ОБЩАЯ ФИЗИКА

УДК 533.951 PACS: 52.40Db, 52.80.Pi

Ускорение и диффузия заряженной частицы в осциллирующем электрическом поле со случайно прыгающей фазой

В. М. Логинов

Исследована дисперсия скорости и координаты нерелятивистской заряженной частицы в осциллирующем электрическом поле со случайно прыгающей фазой в рамках точно решаемой модели, когда скачки фазы представляют собой случайный телеграфный сигнал. Показано, что есть область статистических характеристик фазы, где прирост средней кинетической энергии частицы линейно растет со временем (стохастический нагрев), а дисперсия частиц по координате на временах много больше времени спада корреляций, в отличие от классической диффузии, растет не как t, а как t^3 (супербаллистический режим диффузии). В том же пределе показано, что коэффициент корреляции скорости частицы спадает как $1/\sqrt{t}$. Выписана система уравнений в частных производных для определения распределения скорости частицы.

Ключевые слова: осциллирующее электрическое поле, стохастически прыгающая фаза, точно решаемая модель, стохастический нагрев частиц, супербаллистическая диффузия, коэффициент корреляции, кинетическое уравнение.

Введение

Изучение взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями при наличии флуктуаций представляет интерес для многих разделов науки и техники. Фундаментальное значение имеет вопрос о генерации потоков ускоренных частиц в межпланетном пространстве. Природа механизмов ускорения различна (см., например, [1–5] и цитированную там литературу). Выделяют регулярные механизмы ускорения, например, ускорение ударными волнами и статистические, например, механизм ускорения Ферми II рода, который возникает при взаимодействии частиц со случайными «магнитными облаками» (сгустками плазмы с вмороженными в них магнитными полями). Эффективным механизмом ускорения является плазменная турбулентность, при которой характеристики электрических и магнитных полей являются случайными функциями координат и времени.

В последнее десятилетие экспериментально и теоретически активно разрабатываются методы генерации интенсивного стохастического излучения с помощью плазменно-пучковых генераторов [6–9]. В частности, показывается, что микроволновое излучение со стохастически прыгающей фазой обеспечивает эффективное ускорение электронов. При этом широко используется компьютерное моделирование. Установлено, что на множестве переменных, характеризующих случайное скачкообразное изменение фазы (амплитуда, длительность, частота) существуют области, где прирост энергии частицы значителен, а также существуют области переменных, где случайные скачки фазы не приводят к ускорению частиц.

Исследование стохастического ускорения заряженных частиц продолжается. Целью данной работы является исследование дисперсии скорости и координаты нерелятивистской заряженной частицы в осциллирующем электрическом поле со случайно прыгающей фазой в рамках точно решаемой модели, когда скачки фазы представляют собой случайный телеграфный сигнал. Здесь, как и в работе [8], анализ проводится в рамках одномерной модели движения частицы, не учитывающей столкновения между частицами.

Логинов Валерий Михайлович, профессор, д.ф.-м.н.
Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева. Институт математики, физики и информатики.
Россия, 660049, Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89.
Тел.: (391) 263-97-24, (391) 288-03-06.
E-mail: valog_1949@mail.ru

Статья поступила в редакцию 12 января 2017 г.

Постановка задач исследования

Случайные скачки фазы в настоящей работе моделируются марковским дихотомическим процессом (т. н. Д-шум, в отечественной литературе – случайный телеграфный сигнал). Модель позволяет аналитически провести статистическое описание процессов ускорения и диффузии частицы. Используя метод формул дифференцирования статистических средних [10], получены замкнутые уравнения для одноточечных моментов скорости и координаты частицы второго порядка, а также кинетическое уравнение для одноточечной плотности вероятности скорости частицы. Определена корреляционная функция скорости.

Вычисление средних характеристик скорости

Рассмотрим простейшую модель, описывающую одномерное движение нерелятивистской заряженной частицы в осциллирующем с частотой ω электрическом поле $\mathbf{E}(t) = (E_0\cos[\omega t + \alpha(t)], 0, 0)$ со случайно меняющейся фазой $\alpha(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{q}{m}E_0\cos[\omega t + \alpha(t)], \qquad (1)$$

где u – скорость частицы в направлении x, q, m – ее заряд и масса соответственно.

В качестве $\alpha(t)$ используем марковский дихотомический процесс (случайный телеграфный сигнал) (см., например, [10]), т. е. $\alpha(t)$ – ступенчатая случайная функция, принимающая с одинаковой вероятностью постоянные значения $\pm\sigma$, при этом имеет среднее значение $\langle\alpha(t)\rangle = 0$ и экспоненциально спадающую корреляционную функцию: $K(|t_1 - t_2|) = \sigma^2 e^{-2\lambda|t_1 - t_2|}$.

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций процесса $\alpha(t)$. Характерное время спада корреляций рассматриваемого процесса равно $\tau_0 = 1/2\lambda$, величина λ также определяет среднее число скачков в единицу времени.

Для дихотомического шума (далее Д-шума) справедливо равенство:

$$F(\alpha(t)) = \\ = \frac{1}{2}[F(\sigma) + F(-\sigma)] + \frac{\alpha(t)}{2\sigma}[F(\sigma) - F(-\sigma)], \qquad (2)$$

где $F(\alpha(t))$ некоторая функция. Учитывая (2), уравнение (1) можно представить в виде:

$$\frac{dV}{d\tau} = \cos\sigma\cos\tau - \frac{\sin\sigma}{\sigma}\alpha(\tau)\sin\tau, \qquad (3)$$

здесь использованы безразмерные переменные: $\tau = \omega t$, $V = \dfrac{u}{u_0}$, $u_0 = \dfrac{qE_0}{m\omega}$.

Параметр u_0 задает характерную скорость заряда в осциллирующем поле. Уравнение (3) представляет собой исходное стохастическое дифференциальное уравнение.

Определим сначала одноточечные моменты скорости частицы первого и второго порядка. Усредняя обе части уравнения (3) по ансамблю реализаций процесса $\alpha(t)$ с учетом $\langle\alpha(t)\rangle = 0$ для средней скорости и средней координаты с учетом нулевых начальных условий, получаем выражения:

$$\langle V(\tau)\rangle = \cos\sigma\sin\tau, \quad \langle X(\tau)\rangle = \cos\sigma(1 - \cos\tau). \qquad (4)$$

Видим, что амплитуды колебаний безразмерной средней скорости и средней координаты частицы не превосходят единицу. Вклад от случайно прыгающей фазы по закону Д-шума сводится к появлению множителя $\cos\sigma$.

Траектория частицы на фазовой плоскости средней скорости и средней координаты описывается, очевидно, выражением:

$$\langle V(\tau)\rangle^2 + (\langle X(\tau)\rangle - \cos\sigma)^2 = \cos^2\sigma. \qquad (5)$$

Для случая $|\cos\sigma| \neq 0$ в среднем движение происходит по окружности радиуса $R = |\cos\sigma|$. На периоде $0 \le \sigma \le 2\pi$ изменение фазы приводит к изменению положения центра окружности $(\pm|\cos\sigma|, 0)$. При $\sigma = \pi/2$, $3\pi/2$ частица в среднем «локализуется» в области начала координат, так как $\langle V(\tau)\rangle = 0$ и $\langle X(\tau)\rangle = 0$.

Определим среднюю кинетическую энергию частицы. Для этого потребуется вычислить момент $\langle V^2(\tau)\rangle$. Стохастическое уравнение для $V^2(\tau)$ имеет вид:

$$\frac{dV^2}{d\tau} = 2V\left(\cos\sigma\cos\tau - \frac{\sin\sigma}{\sigma}\alpha(\tau)\sin\tau\right). \qquad (6)$$

После усреднения по реализациям процесса $\alpha(\tau)$, получаем уравнение:

$$\frac{d\langle V^2\rangle}{d\tau} = 2\langle V\rangle\cos\sigma\cos\tau - 2\langle\alpha(\tau)V\rangle\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\tau. \qquad (7)$$

Среднее $\langle\alpha(\tau)V\rangle\equiv V_1$ преобразуем, используя метод формул дифференцирования статистических средних [10]. Для Д-шума формула дифференцирования имеет вид:

$$\frac{d}{d\tau}\langle\alpha(\tau)\Phi_\tau[\alpha]\rangle=-\nu\langle\alpha(\tau)\Phi_\tau[\alpha]\rangle+ +\left\langle\alpha(\tau)\frac{d\Phi_\tau[\alpha]}{d\tau}\right\rangle, \qquad (8)$$

где $\Phi_\tau[\alpha]=\Phi_\tau[\alpha(\tau')]$ с $\tau'\le\tau$ – запаздывающий функционал процесса α. Здесь $\nu=2\lambda/\omega$.

Полагая в (8) $\Phi_\tau[\alpha]=V(\tau)$ и используя для преобразования производной $dV/d\tau$ стохастическое уравнение движения (3), получаем замкнутую систему уравнений для определения средних $\langle V^2\rangle$ и V_1 (здесь учтено, что $\alpha^2(\tau)\equiv\sigma^2=\mathrm{const}$):

$$\frac{d\langle V^2\rangle}{d\tau}=2\cos\sigma\cos\tau\langle V\rangle-2\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\tau V_1, \qquad (9)$$

$$\frac{dV_1}{d\tau}=-\nu V_1-\sigma\sin\sigma\sin\tau. \qquad (10)$$

Уравнения (9) и (10) решаем при нулевых начальных условиях:

$$\langle V^2(0)\rangle=V_0^2=0,\ V_1(0)=\langle\alpha(0)V_0\rangle=\langle\alpha(0)\rangle V_0=0.$$

Среднее V_1 имеет вид:

$$V_1(\tau)=\frac{\sigma\sin\sigma}{\nu^2+1}\left[\cos\tau-\nu\sin\tau-e^{-\nu\tau}\right]. \qquad (11)$$

В результате, для дисперсии скорости заряженной частицы $\Delta_V(\tau)=\langle V^2(\tau)\rangle-\langle V(\tau)\rangle^2$ в рассматриваемой модели электрического поля со случайно прыгающей фазой, получаем соотношение:

$$\Delta_V(\tau)=\frac{\sin^2\sigma}{\nu^2+1}\left(p(\nu,\tau)+q(\nu,\tau)\right), \qquad (12)$$

где

$$p(\nu,\tau)=\nu\tau+\frac{1}{2}\left(\cos2\tau-\nu\sin2\tau-1\right),$$
$$q(\nu,\tau)=\frac{1}{\nu^2+1}\left[1-\left(\nu\sin\tau+\cos\tau\right)e^{-\nu\tau}\right]. \qquad (13)$$

Обращает на себя внимание, что зависимость от амплитуды прыгающей фазы в динамике движения частицы различна. Средняя скорость пропорциональна косинусу фазы, а среднеквадратичные флуктуации скорости, наоборот, пропорциональны синусу фазы. В частности, это означает, что при $\sigma=\pi n$, $n=0,1,2,\ldots$ дисперсия скорости $\Delta_V(\tau)$ равна нулю и $\langle V^2(\tau)\rangle\equiv\langle V(\tau)\rangle^2$. Средняя кинетическая энергии частицы за счет случайных флуктуаций фазы в этом случае величина ограниченная. При $\sigma\ne\pi n$ максимальный вклад в дисперсию, а, соответственно, и в прирост средней кинетической энергии частицы от амплитуды σ возникает при σ кратных $\pi/2$, при которых, квадрат синуса обращается в единицу (при этом $\cos\sigma=0$ и $\langle V(\tau)\rangle=0$). Наряду с первыми и вторыми гармониками поля в выражении для $\Delta_V(\tau)$ появляется линейно растущее от времени слагаемое. С ростом τ вклад от первых гармоник в $\Delta_V(\tau)$ экспоненциально мал.

Интересуясь приростом средней кинетической энергии частицы за счет взаимодействия с флуктуирующем полем, рассмотрим асимптотику $\nu\tau>>1$. Из (12), (13) имеем выражение:

$$\Delta_V(\tau)=\frac{\sin^2\sigma}{\nu^2+1}\nu\tau. \qquad (14)$$

Средняя кинетическая энергия линейно растет со временем (стохастический нагрев), причем скорость роста определяется частотой осцилляций поля, амплитудой и частотой скачков прыгающей фазы (напомним, что $\tau=\omega t$, $\nu=2\lambda/\omega$). Рассматриваемому пределу соответствует условие $t>>\tau_0=1/2\lambda$, т. е. рассматриваются времена много больше времени спада корреляций Д-шума, моделирующего скачки фазы поля. Коэффициент, определяющей скорость роста энергии частицы немонотонно меняется от переменных σ и ν. На периоде $0\le\sigma\le2\pi$ в точках $\pi/2$ и $3\pi/2$ квадрат синуса принимает максимальные значения, равные 1. Функция $\nu/(\nu^2+1)$ максимум принимает при $\nu=1$ (или $2\lambda=\omega$) так что максимальный прирост средней кинетической энергии частицы за время τ равен $\tau/2$. Заметим, что в рассматриваемом пределе присутствующие в выражениях (13) осциллирующие слагаемые вносят малый вклад.

Коэффициент корреляции скорости частицы

Корреляционная функция скорости заряженной частицы $K(\tau,\tau')=\left\langle\left(V(\tau)-\langle V(\tau)\rangle\right)\left(V(\tau')-\langle V(\tau')\rangle\right)\right\rangle$, $\tau\ge\tau'$ с учетом уравнения движения (3) и условия $\langle\alpha(\tau)\rangle=0$, определяется следующим образом:

$$K(\tau,\tau')= \\ =\frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2}\int_0^{\tau}\int_0^{\tau'}\sin\tau_1\sin\tau_2\left\langle\alpha(\tau_1)\alpha(\tau_2)\right\rangle d\tau_1 d\tau_2. \quad (15)$$

В соответствии с определением, коэффициент корреляции $k(\tau,\tau')$ запишем в виде:

$$k(\tau,\tau')=\frac{K(\tau,\tau')}{\sqrt{\Delta_V(\tau)}\sqrt{\Delta_V(\tau')}}. \quad (16)$$

Выражение для $k(\tau,\tau')$ весьма громоздко, приведем здесь его асимптотику при $\nu\tau,\ \nu\tau'>>1$, т. е. имеем соотношение:

$$k(\tau,\tau')=\sqrt{\frac{\tau'}{\tau}}\equiv\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^{\beta}. \quad (17)$$

Таким образом, на временах, много больших времени спада корреляций, коэффициент корреляции скорости заряженной частицы стремится к нулю с ростом τ (напомним, что $\tau\geq\tau'$, а значение τ' – фиксировано). При этом важно, что динамика спада не экспоненциальная, как у процесса $\alpha(\tau)$, переключающего фазу волны, а степенная, и показатель степени β равен $1/2$.

Дисперсия координаты заряженной частицы и кинетическое уравнение

Дисперсия координаты частицы и смешанного момента координаты и скорости определяются из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\left\langle X^2\right\rangle}{d\tau}=2\left\langle XV\right\rangle, \quad (18)$$

$$\frac{d\left\langle XV\right\rangle}{d\tau}=\left\langle V^2\right\rangle+\cos\sigma\cos\tau\left\langle X\right\rangle-\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\tau V_2, \quad (19)$$

$$\frac{dV_2}{d\tau}=-\nu V_2+V_1, \quad (20)$$

где $V_2(\tau)=\left\langle\alpha(\tau)X\right\rangle$.

При записи уравнения (20) была использована формула дифференцирована (8), поскольку координата частицы $X(\tau)$ также является запаздывающим функционалом процесса α. К уравнениям (18)–(20) следует добавить решение уравнения (9) для $\left\langle V^2(\tau)\right\rangle$, уравнение (10) для среднего $V_1(\tau)=\left\langle\alpha(\tau)V\right\rangle$, а также выражения для средних $\left\langle X(\tau)\right\rangle$ и $\left\langle V(\tau)\right\rangle$. Начальные условия для всех переменных принимаем нулевые. Решение для интересующих нас средних весьма громоздко. Из-за недостатка места приведем здесь асимптотику при $\nu\tau>>1$:

$$\left\langle X^2(\tau)\right\rangle=\frac{\sin^2\sigma}{\nu^2+1}\frac{\nu\tau^3}{3}, \\ \left\langle X(\tau)V(\tau)\right\rangle=\frac{\sin^2\sigma}{\nu^2+1}\frac{\nu\tau^2}{2}. \quad (21)$$

Под конец, опуская выкладки, приведем систему уравнений для определения плотности вероятности $P(\tau,V)$ скорости заряженной частицы в поле волны с прыгающей фазой по закону Д-шума:

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}+\cos\sigma\cos\tau\frac{\partial P}{\partial V}-\frac{\sin\sigma}{\sigma}\sin\tau\frac{\partial P_1}{\partial V}=0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial\tau}+\nu P_1+\cos\sigma\cos\tau\frac{\partial P_1}{\partial V}-\sigma\sin\sigma\sin\tau\frac{\partial P}{\partial V}=0. \quad (23)$$

Произведение $P(\tau,V)dV$ есть вероятность того, что в момент времени τ значения скорости частицы попадают в интервал $(V,V+dV)$. Начальные условия: $P(0,V)=P_0(V)$, $P_1(0,V)=0$. В приближении $\nu\left|P_1\right|>>\left|\partial P_1/\partial\tau\right|$, $\left|\partial P_1/\partial V\right|$ система (22) и (23) сводится к классическому уравнению диффузии в пространстве скоростей.

Заключение

Рассмотренная модель стохастических скачков фазы волны позволила аналитически провести статистическое описание движения заряженной частицы. Показано, что статистические характеристики переменных движения частицы зависят от амплитуды и средней частоты скачков случайной фазы. Эффекты стохастического нагрева и быстрой диффузии проявляется только, если $\sin\sigma\neq 0$. На временах, много больших времени спада корреляций фазы средняя кинетическая энергия частицы линейно растет со временем, а дисперсия координаты, в отличие от классической диффузии, растет как куб времени (супербаллистическая диффузия). В этом же пределе коэффициент корреляции скорости частицы убывает с ростом t как $1/\sqrt{t}$.

В работе приведена замкнутая система уравнений гиперболического типа для определения плотности вероятности скорости частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лонгейр М. Астрофизика высоких энергий. – М.: Мир, 1984.
2. *Мирошниченко Л. И.* Физика Солнца и солнечно-земных связей. – М.: Университетская книга, 2011.
3. *Костюков И. Ю., Пухов А. М.* // УФН. 2015. Т. 185. № 1. С. 89.
4. *Птицина К. В., Троицкий С. В.* // УФН. 2010. Т. 180. № 7. С. 723.
5. *Файнберг Я. Б., Басс Ф. Г., Шапиро В. Д.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. № 1(7). С. 329.
6. *Карась В. И., Файнберг Я. Б., Алисов А. Ф. и др.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 9. С. 810.
7. *Карась В. И., Алисов А. Ф., Артамошкин А. М. и др.* // Вопросы атомной науки и техники, сер. Плазменная электроника и новые методы ускорения. 2006. № 5. С. 54.
8. *Андреев Д. Г., Ерохин Н. С.* // Прикладная физика. 2012. № 2. С. 5.
9. *Буц В. А., Кузьмин В. В., Толстолужский А. П.* // Физика плазмы. 2013. № 1 (83). С. 137.
10. *Шапиро В. Е., Логинов В. М.* Динамические системы при случайных воздействиях. – Новосибирск: Наука, 1983.

PACS: 52.40Db, 52.80.Pi

Acceleration and diffusion of charged particles in the oscillating electric field with a randomly jumping phase

V. M. Loginov

V. P. Astafev Krasnoyarsk State Pedagogical University,
Institute of Mathematics, Physics and Informatics
89 Ada Lebedeva str., Krasnoyarsk, 660049, Russia
E-mail: valog_1949@mail.ru

Received January 12, 2017

Consideration is given to investigation of the variance of a velocity and coordinate of the non-relativistic charged particle in an oscillating electric field with randomly jumping phase within an exactly solvable model, when the phase jumps are the random telegraph signal. It is shown that there is a range of statistical characteristics of the phase where the average kinetic energy of particles grows linearly increase with time (stochastic heating) and the coordinates of the particle dispersion are described by the relation t^3 (the superballistic diffusion). In the same limit, the correlation coefficient of the particle velocity decreases as $1/\sqrt{t}$. The system of equations for determining the velocity distribution is presented.

Keywords: oscillating electric field, stochastically jumping phase, exactly solvable model, stochastic heating, superballistic diffusion, coefficient correlation, master equation.

REFERENCES

1. M. S. Longair, *High Energy Astrophysics* (Cambridge University Press Cambridge London New York New Rochelle Melbourne Sydney, 1981; Mir, Moscow, 1984).
2. L. I. Miroshnichenko, *Solar Physics and Solar-Terrestrial Relations* (Moscow, University Book, 2011) [in Russian].
3. I. Yu. Kostyukov and A. M. Pukhov, Physics-Uspekhi. **185**, 89 (2015).
4. K. V. Ptitsina and S. V. Troitsky, Physics-Uspekhi. **180**, 723 (2010).
5. Ya. B. Feinberg, F. G. Bass, and V. D. Shapiro, JETP. **49**, 329 (1965).
6. V. I. Karas', Ya. B. Feinberg, A. F. Alisov, et al., Plasma Physics Reports **31**, 810 (2005).
7. V. I. Karas', A. F. Alisov, A. M. Artamoshkin, et al., Problems of Atomic Science and Technique. Plasma Electronics and New Acceleration Methods, No. 5, 54 (2006).
8. D. G. Andreev and N. S. Erokhin, Prikl. Fiz. No. 2, 5 (2012).
9. V. A. Buts, V. V. Kuzmin, and A. P. Tolstoluzhsky, Problems of Atomic Science and Technology. Plasma Physics. No. 1(83), 137 (2013).
10. V. E. Shapiro and V. M. Loginov, *Dynamical Systems under Random Actions* (Novosibirsk, Nauka, 1983) [in Russian].