

УДК 537.533.3

МЕТОД τ -ВАРИАЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭМИССИОННЫХ СИСТЕМ

М. А. Монастырский

Институт общей физики РАН, Москва, России

Излагается общая вычислительная схема метода τ -вариаций, предназначенного для построения абберационных разложений пучков заряженных частиц в произвольных (в том числе нестационарных) электромагнитных полях. Показано, что метод τ -вариаций позволяет единым образом рассматривать задачи абберационного анализа узких и широких пучков, а также задачи расчета электронных зеркал.

На основе метода τ -вариаций предложен абберационный подход к проблеме численной оценки влияния пространственного заряда на качество изображения, основанный на построении последовательности дифференциальных уравнений, аппроксимирующих исходную квазистационарную самосогласованную начальную краевую задачу.

Приведены результаты численного моделирования динамики расплывания электронных пакетов в пикосекундном ЭОП под действием сил кулоновского расталкивания. Установлено, что для начальных плотностей тока, превышающих некоторое значение $j_{0,cr}$, может возникать резкое перераспределение электронной плотности в электронном пакете.

Методы теории аббераций — основного инструмента исследования свойств электронно-оптического изображения — первоначально были заимствованы из классической механики и световой оптики, а затем в течение 30—40-х годов развиты в известных работах Г. Буша (H. Busch), Е. Брюхе (E. Bruche), О. Шерцера (O. Scherzer), В. Глазера (W. Glaser), А. Рекнагеля (A. Recknagel), Р. Пихта (R. Picht) и других основателей электронной оптики применительно к проблемам электронного микроскопа. Представление траекторий заряженных частиц в виде степенных рядов по совокупности малых параметров, характерных для оптики электронного микроскопа, опиралось на прочную математическую базу теории регулярных возмущений, основы которой были разработаны еще А. Пуанкаре (A. Poincaré), и не вызывало особых затруднений. Казалось, что принципиальные проблемы теории аббераций решены, и остается классифицировать абберационные коэффициенты для электромагнитных фокусирующих и отклоняющих систем различных типов, исследовать формы их представления и зависимость от конструктивных параметров.

Развитие теории аббераций было нарушено двумя работами, опубликованными в начале 40-х годов. Первая из этих работ, выполненная А. Рекнагелем [1], посвящена абберационным свойствам электронного зеркала. Во второй работе, принадлежащей выдающемуся русскому физическому А. А. Арцимовичу [2], впервые рассмотрен вопрос о применимости теории аббераций для оценки качества изображения в эмиссионной изображающей системе. Ввиду принципиальной важности этой работы мы остановимся на ней более подробно.

Как известно, основные особенности эмиссионных изображающих систем состоят в следующем:

источник эмиссии электронов (катод) погружен в поле фокусирующей линзы; наименее вероятная начальная энергия эмиттированных электронов весьма мала по сравнению с энергией, приобретаемой пучком в результате ускорения; апертура элементарных пучков, эмиттируемых каждой точкой рабочей области катода, составляет 90° .

В работе [2] показано, что применение формальной процедуры построения абберрационных разложений в случае эмиссионных систем приводит к сингулярностям. С математической точки зрения эти сингулярности связаны с наличием "плавающей" особой точки в уравнении траекторий, получаемом из уравнения движения при помощи интеграла энергии, с физической точки зрения — указывают на наличие особенностей формирования абберраций эмиссионных систем в прикатодной области.

В течение 50—60-х и особенно 70-х годов опубликовано большое число работ, посвященных анализу проблем теории абберраций широких пучков и разработке различных специальных подходов, позволяющих в той или иной степени преодолеть обнаруженные в работе [2] трудности (см. монографию [3] и имеющуюся там библиографию). В это же время (и практически независимо) совершенствовалась теория абберраций узких пучков, для которых характерны малая апертура и высокие энергии на входе в пространство фокусировки.

Таким образом, к середине 70-х годов в электронной оптике четко оформились два независимых и в достаточной степени изолированных друг от друга направления — теория абберраций узких и теория абберраций широких пучков.

Как это часто бывает в науке, способ построения единой теории абберраций, позволившей объединить эти два направления, был найден при решении новой проблемы, не имеющей непосредственного отношения к обсуждаемому вопросу. В начале 80-х годов, в связи с интенсивным развитием электронно-оптических методов регистрации быстропротекающих процессов, возникла необходимость построения пространственно-временных абберрационных разложений электронных пакетов в динамических фотоэмиссионных системах со сверхбыстрой разверткой изображения. Одна из особенностей данной проблемы состоит в принципиальной невозможности использовать уравнение траекторий, поскольку электрические поля, осуществляющие развертку электронного пучка, зависят от времени.

В работе [4] впервые была построена теория и дана классификация временных абберраций осесимметричных катодных линз. Метод получения абберрационных разложений, предложенный в этой работе, впоследствии получил название метода τ -вариаций. В более поздних работах [3, 5—9], опубликованных в течение 80-х и начале 90-х годов, при помощи метода τ -вариаций были получены пространственно-временные абберрационные разложения траекторий заряженных частиц в эмиссионных системах с идеальной и слабо нарушенной осевой симметрией, исследованы особенности формирования абберраций в электронных зеркалах, разработаны абберрационные методы расчета пространственно-временных аппаратных функций динамических эмиссионных систем.

В данной работе метод τ -вариаций излагается в наиболее общей форме, позволяющей применять его для построения абберрационных разложений как узких пучков, так и широких пучков заряженных частиц в произвольных электромагнитных полях. Во второй части работы на базе метода τ -вариаций развит абберрационный подход к численной оценке влияния пространственного заряда на характеристики электронного изображения. В качестве примера приведены результаты исследования динамики кулоновского уширения электронных пакетов в пикосекундном ЭОП.

ОБЩАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА МЕТОДА Т-ВАРИАЦИЙ

Рассмотрим движение электронов в свободной от источников области электромагнитного поля R . Имея в виду нерелятивистский случай и пренебрегая в данном параграфе влиянием локальных полей, обусловленных пространственным зарядом и током электронного пучка, представим уравнения движения заряженных частиц (уравнения Лоренца) в виде:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{m} \left(\vec{E} + \left[\dot{\vec{r}}, \vec{B} \right] \right). \quad (1)$$

Начальные условия для уравнения (1) запишем в виде:

$$\vec{r}[\tau_0(\xi), \xi] = \vec{r}_0(\xi), \quad \dot{\vec{r}}[\tau_0(\xi), \xi] = \dot{\vec{r}}_0(\xi). \quad (2)$$

В (1), (2) приняты следующие обозначения:

$\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор заряженной частицы;

$\frac{e}{m}$ — удельный заряд;

$\tau_0 = \tau_0(\xi)$ — начальный момент входа частицы в область R ;

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, \tau, \xi)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, \tau, \xi)$ — электрическая напряженность и магнитная индукция внешнего электромагнитного поля;

$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^s)$ — векторный параметр, изменяющийся в некоторой области

$\Xi \subset R^s$, компонентами которого являются скалярные параметры, определяющие как конкретный вид электромагнитного поля, так и начальное состояние частицы в момент времени $\tau_0(\xi)$.

Более детально физический смысл этих параметров обсуждается ниже применительно к различным задачам теории аберраций.

Зафиксируем некоторую точку $\xi_0 \in \Xi$ вместе с ее достаточно малой окрестностью θ . Назовем элементарным электронным пучком $\pi(\theta, \xi_0)$ совокупность $\{T(\xi)\}$ электронных траекторий вида

$$\vec{r} = \vec{r}(\tau, \xi), \quad \tau \geq \tau_0(\xi), \quad (3)$$

являющихся решениями задачи Коши (1), (2) для всех $\xi \in \theta$. Значение параметра $\xi_0 \in \theta$ будем называть главным или опорным, а соответствующую ему траекторию $T(\xi_0)$, задаваемую уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(\tau, \xi_0), \quad \tau \geq \tau_0(\xi_0), \quad (4)$$

главной или опорной траекторией элементарного пучка.

Гладкую поверхность G , установленную на пути электронного пучка, назовем приемником изображения или экраном (рис. 1). Уравнение поверхности G запишем в виде:

$$g(\vec{r}, \xi) = 0. \quad (5)$$

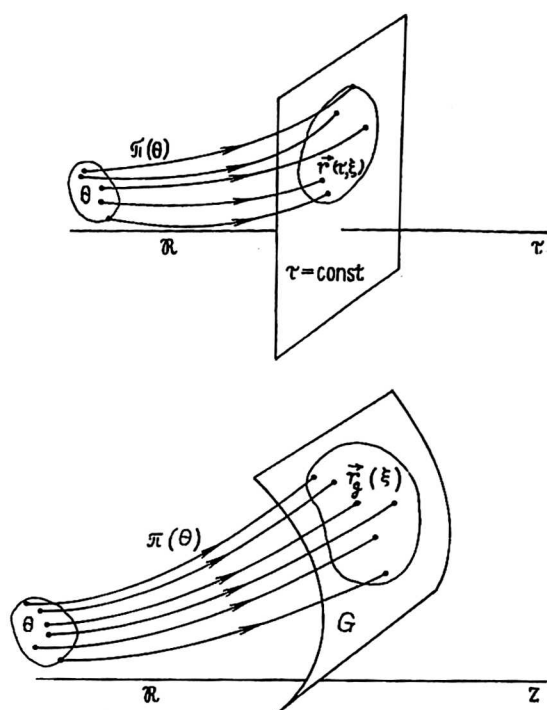


Рис. 1. Определение τ - и экранного представлений электронного пучка: R — область электромагнитного поля; θ — множество начальных параметров; $\pi(\theta)$ — пучок; G — поверхность приемника изображения

Будем считать, что каждому значению $\xi \in \theta$ соответствует электронная траектория, приходящая на поверхность приемника изображения G в момент времени $\tau_g = \tau_g(\xi)$. Значение $\tau_g^0 = \tau_g(\xi_0)$, соответствующее моменту прихода на поверхность G — главной траектории (4), будем называть опорным временем пролета. Пусть функция

$$\vec{r}_g(\xi) = \vec{r}[\tau_g(\xi), \xi] \quad (6)$$

определяет положение индивидуальной частицы в момент ее прихода на поверхность приемника изображения. Тогда, очевидно, уравнение

$$g\left\{\vec{r}[\tau_g(\xi), \xi], \xi\right\} = 0 \quad (7)$$

выполняется тождественно для всех $\xi \in \theta$.

Представление электронного пучка в фиксированный момент времени τ в виде совокупности частиц, координаты которых удовлетворяют уравнению (3) при $\xi \in \theta$, назовем τ -представлением, а представление (6) электронного пучка в виде совокупности частиц, пришедших (в разное время!) на поверхность приемника изображения G , — экранным представлением или g -представлением пучка.

В случае, когда поверхность приемника изображения является плоскостью, перпендикулярной оси Oz , для g -представления можно использовать также термин “ z -представление”, подчеркивая то обстоятельство, что в этом случае

$\tau_g = \tau(z, \xi)$, где $\tau(z, \xi)$ — функция, обратная к $z = z(\tau, \xi)$, и $\vec{r}_g(\xi)$ принимает вид

$$\vec{r}_g(\xi) = \vec{r}(\tau(z, \xi), \xi) = \vec{r}[z, \xi]. \tag{8}$$

Ближайшей целью является асимптотическое исследование пространственно-временных свойств электронного пучка вблизи главной траектории. Назовем абберационным g -представлением элементарного электронного пучка $\pi(\theta, \xi_0)$ в области $\theta \in \Xi$ вблизи главной траектории $T(\xi_0)$ асимптотические разложения траекторий и времени пролета частиц этого пучка на поверхности приемника изображения G :

$$\vec{r}_g(\xi) = \vec{r}_g(\xi_0) + \sum_{k=1}^s r_{gk}(\xi^k - \xi_0^k) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s r_{gkl}(\xi^k - \xi_0^k)(\xi^l - \xi_0^l) + \dots; \tag{9}$$

$$\tau_g(\xi) = \tau_g(\xi_0) + \sum_{k=1}^s \tau_{gk}(\xi^k - \xi_0^k) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^s \tau_{gkl}(\xi^k - \xi_0^k)(\xi^l - \xi_0^l) + \dots \tag{10}$$

Коэффициенты абберационных разложений (9), (10) вычисляются на главной траектории при $\xi = \xi_0$. Используя символ тензорного произведения \otimes , соотношения (9), (10) можно записать в виде:

$$\vec{r}_g(\xi) = \vec{r}_g(\xi_0) + \nabla_{\xi} \vec{r}_g \otimes (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} \vec{r}_g \otimes (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_0) + \dots; \tag{11}$$

$$\tau_g(\xi) = \tau_g(\xi_0) + \nabla_{\xi} \tau_g \otimes (\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \nabla_{\xi} \nabla_{\xi} \tau_g \otimes (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_0) + \dots \tag{12}$$

Изложим теперь схему метода τ -вариаций, позволяющую единым образом строить абберационные представления пучка в самых различных задачах электронной оптики.

Из соотношения (6) последовательным дифференцированием по компонентам вектора ξ получим цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{gk} &= \overset{\cdot\cdot}{r} \tau_k + \overset{\cdot}{r}_k^{\tau}; \\ \vec{r}_{gkl} &= \overset{\cdot\cdot}{r} \tau_k \tau_l + \overset{\cdot}{r}_k^{\tau} \tau_l + \overset{\cdot}{r}_l^{\tau} \tau_k + \overset{\cdot}{r} \tau_{kl} + \overset{\cdot}{r}_{kl}^{\tau}; \end{aligned} \tag{13}$$

выполняющихся на опорной траектории при $\xi = \xi_0, \tau = \tau_g(\xi_0)$.

Фигурирующие в (13) частные производные $\overset{\cdot}{r}_k^{\tau}, \overset{\cdot}{r}_{kl}^{\tau}$ траекторий по компонентам вектора ξ , вычисленные в фиксированный момент времени $\tau_g^0 = \tau_g(\xi_0)$, назовем τ -вариациями элементарного электронного пучка на главной траектории $T(\xi_0)$.

Дифференцируя тождество (6) по ξ^k , получим:

$$\langle \nabla_{\vec{r}} g, \overset{\cdot}{r} \tau_{gk} + \overset{\cdot}{r}_k^{\tau} \rangle + g_k = 0, \tag{14}$$

откуда

$$\tau_{gk} = - \frac{\langle \nabla_{\vec{r}} g, \overset{\cdot}{r}_k^{\tau} \rangle + g_k}{\langle \nabla_{\vec{r}} g, \overset{\cdot}{r} \rangle}. \tag{15}$$

Аналогично могут быть получены формулы для старших производных τ_{gkl} , ... времени пролета заряженной частицы до поверхности G по параметрам ξ^k .

Из (13), (15) следует, что коэффициенты абберационных разложений (9), (10) однозначно определяются главной траекторией $T(\xi_0)$, τ -вариациями $\vec{r}_k^\tau, \vec{r}_{kl}^\tau$, ... пучка на главной траектории, а также дифференциальными свойствами поверхности приемника изображения в окрестности точки $\vec{r}_g(\xi_0)$ прихода на него главной траектории. Заметим, что соотношение (15) имеет смысл, когда главная траектория приходит на поверхность приемника изображения под ненулевым углом $\left(\langle \nabla_{\vec{r}} g, \dot{\vec{r}} \rangle \neq 0 \right)$, что обычно выполняется на практике. Так называемый

“негрубый” случай, когда главная траектория касается поверхности изображения, требует более детального анализа и здесь не рассматривается.

Изложим кратко алгоритм вычисления τ -вариаций. Используя перестановочность операций дифференцирования по времени τ и параметрам ξ^k , из уравнений Лоренца (1) получаем:

$$\ddot{\vec{r}}_k^\tau = -\frac{e}{m} \left\{ \nabla_{\vec{r}} \vec{E} \otimes \vec{r}_k^\tau + \left[\dot{\vec{r}}^\tau, \nabla_{\vec{r}} \vec{B} \otimes \vec{r}_k^\tau \right] + \left[\dot{\vec{r}}_k^\tau, \vec{B} \right] + \vec{F}_k \right\}, \quad (16)$$

где последнее слагаемое в правой части

$$\vec{F}_k = \vec{E}_k + \left[\dot{\vec{r}}^\tau, \vec{B}_k \right] \quad (17)$$

связано с зависимостью электромагнитного поля от вектора ξ .

Компоненты электромагнитного поля (\vec{E}, \vec{B}) и их производные по \vec{r} и ξ вычисляются в (16), (17) на главной траектории $T(\xi_0)$ и являются поэтому известными функциями времени. Уравнения (16) представляют собой неоднородные дифференциальные уравнения относительно τ -вариаций \vec{r}_k^τ . Начальные условия для этих уравнений получаются дифференцированием начальных условий (2) по ξ .

Таким образом, получаем однозначно определенную задачу Коши для τ -вариаций первого порядка. Аналогичные уравнения могут быть легко получены для τ -вариаций более высоких порядков. Применительно к некоторым частным видам симметрии и в предположении стационарности внешних электромагнитных полей эти уравнения приведены в работах [3—7].

Для абберационного описания всего электронного пучка в целом разобьем множество параметров Ξ на совокупность непересекающихся подмножеств θ_i ($i = 1, \dots, n$). В каждом из подмножеств θ_i выделим главное (опорное) значение параметра ξ_{0i} и построим соответствующий элементарный пучок $\pi(\theta_i, \xi_{0i})$. Очевидно, тогда весь электронный пучок $\pi(\Xi)$ может быть представлен в виде объединения элементарных пучков:

$$\pi(\Xi) = \sum_{i=1}^n \pi(\theta_i, \xi_{0i}). \quad (18)$$

Эта простая схема, составляющая, по существу, основу метода главного луча, дает практический способ применения теории аббераций в тех случаях, когда множество параметров Ξ является слишком "большим", и построенным для какой-то одной главной траектории абберационным разложением оказывается невозможно с достаточной точностью описать весь электронный пучок. Выбор необходимого количества подмножеств θ_j и опорных значений параметра ξ_{0j} зависит, разумеется, от специфики конкретной задачи.

Рассмотрим теперь некоторые классы задач, отвечающие различной физической структуре компонент вектора ξ .

Выделим среди компонент вектора ξ такие, которые при фиксированном электромагнитном поле однозначно определяют начальное состояние частицы в момент ее входа в область R , и назовем их начальными параметрами. К начальным параметрам, в конкретных электронно-оптических задачах, могут быть отнесены начальные координаты, компоненты скоростей, энергии, углы и моменты времени входа частиц в область R .

Параметры, которые однозначно определяют конкретный вид внешнего электромагнитного поля $\vec{E}(r, \tau, \xi)$, $\vec{B}(r, \tau, \xi)$ независимо от начального состояния частиц пучка, будем называть полевыми параметрами. Полевыми, в частности, являются геометрические и электрические параметры электродов, магнитных фокусирующих и отклоняющих систем и т. д.

Могут представиться случаи, когда начальное состояние частиц и электромагнитное поле в области формирования пучка зависят от одного и того же параметра ξ . Например, в эмиссионных системах от радиуса кривизны поверхности катода одновременно зависят начальные координаты частиц и распределение электростатического потенциала в прикатодной области. Такие параметры естественно назвать начально-полевыми.

В наиболее содержательных вычислительных задачах электронной оптики (например, в задачах теории допусков или в задачах оптимизации) требуется построение абберационных разложений одновременно по всем трем рассмотренным типам компонент вектора ξ . При этом порядок разложений определяется соображениями необходимой точности, и для разных компонент вектора ξ может быть, разумеется, различным.

Основные преимущества изложенного выше подхода к построению теории аббераций:

метод τ -вариаций позволяет единым образом рассматривать задачи электронной оптики с узкими и широкими пучками. В зависимости от конкретной постановки задачи (т. е. от способа выбора начально-полевых параметров) меняется лишь вид начальных условий для τ -вариаций. Вид самых дифференциальных уравнений для τ -вариаций и формул перехода от τ -вариаций к g -вариациям на поверхности приемника изображения остается при этом неизменным;

метод τ -вариаций не предполагает стационарности электромагнитных полей, формирующих электронный пучок, и применим в самых различных задачах динамической электронной оптики [9];

метод τ -вариаций обладает высокой вычислительной устойчивостью и оказывается весьма эффективным для абберационного расчета электронных зеркал. Это следует из того, что τ -вариации являются регулярными компонентами коэффициентов аббераций и вычисляются отдельно от сингулярных компонент, входящих в формулы перехода к g -вариациям и неограниченно растущих вблизи

точек поворота. Детально асимптотика пространственно-временных абберационных разложений в электронных зеркалах исследована в работе [7].

АБЕРРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ИЗОБРАЖАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКЕ

Рассмотрим на катоде область S , эмитирующего электроны в вакуумный объем электронно-оптической системы, и запишем плотность пространственного заряда $\rho(\vec{r}, \tau)$, образованного пучком $\pi(\theta)$ в произвольной точке пространства $\vec{r}(x, y, z)$ и произвольный момент времени $\tau \geq 0$, в виде

$$\rho(\vec{r}, \tau) = \int J_k(\vec{R}_0, \tau_0) f(\vec{v}_0) \delta_D(\vec{r} - \vec{r}(\tau, \xi)) d\mu(\xi), \quad (19)$$

где $\xi = (\vec{R}_0, \vec{v}_0, \tau_0)$ — вектор начальных параметров, характеризующих, соответственно, начальное положение заряженной частицы в плоскости катода, ее начальную скорость и момент входа в область действия внешнего поля;

$J_k(\vec{R}_0, \tau_0)$ — плотность тока на катоде;

$f(\vec{v}_0)$ — плотность распределения эмиттированных электронов по скоростям;

стиям;

$\vec{r}(\tau, \xi)$ — τ -представление электронного пучка;

δ_D — функция Дирака;

$d\mu(\xi)$ — элементарный объем в пространстве параметров ξ .

Начальную плотность тока представим в виде

$$J_k(\vec{R}_0, \tau_0) = j_0 \Lambda^{(T)}(\tau_0) G^{(S)}(\vec{R}_0), \quad (20)$$

где j_0 — средняя плотность тока из рабочей области S катода за время T электронного импульса, а безмерные функции $\Lambda^{(T)}(\tau_0)$, $G^{(S)}(\vec{R}_0)$ нормированы таким образом, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Lambda^{(T)}(\tau_0) d\tau_0 = \frac{1}{\text{mes}(S)} \int_S G^{(S)}(\vec{R}_0) d^2 \vec{R}_0 = 1. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что величина $Q = j_0 T \text{mes}(S)$ представляет собой полный заряд, эмиттированный областью S за время T . В частности, для импульса бесконечно-малой длительности, сосредоточенного в центре катода, имеем:

$$J_k(\vec{R}_0, \tau_0) = Q \delta_D(\vec{R}_0) \delta_D(\tau_0). \quad (22)$$

В квазистационарном приближении потенциал $\phi(\vec{r}, \tau)$ электрического поля, созданного суммарным действием внешних источников (электродов) и кулоновским взаимодействием частиц пучка, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \left(\vec{r}, \tau \right) \quad (23)$$

с заданными граничными условиями на электродах

$$\varphi|_{\Gamma} = \varphi_0 \left(\vec{r}_p \right), \quad P \in \Gamma. \quad (24)$$

Решение краевой задачи (23), (24) представим в виде суммы

$$\varphi \left(\vec{r}, \tau \right) = \varphi_{st} \left(\vec{r} \right) + \varphi_p \left(\vec{r}, \tau \right) + \varphi^* \left(\vec{r}, \tau \right) \quad (25)$$

трех слагаемых:

1) стационарного внешнего потенциала $\varphi_{st} \left(\vec{r} \right)$, являющегося решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad P \in G \quad (26)$$

с граничными условиями (24);

2) кулоновского потенциала

$$\varphi_p \left(\vec{r}, \tau \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \left(\vec{r}', \tau \right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}' \right|} d^3 r', \quad (27)$$

представляющего собой частное решение уравнения Пуассона (23);

3) зависящего от времени "наведенного" потенциала $\varphi^* \left(\vec{r}, \tau \right)$, удовлетворяющего уравнению Лапласа (26) с граничными условиями

$$\varphi^*|_{\Gamma} = -\varphi_p \left(\vec{r}_p, \tau \right), \quad P \in \Gamma, \quad (28)$$

обусловленными взаимодействием пространственного заряда пучка с поверхностью электродов. Сумму кулоновского и "наведенного" потенциалов $\varphi_p + \varphi^*$ обозначим φ_p^* .

В рассматриваемом приближении движение заряженных частиц происходит в соответствии с уравнением Лоренца

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \left[\nabla_{\vec{r}} \varphi_{st} \left(\vec{r} \right) + \nabla_{\vec{r}} \varphi_p^* \left(\vec{r}, \tau \right) \right] \quad (29)$$

с начальными условиями (2) на поверхности эмиттера.

Совокупность соотношений (19)–(29) определяет нелинейную самосогласованную задачу, решением которой одновременно являются τ -представление

$\vec{r}(\tau, \xi, j_0)$ электронного пучка $\pi(\theta)$ и суммарное распределение потенциала $\varphi \left(\vec{r}, \tau, j_0 \right)$. В общем случае численное решение этой задачи может быть полу-

чено лишь при помощи весьма сложных и громоздких вычислительных процедур, реализация которых затруднительна даже на современных мощных компьютерах.

Следует отметить два важных обстоятельства, принципиально отличающих существо рассматриваемой проблемы от близких (по крайней мере, формально) проблем в теории формирования плотных электронных пучков:

влияние пространственного заряда следует учитывать на уровне той оптической точности, с которой учитывается разброс начальных скоростей заряженных частиц при оценке качества изображения;

собственное кулоновское поле пучка в эмиссионных изображающих системах оказывается на несколько порядков слабее приложенного внешнего поля и поэтому может рассматриваться как возмущение.

Функциональную связь между τ -представлением пучка $\vec{r}(\tau, \xi, j_0)$ и потенциалом $\Phi_p^*(\vec{r}, \tau, \xi)$ представим в операторном виде:

$$\Phi_p^*(\vec{r}, \xi, j_0) = j_0 A_\xi \left[\vec{r}(\tau, \xi, j_0) \right]. \quad (30)$$

Нелинейный оператор A_ξ , представляющий собой интегрирование по пучку области параметров $\{\xi\}$, в каждый момент времени ставит в соответствие распределению заряженных частиц в пространстве $\vec{r}(\tau, \xi, j_0)$ порожденный этим распределением квазистационарный потенциал пространственного заряда $\Phi_p^*(\vec{r}, \xi, j_0)$.

С учетом (30) уравнения движения (29) можно теперь записать в виде функционального уравнения

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \left\{ \nabla_{\vec{r}} \Phi_{st}(\vec{r}) + j_0 \nabla_{\vec{r}} A_\xi \left[\vec{r} \right] \right\}, \quad (31)$$

решением которого является функция $\vec{r}(\tau, \xi, j_0)$, реализующая (при фиксированной плотности тока j_0) самосогласованное τ -представление пучка в области параметров $\{\xi\}$.

Уравнение (31) уже не является обыкновенным дифференциальным уравнением, поскольку слева содержит производные по времени, а справа — оператор A_ξ . Это отражает тот факт, что с учетом пространственного заряда электронный пучок не может быть "смоделирован" из отдельных независимых друг от друга траекторий как в случае, когда кулоновским взаимодействием можно пренебречь, напротив — траектория каждой индивидуальной частицы зависит от всей совокупности траекторий пучка.

Функциональное уравнение (31) с начальными условиями на поверхности эмиттера определяет весь пучок в целом с учетом коллективного взаимодействия между частицами. Уравнения такого типа относятся к классу эволюционных и в настоящее время являются предметом весьма интенсивных исследований. В пределе пренебрежимо малого пространственного заряда ($j_0 \rightarrow 0$) эволюционное уравнение (31) переходит в обычное уравнение Лоренца.

Полагая, что влияние пространственного заряда имеет характер возмущения, будем искать решение начальной задачи для уравнения (31) в виде асимптотического разложения

$$\vec{r}(\tau, \xi, j_0) = \vec{r}^{\vec{0}}(\tau, \xi) + j_0 \vec{r}^{\vec{1}}(\tau, \xi) + \dots, \tag{32}$$

первый член которого является τ -представлением пучка при пренебрежимо малом пространственном заряде, а функция

$$\vec{r}^{\vec{1}}_{j_0}(\tau, \xi) = \left. \frac{\partial \vec{r}(\tau, \xi, j_0)}{\partial j_0} \right|_{j_0 \rightarrow 0, \tau = \text{const}} \tag{33}$$

является τ -вариацией пучка по начальному параметру j_0 .

Подставляя разложение (32) в уравнение (31) и ограничиваясь линейным приближением по j_0 , получим цепочку уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}^{\vec{0}} &= \frac{e}{m} \nabla_{\vec{r}} \varphi_{st} \left[\vec{r}^{\vec{0}} \right]; \\ \ddot{\vec{r}}^{\vec{1}}_{j_0} &= \frac{e}{m} \left\{ \nabla_{\vec{r}} \nabla_{\vec{r}} \varphi_{st} \left[\vec{r}^{\vec{0}} \right] \otimes \vec{r}^{\vec{1}}_{j_0} + \nabla_{\vec{r}} A_{\xi} \left[\vec{r}^{\vec{0}} \right] \right\}; \end{aligned} \tag{34}$$

..... ,
 первое из которых представляет собой уравнение Лоренца без учета пространственного заряда (нулевое приближение), второе — уравнение для τ -вариации первого порядка по параметру j_0 . При этом роль главной траектории играет

невозмущенный пучок $\vec{r}^{\vec{0}}(\tau, \xi)$, который в данном случае естественно также назвать главным. Начальные условия для τ -вариаций пучка по j_0 — нулевые.

Аналогичные уравнения могут быть выписаны и для старших членов абберрационного разложения (32), однако они более громоздки, и поэтому здесь не приводятся.

Таким образом, применение теории возмущений позволяет аппроксимировать начальную задачу для эволюционного уравнения (31) последовательностью начальных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно τ -вариаций по начальной плотности тока.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УШИРЕНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПАКЕТОВ ПОД ВЛИЯНИЕМ СИЛ КУЛОНОВСКОГО РАСТАЛКИВАНИЯ В ПИКОСЕКУНДНОМ ЭОП

Применим изложенную выше общую схему к оценке влияния пространственного заряда на временные характеристики времяанализирующих пикосекундных ЭОП.

Рассмотрим в качестве эмиттера плоскую прямоугольную щель со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 2). Для упрощения дальнейшего анализа предположим, во-первых, что плотность распределения фотоэмиссионного тока по поверхности эмиттера постоянна ($G^{(S)} = 1$) и, во-вторых, что все частицы покидают катод с нулевой

энергией $\left(f\left(\vec{v}_0\right)=\delta_D\left(\vec{v}_0\right)\right)$. Будем также полагать, что внешнее электростатическое поле $\Phi_{st}\left(\vec{r}\right)$ обладает осевой симметрией с заданным осевым потенциалом $\Phi_{st}(Z)$.

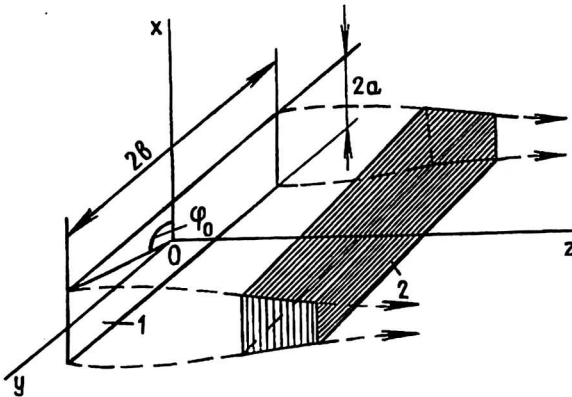


Рис. 2. Вычисление кулоновского поля электронного пакета:
1 — эмиттер в виде щели; 2 — электронный пакет

С учетом сделанных предположений о характере эмиссии, z -компоненту градиента суммарного кулоновского потенциала невозмущенного пучка можно представить в виде свертки:

$$\Phi_{\rho}^{*'}(z, \tau) = -\frac{j_0}{\pi \epsilon_0} \int_0^T \Lambda(T)(\tau_0) Q_{\rho}^{*}[z, z_0(\tau, \tau_0)] d\tau_0, \quad (35)$$

где $z(\tau, \tau_0)$, $\tau \geq \tau_0$ — зависимость от времени z -координаты частицы, эмиттированной в начальный момент τ_0 . Полное выражение для ядра Q_{ρ}^{*} имеется в работе [8].

Чтобы проанализировать в параксиальном приближении динамику уширения электронного пакета под влиянием пространственного заряда, достаточно исследовать z -компоненту $z(\tau, \tau_0, j_0)$ траекторий возмущенного пучка.

Уравнения (34) в рассматриваемом приближении принимают вид:

$$z^{\ddot{0}} = \frac{e}{m} \Phi_{st}'(z^0); \quad (36)$$

$$z_{j_0}^{\ddot{\tau}} = \frac{e}{m} \left\{ \Phi_{st}''[\tau, \tau_0] z_{j_0}^{\tau} = R^0[\tau, \tau_0] \right\}. \quad (37)$$

Начальные условия для уравнений (36), (37) при $\tau = \tau_0$ нулевые. Фигурирующие здесь полевые функции

$$\Phi_{st}''[\tau, \tau_0] = \left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_{st}(z) \right|_{z=z^0(\tau, \tau_0)}; \quad (38)$$

$$R^0[\tau, \tau_0] = \left. \frac{\partial}{\partial j_0} \Phi_{\rho}'(z, \tau, j_0) \right|_{z=z^0(\tau, \tau_0)} = -\frac{1}{\pi \epsilon_0} \int_0^T \Lambda(T)(\tau'_0) Q_{\rho}^{*}[z^0(\tau, \tau_0), z^0(\tau, \tau'_0)] d\tau'_0 \quad (39)$$

вычисляются на главном пучке $z(\tau, \tau_0)$ при $j_0 \rightarrow 0$.

Обозначим $\tau_g(\tau_0, j_0)$ — время прихода возмущенной траектории $z(\tau, \tau_0, j_0)$ на фиксированную плоскость приемника изображения $z = z_g$. В линейном приближении по j_0 имеем:

$$\tau_g(\tau_0, j_0) = \tau_g^0 + \tau_0 + j_0 \left. \frac{\partial \tau_g(\tau_0, j_0)}{\partial j_0} \right|_{j_0 \rightarrow 0}, \quad (40)$$

где τ_g^0 — время пролета до приемника изображения электрона, эмиттированного в момент времени $\tau_0 = 0$, а производная τ_g по j_0 на невозмущенном пучке определяется в соответствии с общим соотношением (15):

$$\tau_{g/j_0}(\tau_0) = \left. \frac{\partial \tau_g(\tau_0, j_0)}{\partial j_0} \right|_{j_0 \rightarrow 0} = - \frac{\sqrt{m} z_{j_0}^{\tau}(\tau_g^0 + \tau_0, \tau_0)}{\sqrt{\Phi_{st}(z_g)}}. \quad (41)$$

Коэффициент $d(\tau_0) \equiv \tau_{g/j_0}(\tau_0)$, характеризующий, в зависимости от начального момента времени $\tau_0 \in [0, T]$, искажение временной шкалы $\tau_g(\tau_0, j_0)$ под влиянием пространственного заряда, назовем d -характеристикой электронного пакета. Временное распределение плотности тока в плоскости приемника изображения с учетом кулоновского взаимодействия частиц в электронном пакете можно представить теперь в виде зависимости от начальной плотности тока:

$$j_g(\tau) = j_0 \wedge^{(T)}[\tau_0(\tau, j_0)] \frac{\partial \tau_0(\tau, j_0)}{\partial \tau}, \quad (42)$$

где $\tau_0(\tau, j_0)$ — функция, обратная к $\tau_g(\tau_0, j_0)$.

В пределе пренебрежимо малых плотностей тока из (42) имеем:

$$j_g(\tau) = j_0 \wedge^{(T)}(\tau - \tau_g^0), \quad (43)$$

что соответствует преобразованию временного импульса из плоскости катода в плоскость приемника изображения без искажений.

Ниже приведены численные результаты, полученные при исследовании эффекта уширения пикосекундных импульсов под действием пространственного заряда в известной электронно-оптической системе ПВ-001, конструкция которой схематически изображена на рис. 3.

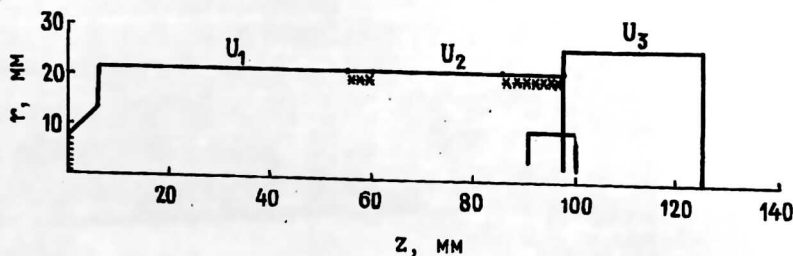


Рис. 3. Конструкция электронно-оптической системы ПВ-001

Электрические и электронно-оптические параметры
в электронно-оптической системе ПВ-001

$U_1, \text{кВ}$	$U_2, \text{кВ}$	$U_3, \text{кВ}$	$z_G, \text{мм}$	$z_{cr}, \text{мм}$	M
3	2,1	15	327	142	-2,01

Расчетные распределения осевого потенциала $\Phi_{st}(z)$ и его производных $\Phi'_{st}(z)$, $\Phi''_{st}(z)$ приведены на рис. 4. Значения основных электронно-оптических параметров первого порядка — положения плоскости Гаусса z_G и электронно-оптического увеличения M указаны в таблице.

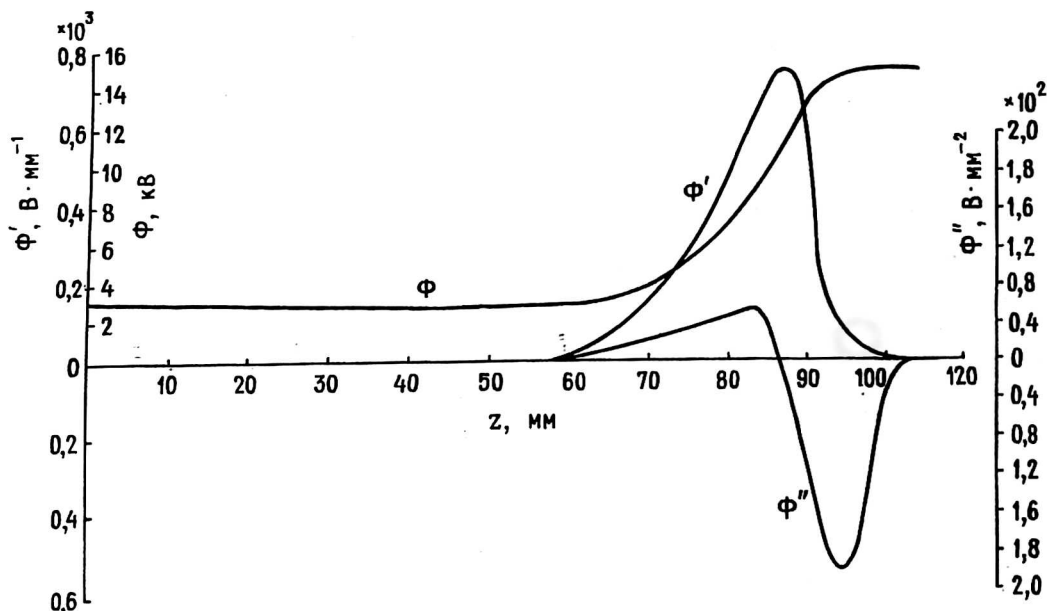


Рис. 4. Расчетные осевые распределения потенциала Φ и его производных Φ' , Φ'' в электронно-оптической системе ПВ-001

На рис. 5 представлена опорная (главная) траектория невозмущенного пучка $z^0(\tau)$, на рис. 6 — предельная параксиальная траектория $w(z)$, определяющая положение кроссовера и электронно-оптическое увеличение.

Численные эксперименты проводились для двух видов начальных импульсов: "прямоугольного"

$$\Lambda^{(T)}(\tau_0) = \begin{cases} 1, & \tau_0 \in [0, T] \\ 0, & \tau_0 \notin [0, T] \end{cases} \quad (44)$$

и "гауссового"

$$\Lambda^{(T)}(\tau_0) = \begin{cases} C \exp\left[-q^2\left(\tau_0 - \frac{T}{2}\right)^2\right], & \tau_0 \in [0, T] \\ 0, & \tau_0 \notin [0, T] \end{cases} \quad (45)$$

Коэффициенты C, q в (45) выбирались из соотношений:

$$C = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \lambda}, \quad q = \frac{2}{T} \sqrt{\ln \lambda}, \quad (46)$$

обеспечивающих возможность "стягивания" гауссового импульса (45) к его середине $\tau_0 = \frac{T}{2}$ при увеличении параметра λ с сохранением условия нормировки (21).

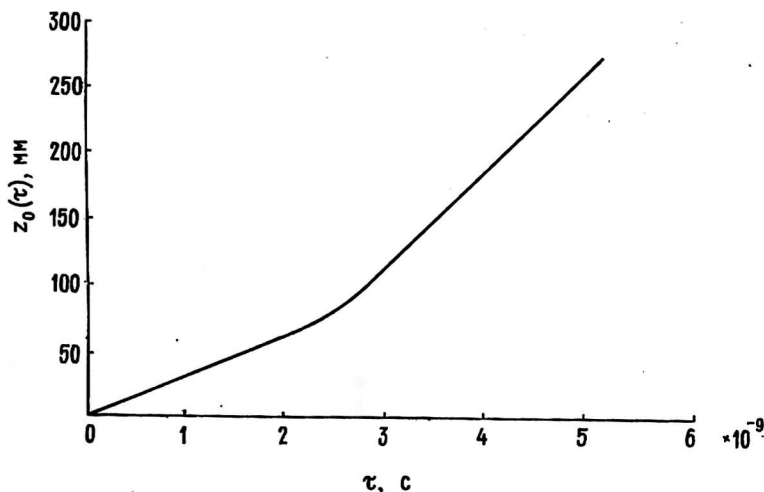


Рис. 5. Опорная траектория $z_0(\tau)$ в электронно-оптической системе ПВ-001

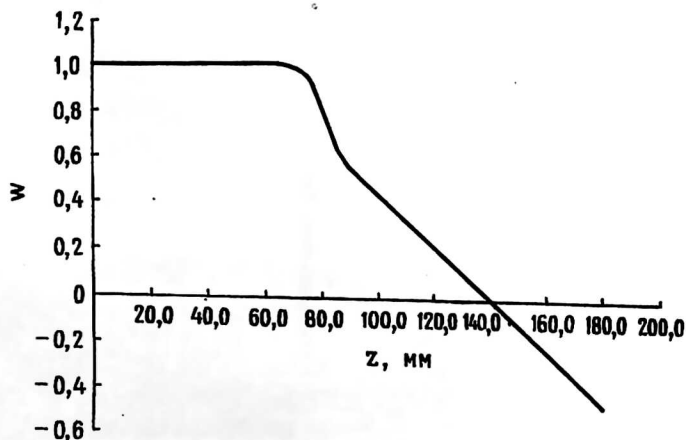


Рис. 6. Траектория $w(z)$ в электронно-оптической системе ПВ-001

Сначала рассмотрим результаты, полученные для импульсов прямоугольной формы.

На рис. 7 приведены "мгновенные фотографии" распределений кулоновского поля $\Phi_p^*(z, \tau)$, полученные для случая, когда электронный пакет находится вблизи плоскости кроссовера. Графики, представленные на рис. 8, отражают

поведение τ -вариаций $z_j^{(\tau)}(\tau, \tau_0)$, построенных для начальных моментов $\tau_0 = 0, \frac{T}{2}, T$ путем численного решения уравнения (37).

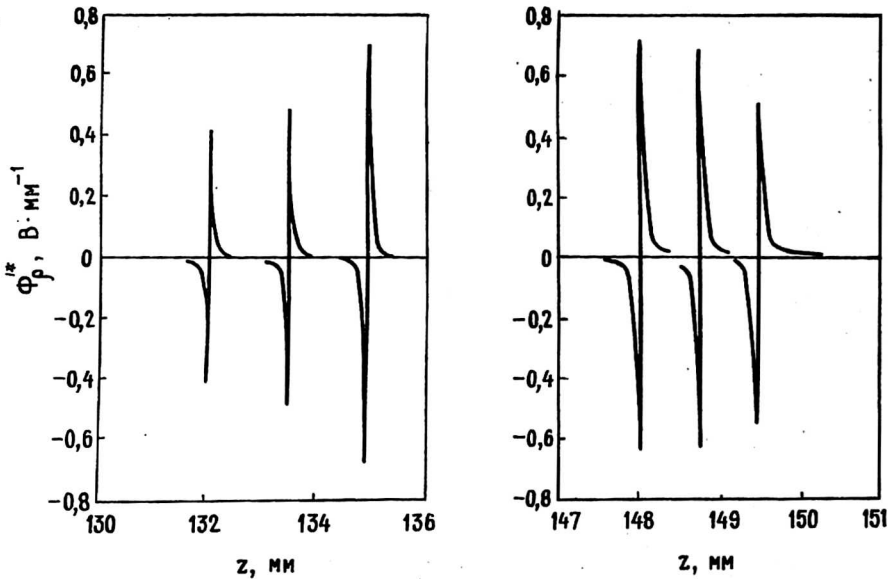


Рис. 7. Мгновенные "фотографии" кулоновского поля электронного импульса прямоугольной формы вблизи плоскости кроссовера:

$T = 1$ пс, $2a = 50$ мкм, $2b = 3,5$ мм, $j_0 = 1$ мА/мм², $z_{cr} = 142$ мм

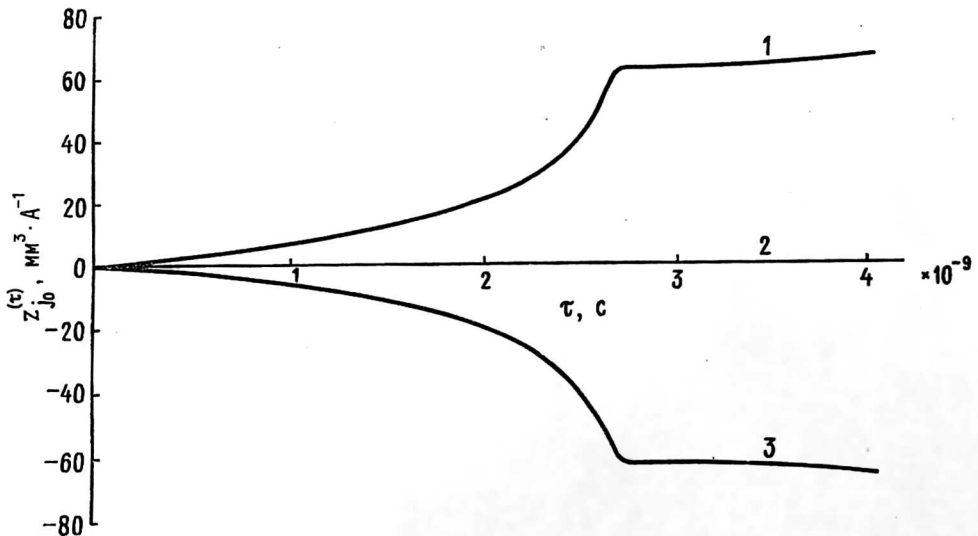


Рис. 8. Графики τ -вариаций $z_j^{(\tau)}(\tau, \tau_0)$ для различных τ_0 :

1 — $\tau_0 = 0$; 2 — $\tau_0 = T/2$; 3 — $\tau_0 = T$

Как и следовало ожидать, кулоновское взаимодействие частиц электронного пакета приводит к ускорению переднего ($\tau_0 = 0$) и замедлению заднего ($\tau_0 = T$) фронтов по отношению к соответствующим фронтам невозмущенного пакета, пространственный заряд которого полагается пренебрежимо малым. Это прояв-

ляется в монотонном росте по абсолютной величине симметрично расположенных τ -вариаций $z_{j_0}^\tau(\tau, 0), z_{j_0}^\tau\left(\tau, \frac{T}{2}\right)$ в области между ускоряющей сеткой и анодной диафрагмой.

Из рис. 8 видно, что внешнее неоднородное ускоряющее поле в окрестности анодной диафрагмы обеспечивает некоторую продольную "подфокусировку" электронного пакета, препятствующую его расплыванию. Отметим, что кулоновские силы, действующие на частицы электронного пакета, эмиттированные в середине импульса при $\tau_0 = \frac{T}{2}$, взаимно компенсируются. Поэтому τ -вариация $z_{j_0}^\tau\left(\tau, \frac{T}{2}\right)$ оказывается практически равной нулю, и на рис. 8 совпадает с осью абсцисс.

На рис. 9 представлены d -характеристики электронных пакетов, порожденных прямоугольными импульсами различной длительности T , построенные в плоскости входа пучка в пространство отклонения. Видно, что d -характеристики нечетны относительно середины импульса $\tau_0 = \frac{T}{2}$, и с уменьшением T до величин порядка 1 пс становятся почти линейными. Из рис. 9 видно также, что полное относительное уширение пакета с уменьшением начальной длительности импульса возрастает. На рис. 10 представлено семейство профилей интенсивности, характеризующих уширение пикосекундного прямоугольного импульса в зависимости от начальной плотности тока j_0 . Некоторое отклонение преобразованных импульсов от прямоугольных обусловлено слабой нелинейностью соответствующих d -характеристик. Для импульсов большей длительности что нелинейное искажение формы оказывается более резко выраженным.

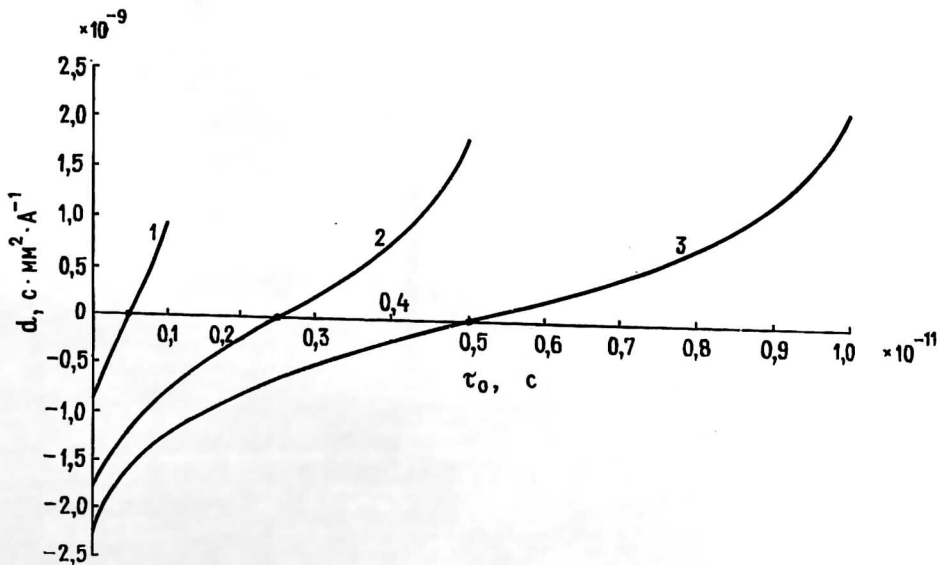


Рис. 9. d -характеристики прямоугольных импульсов различной длительности: 1 — $T = 1$ пс; 2 — $T = 5$ пс; 3 — $T = 10$ пс

Численные эксперименты показывают, что динамика электронных пакетов, обладающих значительными градиентами плотности тока в импульсе, имеет

определенные особенности, которые мы рассмотрим на примере гауссового импульса (45).

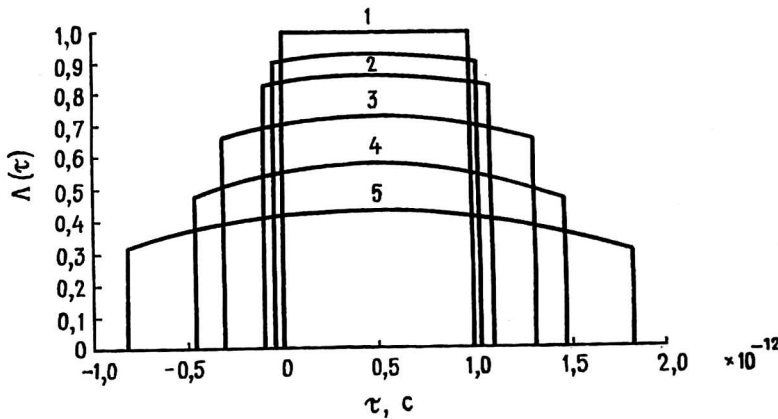


Рис. 10. Кулоновское уширение прямоугольных импульсов:
1 — $j_0 \rightarrow 0$; 2 — $j_0 = 0,1$; 3 — $j_0 = 0,25$; 4 — $j_0 = 0,5$; 5 — $j_0 = 1,0$ мА/мм²

Из рис. 11 видно, что в случае импульса гауссовой формы максимум напряженности локального кулоновского поля достигается внутри электронного пакета, а не на его границе, как это имеет место для рассмотренного выше

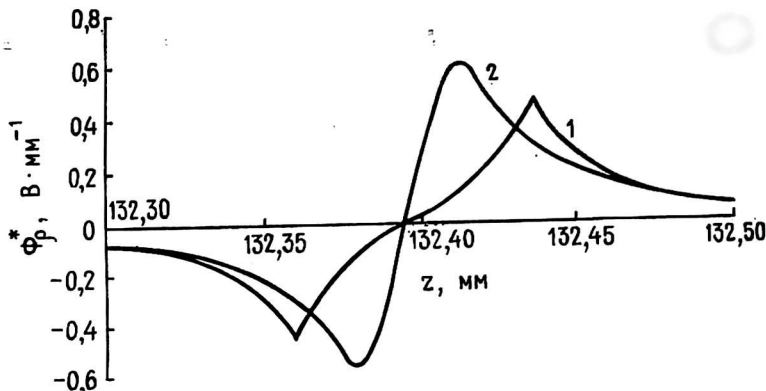


Рис. 11. Кулоновские поля прямоугольного (1) и гауссового (2) импульсов:
 $T = 1$ пс; $\lambda = 10^3$; $\tau = 30$ пс

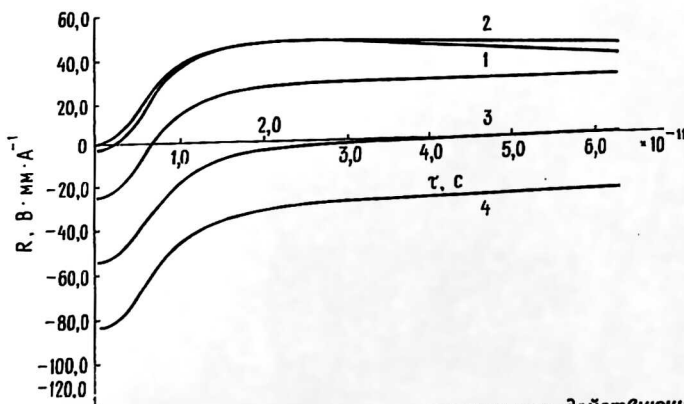


Рис. 12. Распределения во времени кулоновских сил, действующих на индивидуальные частицы пакета:
 $T = 1$ пс; 1 — $\tau_0 = 0$; 2 — $\tau_0 = 0,25$; 3 — $\tau_0 = 0,5$; 4 — $\tau_0 = 0,6$ пс

прямоугольного импульса. Поэтому действие кулоновских сил на частицы, находящиеся на периферии пакета, может оказаться меньшим, чем на частицы, образующие его центральную часть. Это обстоятельство иллюстрирует рис. 12, на котором построены распределения во времени кулоновских сил, действующих на различные индивидуальные частицы пакета. Хорошо видно, что кулоновская сила, действующая на частицу, эмиттированную при $\tau_0 = 0,25$ пс, с течением времени становится больше кулоновской силы, действующей на частицу, эмиттированную при $\tau_0 = 0$. Указанный эффект приводит к появлению двух симметрично расположенных экстремумов на соответствующей d -характеристике (рис. 13).

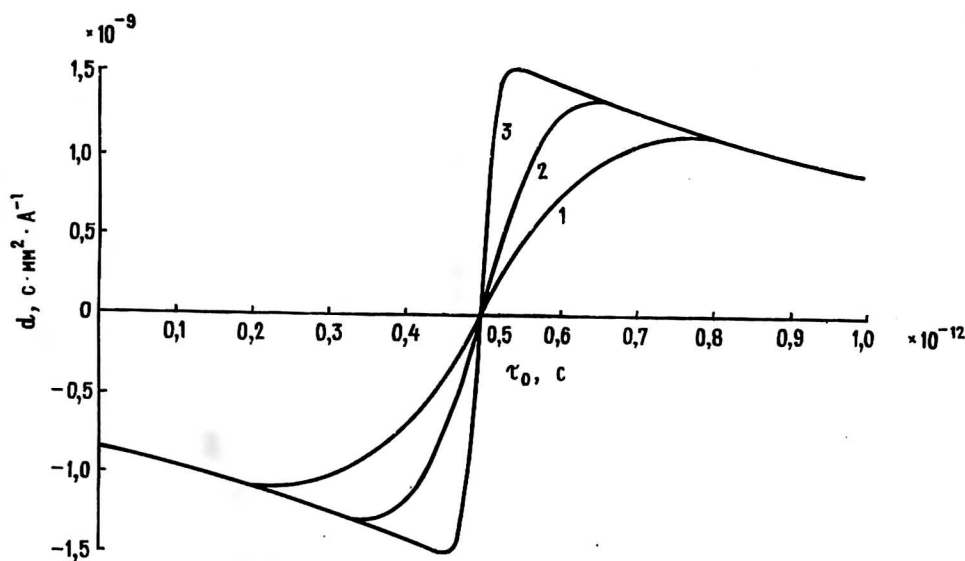


Рис. 13. d -характеристики гауссовых импульсов:
 $T = 1$ пс; 1 — $\lambda = 10^3$; 2 — $\lambda = 10^{12}$; 3 — $\lambda = 10^{48}$

Нетрудно видеть, что при плотностях тока j_0 , не превышающих некоторое критическое значение $j_{0кр}$, преобразование временной шкалы $\tau_0 \rightarrow \tau_g(\tau_0, j_0)$ является монотонным на всем интервале действия начального импульса (рис. 14). Это означает, что для указанных плотностей тока j_0 в результирующем импульсе $j_g(\tau)$ сохраняется тот же порядок прихода индивидуальных частиц на поверхность приемника изображения, что имел место в начальном импульсе.

Для начальных плотностей тока, превышающих критическое значение $j_{0кр}$, такая монотонность нарушается. При движении от эмиттера к приемнику изображения более "поздние", т. е. эмиттированные в более поздние моменты времени частицы в этом случае могут обгонять более "ранние" и, наоборот, что показано на рис. 15, приводит к резкому перераспределению электронной плотности внутри электронного пакета. Аналогичные результаты, указывающие на возможность пространственной дезинтеграции сильно неоднородных электронных пакетов, получены в работе В. П. Быкова и соавторов [10].

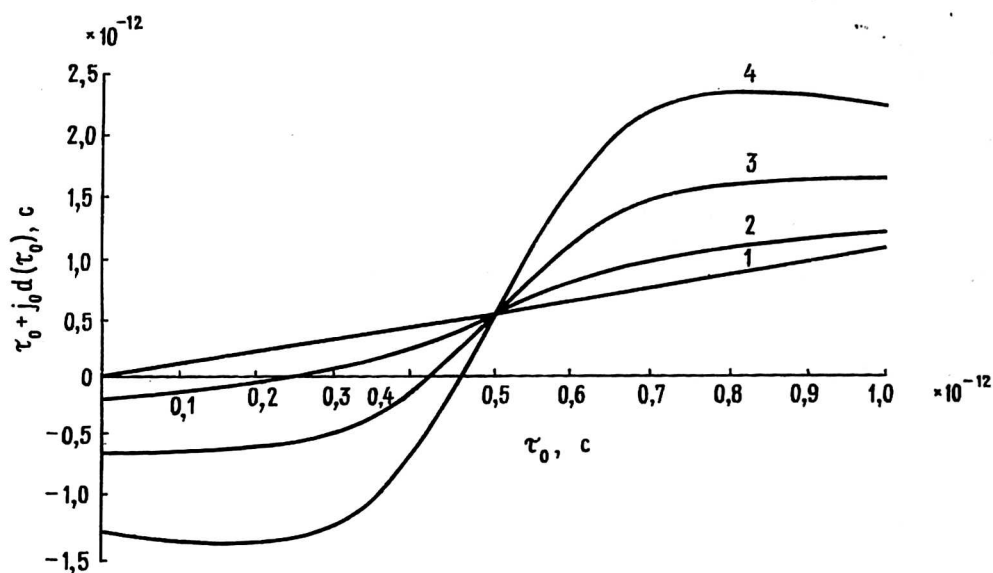


Рис. 14. Преобразование временной шкалы $\tau_0 + j_0 d(\tau_0)$ для различных j_0 :

1 — $j_0 = 10^{-2}$; 2 — $j_0 = 0,25$; 3 — $j_0 = 0,75$; 4 — $j_0 = 1,5$ мА/мм²; постоянное слагаемое τ_0^0 опущено

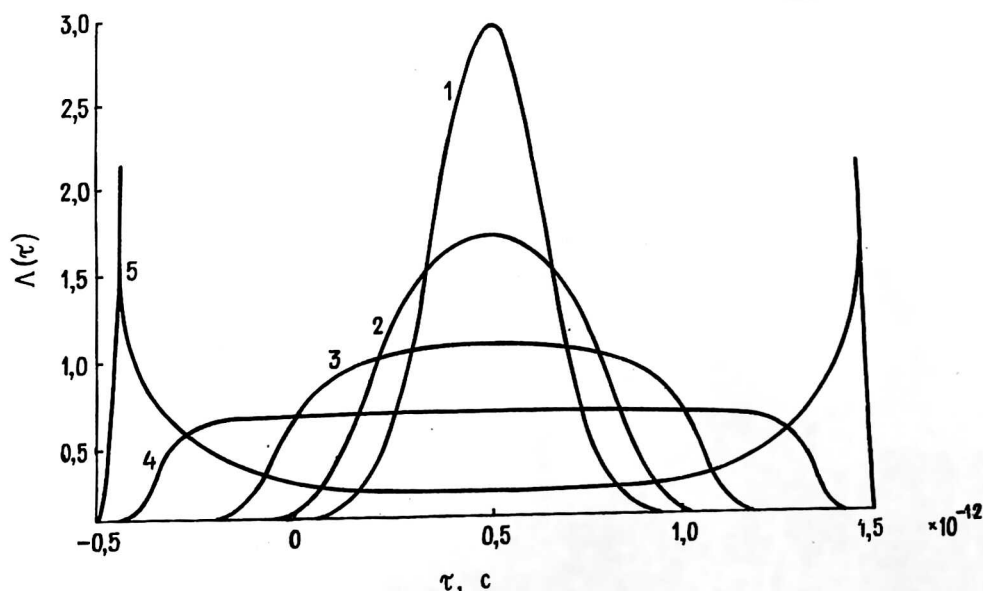


Рис. 15. Кулоновское уширение гауссовых импульсов:

$T = 1$ пс; 1 — $j_0 \rightarrow 0$; 2 — $j_0 = 0,1$; 3 — $j_0 = 0,25$; 4 — $j_0 = 0,5$; 5 — $j_0 = 1,0$ мА/мм²

Литература

1. Реckнагел А. Theorie des elektrischen elektronen Mikroskops fur selbststrahler. — Z. fur angew. Physik, 1941. Bd. 117. S. 689—708.
2. Арцимович Л. А. Электростатические свойства эмиссионных систем. // Изв. АН СССР. Сер. Физ., 1984. Т. 8. № 6. С. 131—329.

3. Ильин В. П., Катешов В. А., Куликов Ю. В., Монастырский М. А. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем. — Новосибирск: Наука, 1987.
4. Монастырский М. А., Щелев М. Я. Теория временных aberrаций катодных линз: Препринт, № 128/ Физический институт им. П. Н. Лебедева, 1980.
5. Монастырский М. А. Принцип максимума Понтрягина в задачах синтеза катодных линз. Ч. 1, 2 // Жур. технической физики. 1986. Т. 56. № 4. С. 625—643.
6. Монастырский М. А., Колесников С. В. Общая теория пространственных и временных aberrаций в катодных линзах со слабо нарушенной осевой симметрией. Ч. 1, 2 // Там же, 1988. Т. 58. № 1. С. 3—19.
7. Монастырский М. А. Исследование aberrаций эмиссионных систем в областях с низким потенциалом // Там же. 1989. Т. 59. № 12. С. 49—56.
8. Monastyrsky M. A., Degtyareva V. P. et al. Computer simulation of Coulomb repulsion effects in picosecond ICT based on aberration theory // Proc. of the Intern. Conf. on Electronic Imaging (San Jose, USA), 1992, SPIE, 1655/19. P. 127—137.
9. Monastyrsky M. A., Degtyareva V. P. Some dynamic problems in streak image tube theory // Proc. of the 4th Intern. Conf. on Charged Particles Optics (CPO4), (Tsukuba, Japan), 1995, NIM. Section A. P. 354—357.
10. Быков В. П., Герасимов А. В., Турин В. О. Кулоновская дезинтеграция слабых электронных потоков и фотоотсчеты // Успехи физических наук, 1995. Т. 165. № 8. С. 955—965.

Компьютерные расчеты данной работы выполнены совместно с В. П. Дегтяревой, которой автор выражает свою искреннюю благодарность.

THE τ -VARIATION TECHNIQUE AND SOME COMPUTATIONAL PROBLEMS IN ELECTRON OPTICS FOR EMISSION DYNAMIC SYSTEMS

M. A. Monastyrsky

General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

General computational scheme of the τ -variation technique intended for derivation of the aberrational expansions for charged particles beams in arbitrary (including nonstationary) electromagnetic fields is presented. In is shown that the τ -variation technique opens up a new versatile way to consider aberrational problems for both narrow and wide beams as well as aberrational problems for electron mirrors.

An aberrational approach based on the τ -variation technique is developed that allows numerical estimation of the space charge effects contribution to image quality. This approach stems from the fact that a sequence of the ordinary differential equations is to be constructed to approximate the initial self-coordinated boundary-value problem under consideration.

Some computational results concerning electron bursts spreading under the Coulomb repulsion effect in a picosecond streak image tube are presented and discussed. It is established that a clearly defined electron density redistribution may be occurred in an electron burst in the case that initial current density exceeds some critical value $(j_0)_{cr}$.