ОБЩАЯ ФИЗИКА

УДК 533.951 PACS: 52.40Db, 52.80.Pi

Стохастический нагрев нерелятивистских заряженных частиц в электрических полях со случайными переключениями

В. М. Логинов

Рассмотрен бесстолкновительный механизм стохастического нагрева нерелятивистских заряженных частиц, возникающий при случайном переключении двух регулярных динамик, обусловленных движением частиц в постоянных электрических полях с разными амплитудами и осциллирующих с разными амплитудами и частотами. Моделируя переключения динамик случайным телеграфным сигналом, вычислена дисперсия скорости частицы. Показано, что дисперсия, а значит, и средняя энергия монотонно растут со временем. На временах много больше времени спада корреляций закон роста – линейный. Получены явные выражения для коэффициентов диффузии в зависимости от переменных, характеризующих регулярные динамики и частоты их смены.

Ключевые слова: постоянные и осциллирующие электрические поля, случайное перемешивание динамик, точно решаемые модели, стохастический нагрев частиц.

Введение

Как известно, в стохастических электромагнитных полях может осуществляться эффективное ускорение заряженных частиц и нагрев плазмы [1, 2]. В работах [3–6] экспериментально и компьютерным моделированием установлено, что микроволновое излучение со случайно прыгающей фазой позволяет реализовать эффективный бесстолкновительный нагрев электронов и пробой газа при меньших напряженностях электрического поля, наблюдать эффект «просветления волновых барьеров» и ряд других интересных эффектов.

В настоящей работе предлагается иной бесстолкновительный механизм стохастического ускорения заряженных частиц, а именно, механизм, основанный на идее случайных переключений регулярных динамик.

Постановка задач исследования

Сформулируем подход к описанию поведения физических систем в нестационарных условиях, когда происходит случайная смена регулярных динамик. Будем рассматривать сосредоточенные системы и, для определенности, будем считать, что регулярные динамики описываются уравнениями ньютоновской механики. Пусть на множестве времен T_1, представляющих набор временных промежутков, на материальную точку (частицу) массы m действует сила $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$. На множестве дополнительных времен T_2 на эту же частицу действует другая сила $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$. Регулярные динамики один и два задаются на временном промежутке T, который есть объединение множеств T_1 и T_2. В результате, поведение системы может быть описано выражением

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \begin{cases} \mathbf{F}_1(\mathbf{r},\mathbf{V},t), & t \in T_1, \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{r},\mathbf{V},t), & t \in T_2, \end{cases} \tag{1}$$

где m – масса частицы, $\mathbf{r}, \mathbf{V}$ – ее положение и скорость соответственно.

В математике структуры типа (1) называются дифференциальными включениями (в задачах управления – «системами с переменной структурой»). Обычно условия переключения динамик формулируются в виде условий на динамические переменные и их производные в локальных областях пространства состояний системы, например, в определенных областях фазовой плоскости. Дифференциальные включения являются обобщением обыкновенных дифференциальных уравнений. В нашем случае дифференциальное включение (1)

Логинов Валерий Михайлович, профессор, д.ф.-м.н.
Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева.
Институт математики, физики и информатики.
Россия, 660049, Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89.
Тел.: (391) 263-97-24, (391) 288-03-06.
E-mail: valog_1949@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28 марта 2017 г.

можно переписать в виде дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами. Введем индикаторную функцию $\alpha(t)$ такую, что $\alpha(t)=\alpha_1=+1, t\in T_1$ и $\alpha(t)=\alpha_2=-1, t\in T_2$. С учетом $\alpha(t)$ дифференциальное включение (1) перепишем в виде дифференциального уравнения

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2\right]+\frac{\alpha(t)}{2}\left[\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_2\right]. \qquad (2)$$

Функции $\alpha(t)$, переключающие регулярные динамики $m\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{F}_{1,2}$, могут быть неслучайными, например, периодическими, а могут быть случайными с заданными статистическими характеристиками.

Явление стохастического нагрева частиц в случайных полях (ее средняя кинетическая энергия растет со временем) обсуждается в данной работе на примере $\alpha(t)$ в виде случайного телеграфного сигнала (марковского дихотомического процесса или Д-шума). Модель позволяет аналитически провести статистическое описание процессов ускорения частицы. В качестве примеров рассмотрены случайные переключения одномерных динамик, связанных с движением частицы в постоянных и осциллирующих электрических полях.

Случайное перемешивание равноускоренных движений (постоянные электрические поля)

Рассмотрим одномерное движение частицы вдоль оси x ($\mathbf{V}=(V,0,0)$, $\mathbf{F}_1=(F_1,0,0)$ и $\mathbf{F}_2=(F_2,0,0)$) в поле постоянных сил с переключениями между «состояниями силы» F_1 и F_2 по закону $\alpha(t)$. Уравнение движения принимает вид:

$$\frac{dV}{dt}=F_+ +\alpha(t)F_-, \qquad (3)$$

где введено обозначение $F_\pm=\left(F_1\pm F_2\right)/2m$, а далее для определенности принимаем $F_{1,2}=qE_{1,2}$, где q – заряд частицы, $E_{1,2}$ – напряженности электрического поля в состояниях один и два соответственно. Пусть $\alpha(t)$, определяющая закон случайного переключения динамик один и два, есть случайный телеграфный сигнал (см., например, [7]). Ступенчатая случайная функция $\alpha(t)$ принимает с одинаковой вероятностью постоянные значения ±1, при этом имеет среднее значение, равное нулю ($\langle\alpha(t)\rangle=0$), и экспоненциально спадающую корреляционную функцию $K(|t_1-t_2|)=$ $=\langle\alpha(t_1)\alpha(t_2)\rangle=e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$. Угловые скобки означают здесь и далее усреднение по ансамблю реализаций процесса $\alpha(t)$. Характерное время спада корреляций рассматриваемого процесса равно $\tau_0=1/2\lambda$, где величина λ также определяет среднее число скачков в единицу времени.

Определим одноточечные моменты скорости частицы n-го порядка $\chi_n(t)=\left\langle V^n(t)\right\rangle$ ($n=1, 2, \ldots$). Для этого введем характеристическую функцию (ХФ) следующего вида:

$$\Theta_t(\mu)=\left\langle\tilde{\Theta}_t(\mu)\right\rangle=\left\langle e^{i\mu V(t)}\right\rangle, \qquad (4)$$

где μ – параметр, i – мнимая единица. Моменты $\chi_n(t)$ определяются дифференцированием ХФ:

$$\chi_n(t)=\left\langle V^n(t)\right\rangle=\frac{1}{i^n}\frac{\partial^n\Theta_t(\mu)}{\partial\mu^n}\bigg|_{\mu=0}, \quad n=1, 2, \ldots . \qquad (5)$$

Для определения ХФ сначала выпишем уравнение для функции $\tilde{\Theta}_t(\mu)$. С этой целью дифференцируем $\tilde{\Theta}_t(\mu)$ по t и используем уравнение движения (3). Усредняя затем обе части результата по ансамблю реализаций $\alpha(t)$, получаем уравнение

$$\frac{d\Theta_t(\mu)}{dt}=i\mu F_+\Theta_t(\mu)+i\mu F_-\left\langle\alpha(t)e^{i\mu V(t)}\right\rangle. \qquad (6)$$

Уравнение (6) незамкнуто относительно функции $\Theta_t(\mu)$. В нем содержится среднее $\Psi_t(\mu)\equiv$ $\equiv\left\langle\alpha(t)e^{i\mu V(t)}\right\rangle$, которое представляет собой среднее от случайного процесса $\alpha(t)$ и запаздывающего функционала от него, поскольку из уравнения движения (3) скорость $V(t)=V(0)+\int\limits_0^t\left(F_+ +F_-\alpha(\tau)\right)d\tau$ зависит от множества значений процесса $\alpha(\tau)$ с $\tau\le t$. Для преобразования подобных средних воспользуемся методом формул дифференцирования (ФД) статистических средних [7].

Для Д-шума формула дифференцирования имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\langle\alpha(t)\Phi_t[\alpha]\rangle=$$
$$=-\nu\langle\alpha(t)\Phi_t[\alpha]\rangle+\left\langle\alpha(t)\frac{d\Phi_t[\alpha]}{dt}\right\rangle, \qquad (7)$$

где $\Phi_t[\alpha]=\Phi_t[\alpha(\tau)]$ – функция t и запаздывающий функционал процесса α, т. е. зависит от множества значений $\alpha(\tau)$ с $\tau\le t$. Здесь $\nu=2\lambda$.

Полагая в (7) $\Phi_t[\alpha]=e^{i\mu V(t)}$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d\Theta_t}{dt}=i\mu F_+\Theta_t+i\mu F_-\Psi_t, \tag{8}$$

$$\frac{d\Psi_t}{dt}=-\nu\Psi_t+i\mu F_+\Psi_t+i\mu F_-\Theta_t. \tag{9}$$

Произведем замену $\Theta_t=e^{i\mu F_+t}\overline{\Theta}_t$ и $\Psi_t=e^{i\mu F_+t}\overline{\Psi}_t$, в результате для функции $\overline{\Theta}_t$ имеем уравнение

$$\frac{d^2\overline{\Theta}_t}{dt^2}+\nu\frac{d\overline{\Theta}_t}{dt}+\left(\mu F_-\right)^2\overline{\Theta}_t=0. \tag{10}$$

Примем $V(0)=0$, тогда $\overline{\Theta}_t\big|_{t=0}=1$ и $\left.\frac{d\overline{\Theta}_t}{dt}\right|_{t=0}=0.$

Функция $\overline{\Theta}_t$ подчиняется уравнению осциллятора в среде с трением, причем «коэффициент трения» определяется средней частотой переключений, а «коэффициент жесткости» пропорционален величине F_-^2, т. е. определяется квадратом разности сил, определяющих динамики один и два.

С учетом начальных условий, получаем окончательное выражение для ХФ $\Theta_t(\mu)$:

$$\Theta_t(\mu)=e^{(-\lambda+i\mu F_+)t}\left[\frac{\lambda}{\Delta}sh(\Delta t)+ch(\Delta t)\right], \tag{11}$$

где $\Delta=\sqrt{\lambda^2-(\mu F_-)^2}$.

Используя (5) и (11) для моментов $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$, получаем соотношения:

$$\begin{gathered}\chi_1(t)\equiv\langle V(t)\rangle=F_+t,\\ \chi_2(t)\equiv\langle V^2(t)\rangle=\langle V(t)\rangle^2+\\ +\frac{F_-^2}{2\lambda^2}\left(2\lambda t+e^{-2\lambda t}-1\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Отсюда для дисперсии скорости $\Delta_V(t)=\chi_2-\chi_1^2$ в исходных переменных имеем выражение:

$$\Delta_V(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{F_1-F_2}{m}\right)^2\tau_0^2\left(\frac{t}{\tau_0}+e^{-\frac{t}{\tau_0}}-1\right). \tag{13}$$

Приведем выражение для средней кинетической энергии, вытекающее из (13), в следующем виде:

$$\begin{gathered}\langle E(t)\rangle=\frac{m\langle V^2\rangle}{2}=\frac{m\langle V\rangle^2}{2}+\\ +\frac{\left(F_1-F_2\right)^2}{4m}\tau_0^2\left(\frac{t}{\tau_0}+e^{-\frac{t}{\tau_0}}-1\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Если поведение частицы в состояниях один и два одинаково, т. е. $F_1=F_2=F$, то из (14) получаем хорошо известное из курса общей физики выражение $\langle E\rangle=E=Ft^2/2m$ (с учетом $V(0)=0$). Второе слагаемое в (14) по существу отвечает за механизм диффузии в пространстве скоростей. Он формируется различием сил, действующих на частицу в состояниях один и два. Видно, что вклад в $\langle E(t)\rangle$ тем больше, чем больше отличаются значения силы в этих состояниях. Применительно к заряженной частице – чем больше различаются напряженности электрических полей в состояниях один и два.

Важно, что рост характерного времени спада корреляций τ_0 также ведет к росту средней кинетической энергии частицы, т. е. сильно коррелированные переключения способствуют большему «нагреву частицы». На временах, много меньших времени спада корреляций ($t<<\tau_0$), значение $\langle E(t)\rangle$ растет квадратично $\langle E\rangle=\left[\left(F_1^2+F_2^2\right)/4m\right]t^2$ со временем. В противоположном пределе $t>>\tau_0$ имеем следующее выражение:

$$\langle E\rangle=\frac{m\langle V\rangle^2}{2}+\frac{\left(F_1-F_2\right)^2}{4m}\tau_0t. \tag{15}$$

В этом пределе дисперсию скорости частицы можно переписать в классическом для диффузионных процессов виде: $\Delta_V(t)=2D_Vt$, где $D_V=(F_1-F_2)^2\tau_0/4m^2$ – коэффициент диффузии в пространстве скоростей. Для заряженной частицы $D_V=q^2(E_1-E_2)^2\tau_0/4m^2$.

Случайное перемешивание осциллирующих динамик

Пусть $F_{1,2}=qE_{1,2}\sin\omega_{1,2}t$. Перейдем в уравнении (2) к безразмерным переменным: $\tau=\omega_1t$, $V=V_x/V_0$, $V_0=qE_1/m\omega_1$, $\varepsilon=E_2/E_1$, $\Omega=\omega_2/\omega_1$. В результате получим уравнение

$$\frac{dV}{d\tau}=\frac{1}{2}\left(\sin\tau+\varepsilon\sin\Omega\tau\right)+\frac{\alpha(\tau)}{2}\left(\sin\tau-\varepsilon\sin\Omega\tau\right). \quad (16)$$

Здесь параметр V_0 задает характерную скорость заряда в осциллирующем поле под номером один, параметры ε и Ω сравнивают амплитуды и частоты полей один и два соответственно.

Определим среднюю кинетическую энергию частицы. Для этого потребуется вычислить момент $\left\langle V^2(\tau)\right\rangle$. Используя (16), запишем сначала уравнение для $V^2(\tau)$, а затем усредним его обе части по ансамблю реализаций процесса $\alpha(\tau)$. В результате получим уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d\left\langle V^2\right\rangle}{d\tau}&=\left\langle V\right\rangle\left(\sin\tau+\varepsilon\sin\Omega\tau\right)+\\&+\left\langle\alpha(\tau)V\right\rangle\left(\sin\tau-\varepsilon\sin\Omega\tau\right).\end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая уравнение для средней скорости, вместо (17) можем записать компактное уравнение для дисперсии скорости $\Delta_V(\tau)=\left\langle V^2(\tau)\right\rangle-\left\langle V(\tau)\right\rangle^2$:

$$\frac{d\Delta_V}{d\tau}=\left\langle\alpha(\tau)V\right\rangle\left(\sin\tau-\varepsilon\sin\Omega\tau\right). \quad (18)$$

Среднее $\left\langle\alpha(\tau)V\right\rangle\equiv V_1$ преобразуем, используя ФД (7). Полагая в ней $\Phi_\tau[\alpha]=V(\tau)$ и используя для преобразования производной $dV/d\tau$ стохастическое уравнение движения (16), получаем замкнутую систему уравнений для определения средних $\left\langle V^2\right\rangle$ и V_1:

$$\frac{d\Delta_V}{d\tau}=V_1\left(\sin\tau-\varepsilon\sin\Omega\tau\right), \quad (19)$$

$$\frac{dV_1}{d\tau}=-\tilde{\nu}V_1+\frac{1}{2}\left(\sin\tau-\varepsilon\sin\Omega\tau\right). \quad (20)$$

Здесь нужно учесть, что параметр $\tilde{\nu}$ в ФД (7) безразмерный $\left(\tilde{\nu}=2\lambda/\omega_1\right)$. Систему (19), (20) решаем при нулевых начальных условиях: $\Delta_V(0)=0$, $V_1(0)=\left\langle\alpha(0)\right\rangle V(0)=0$. Решение системы весьма громоздко, поэтому приведем асимптотику решения при $\tilde{\nu}\tau>>1$ (или $t>>\tau_0$), поскольку именно она и определяет динамику стохастического нагрева. Здесь выделяется два случая: $\Omega=1$ и $\Omega\neq1$. Имеем следующие соотношения:

$$\Delta_V(\tau)=\frac{(1-\varepsilon)^2}{4(\tilde{\nu}^2+1)}\tilde{\nu}\tau\equiv2D_{V1}\tau, \ \left(\Omega=1\right), \quad (21)$$

$$\Delta_V(\tau)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tilde{\nu}^2+1}+\frac{\varepsilon^2}{\tilde{\nu}^2+\Omega^2}\right)\tilde{\nu}\tau\equiv2D_{V2}\tau, \ \left(\Omega\neq1\right), \quad (22)$$

где D_{V1} – коэффициент диффузии в пространстве скоростей, когда случайным образом перемешиваются динамики частицы в осциллирующих электрических полях с равными частотами, но разными амплитудами, D_{V2} – коэффициент диффузии для случая разных частот и амплитуд осцилляций полей. Из (21) и (22) видно, что влияние перемешивания на усредненную динамику заряженной частицы происходит по-разному. В первом случае, коэффициент диффузии пропорционален квадрату разности E_1-E_2 амплитуд колебаний полей, а во втором имеем аддитивную сумму вкладов в D_{V2} вида $E_i^2/\left(\nu^2+\omega_i^2\right)$, $i=1,2$.

Из (21) следует, что нагрев отсутствует, если $\varepsilon=1$. Нагрев тем больше, чем сильнее разнятся амплитуды полей в динамиках один и два. При этом коэффициент диффузии D_{V1} является немонотонной функцией $\tilde{\nu}$, которая при $\tilde{\nu}=1$ принимает максимальное значение.

При случайном перемешивании динамик частицы в осциллирующих полях с разными частотами и амплитудами коэффициент диффузии D_{V2}, определяющий скорость нагрева частицы представляется уже в виде суммы двух слагаемых (прибавка к нагреву за счет количества волн). Оба слагаемых являются также немонотонными функциями $\tilde{\nu}$ и имеют максимумы при $\tilde{\nu}=1$ и $\tilde{\nu}=\Omega$, так что результирующий максимум приходится на частоты переключений $\tilde{\nu}$, лежащие в интервале $1\leq\tilde{\nu}\leq\Omega$.

В работе [8] вопрос нагрева и диффузии заряженной частицы обсуждался в рамках точно решаемой модели, где сила, действующая на заряженную частицу равнялась $F=qE\cos\left(\omega t+\alpha(t)\right)$, а случайные скачки фазы моделировались Д-шумом $\alpha(t)$ со значениями $\pm\sigma$. Проведенное в [8] описание можно переформулировать в терминах подхода, изложенного в настоящей работе. Отметим, что в цитированных во Введении работах при численном моделировании использовались более общие, чем Д-шум, модели случайных скачков фазы, например, задавалось распределение по амплитудам скачков фазы. Можно показать, что изложенный здесь подход можно обобщить и на конечное число динамик, которые перемешиваются по закону случая.

Заключение

В работе сформулирован подход к описанию поведения нестационарных физических систем, в которых происходит случайная смена регулярных динамик. На примере смены двух динамик, описываемых уравнениями ньютоновской механики, получено уравнение движения с разрывными коэффициентами. Рассмотрены точно решаемые модели, когда закон смены динамик описывается случайным телеграфным сигналом, а сами регулярные динамики характеризуют движение частицы под действием сил, осциллирующих с разными амплитудами и частотами, а также постоянных отличающихся по величине. Установлено, что в обоих случаях имеет место стохастический нагрев.

В заключение отметим, что случайное перемешивание регулярных динамик также задает бесстолкновительный механизм ускорения заряженных частиц, как и поля со случайно прыгающей фазой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костюков И. Ю., Пухов А. М.* // УФН. 2015. Т. 185. № 1. С. 89.
2. *Файнберг Я. Б., Басс Ф. Г., Шапиро В. Д.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 1 (7). С. 329.
3. *Карась В. И., Файнберг Я. Б., Алисов А. Ф. и др.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 9. С. 810.
4. *Карась В. И., Алисов А. Ф., Артамошкин А. М. и др.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2006. № 5. С. 54.
5. *Андреев Д. Г., Ерохин Н. С.* // Прикладная физика. 2012. № 2. С. 5.
6. *Буц В. А., Кузьмин В. В., Толстолужский А. П.* // Вопросы атомной науки и техники. Физика плазмы. 2013. № 1 (83). С. 137.
7. *Шапиро В. Е., Логинов В. М.* Динамические системы при случайных воздействиях. – Новосибирск: Наука, 1983.
8. *Логинов В. М.* // Прикладная физика. 2017. № 1. С. 9.

PACS: 52.40Db, 52.80.Pi

Stochastic heating of nonrelativistic charged particles in electric fields with random switchings

V. M. Loginov

V. P. Astaf’ev Krasnoyarsk State Pedagogical University,
Institute of Mathematics, Physics and Informatics
89 Ada Lebedeva str., Krasnoyarsk, 660049, Russia
E-mail: valog_1949@mail.ru

Received March 28, 2017

Consideration is given to the collisionless mechanism of stochastic heating of charged nonrelativistic particles, arising from random switching between two deterministic movements associated with the motion of particles in constant electric fields with different amplitudes and oscillating with different amplitudes and frequencies. In the case of mixing the law of the random markovian dichotomic process, an average kinetic energy of particles has been calculated. It is shown that the average energy of particles increases with time. At times a lot more time of decay of correlations, the growth law is linear.

Keywords: constant and oscillating electric field, random switching movements, exactly solvable models, stochastic heating of particles.

REFERENCES

1. I. Yu. Kostyukov, and A. M. Pukhov, Physics-Uspekhi **185** (1), 89 (2015).
2. Ya. B. Feinberg, F. G. Bass, and V. D. Shapiro, JETP **49**, 329 (1965).
3. V. I. Karas’, Ya. B. Feinberg, A. F. Alisov, et al., Plasma Physics Reports **31** (9), 810 (2005).
4. V. I. Karas’, A. F. Alisov, A. M. Artamoshkin, et al., Problems of Atomic Science and Technique. Plasma Electronics and New Acceleration Methods, No. 5, 54 (2006).
5. D. G. Andreev and N. S. Erokhin, Prikl. Fiz., No. 2, 5 (2012).
6. V. A. Buts, V. V. Kuzmin, and A. P. Tolstoluzhsky, Problems of Atomic Science and Technology. Plasma Physics, No. 1(83), 137 (2013).
7. V. E. Shapiro and V. M. Loginov, *Dynamical Systems under Random Actions* (Novosibirsk: Nauka, 1983) [in Russian].
8. V. M. Loginov, Prikl. Fiz., No. 1, 9 (2017).