-K_z^2V_A^2C_0^2}=0. \tag{3}$$

Уравнение справедливо как слева ($x < 0$), так и справа ($x > 0$) от поверхности разрыва при $x = 0$, на которой терпят скачки величины $C_0^2$, $V_A^2$ и $V_0$, но сумма давлений $P_0 + \dfrac{H_0^2}{8\pi}$ постоянна.

Уравнение (3) дополняется граничными условиями, которые получаются из самых линеаризованных уравнений (1) при предположении конечности физических величин $\vec{H}_0$ и $\rho_0$.

$$\{Y\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ \frac{(\omega - K_z V_0)^2 \left(V_A^2 + C_0^2\right) - K_z^2 V_A^2 C_0^2}{(\omega - K_z V_0)^2 - K_z^2 C_0^2} \right\}_{x=0} = 0. \tag{4}$$

Фигурная скобка $\{\ \}_{x=0}$ означает скачок величины при $x = 0$.

Исходя из предположения об экспоненциальном затухании решений $Y(x)$ при $x \to \pm\infty$, в работе [3] получено следующее дисперсионное уравнение малых колебаний

$$\beta_1 \chi_2 + \beta_2 \chi_1 = 0 \tag{5}$$

где ($i = 1, 2$) $\beta_i^2 = (\omega - K_z V_{0i})^2 - K_z^2 V_{Ai}^2$,

$$\chi_i^2 = \frac{\left[(\omega - K_z V_{0i})^2 - K_z^2 C_{0i}^2\right]\left[(\omega - K_z V_{0i})^2 - K_z^2 V_{Ai}^2\right]}{K_z^2 V_{Ai}^2 C_{0i}^2 - (\omega - K_z V_{0i})^2 \left(V_{Ai}^2 + C_{0i}^2\right)}. \tag{6}$$

Для поверхностных волн $\chi_i^2 > 0$, что и предполагалось в работе [3] при анализе уравнения (5). Однако это уравнение справедливо и при комплексных, и даже при действительных, но отрицательных $\chi_i^2$, т. е. и для решений волнового типа, если только мы учитываем волны, распространяющиеся от поверхности взрыва. Ниже только такие решения и будут рассматриваться.

Однако прежде воспроизведем для сравнения некоторые результаты теории неустойчивости тангенциального разрыва по отношению и возбуждению волн поверхностного типа. Рассмотрим простейший случай скачка только скорости течения, причем выбором системы координат всегда можно добиться, чтобы

$$V_0(x) = \begin{cases} +V_0 & \text{при } x > 0, \\ -V_0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

В пределе несжимаемой жидкости $C_0 \to \infty$ (точнее, $C_0^2 >> V_A^2$, $V_0^2$) из (6) получаем $\chi_i^2 = K_z^2 > 0$, а решение дисперсионного уравнения (5) находится явно

$$\omega^2 = K_z^2 \left(V_A^2 - V_0^2\right). \tag{8}$$

Отсюда видно, что неустойчивость ($\omega^2 < 0$) имеет место в слабом магнитном поле, пока $V_A^2 < V_0^2$ (в отсутствие магнитного поля неустойчивость имеет место всегда) [1]. Внешнее магнитное поле при $V_A^2 > V_0^2$ стабилизирует рассмотренную неустойчивость, как это было показано впервые С. И. Сыроватским [2].

Стабилизирующая роль магнитного поля следует также из рассмотрения противоположного предела очень сильного магнитного поля, когда $V_A^2 >> C_0^2$ и уравнение (5) не выполняется, т. е. решения поверхностного типа не существуют.

Все сказанное справедливо только для колебаний поверхностного типа и, строго говоря, не верно для волновых решений.

Неустойчивости тангенциального разрыва по отношению к возмущениям волнового типа рассматриваются ниже.

Для понимания природы рассмотренной выше неустойчивости проанализируем устойчивость неоднородного объемного течения с профилем скорости $V_0(x)$ для несжимаемой жидкости и в отсутствие внешнего магнитного поля. Из системы (1) в линейном приближении при этом легко получить следующее уравнение [1]

$$\frac{d^2 V_{1x}}{d x^2} - \left[ K_z^2 - \frac{K_z V_0''(x)}{\omega - K_z V_0(x)} \right] V_{1x} = 0. \tag{9}$$

При анализе устойчивости течения с неоднородным профилем скорости это уравнение обычно дополняют граничными условиями на твердой поверхности

$$V_{1x}\Big|_{x=\pm a} = 0. \tag{10}$$

Прежде всего следует заметить, что неустойчивость течения возможна только, если в области $-a \le x \le a$ имеется точка, в которой $V_0''(x) \ne 0$. Это необходимо, но недостаточно. Можно показать, что симметричное относительное $x = 0$ течение всегда устойчиво. В этом легко убедиться на примере течения с параболическим профилем $V_0(x) = U_0 \frac{x^2}{a^2}$ (постоянное слагаемое течения легко исключается выбором системы координат), когда уравнение (9) в пределе длинноволновых колебаний $|K_z| a << 1$ сводится к виду

$$V_{1x}'' - \frac{2}{x^2 - \omega a_0^2 / K_z U_0} V_{1x} = 0, \tag{11}$$

решаемом аналитически.

Действительно, после дифференцирования и введения функции $U = V_{1x}'$ из (1) получаем хорошо известное уравнение Лежандра

$$\left(x_1^2 - 1\right) U'' + 2 x_1 U' - 2U = 0. \tag{12}$$

Здесь же произведена замена $x \sqrt{\frac{K_z U_0}{\omega a_0^2}} \to x_1$.

Подстановка общего решения этого уравнения

$$U = C_1 P_1\left( x \sqrt{\frac{K_z U_0}{\omega a_0^2}} \right) + C_2 Q_2\left( \sqrt{\frac{K_z U_0}{\omega a_0^2}}\, x \right); \tag{13}$$

в граничные условия (10) приводит к дисперсионному уравнению с действительными корнями для $\omega$, т. е. неустойчивость в системе отсутствует.

Иное положение имеет место для несимметричного профиля $V_0(x)$ с отличительной от нуля второй производной $V_0'' \ne 0$. Так, в случае профиля с точкой перегиба, например, вида $V_0(x) = U_0 \frac{x^2}{a_0^2} + \beta x$ из (9) получаем уравнение Бесселя

$$V_{1x}'' - \left[ K_z^2 - \frac{2}{\left( x + \sqrt{-\frac{\omega a_0^2}{K_z U_0}} \right)^2} \right] V_{1x} = 0. \qquad (14)$$

Здесь $\frac{a_0^2 \beta}{2 U_0} \equiv \sqrt{-\frac{\omega a_0^2}{K_z U_0}}$.

Уравнение (14) подробно проанализировано в [4] и показано, что при учете условий (10) оно имеет неустойчивые решения, причем инкремент нарастания неустойчивости $\mathrm{Jm}\,\omega = K_z U_0 \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{a^2}{a_0^2}$. Именно эта неустойчивость, известная в гидродинамике как неустойчивость Кельвина-Гельмгольца [1], и определяет генезис неустойчивости тангенциального разрыва по отношению к возмущениям поверхностного типа, которая была рассмотрена выше.

Таким образом, рассмотренная тангенциальная неустойчивость течения с неоднородным профилем скорости является вынужденным черенковским излучением при проскальзывании слоя легкой жидкости по отношению к слою тяжелой жидкости.

## Литература

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1957.
3. Kirtskhalia V. D.// Planet Space Ser. 1994. V. 42. P. 513.
4. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988

## ON THE NATURE OF TANGENTIAL DISCONTINUITY IN THE IDEAL LIQUID

*A. A. Rukhadze, M. E. Chogovadze*
General Physics Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*The theory of instability of tangential discontinuity in the ideal liquid (Landau L. D. and Lifshitz E. M., 1982) is generalized by accounting the radiation from its surface. In contrary to the well-known instability of discontinuity related to the surface waves excitation by the inhomogeneity of stream velocity (Kelvin-Helmholts instability (Landau L. D. and Lifshitz E. M., 1986)) the considered radiative instability is stipulated by the supersonic motion of a light liquid above the surface of heavy one.*