УДК 537:533 PACS: 07.77.Ka

Транспортировка электронного пучка в рассеивающей среде в присутствии магнитного поля

Р. Н. Ризаханов, А. А. Бармин, Р. И. Рудштейн

Получено аналитическое решение параксиального уравнения огибающей электронного пучка (уравнения Ли–Купера), распространяющегося в рассеивающе-тормозящей газовой среде во внешнем магнитном поле. Установлены границы применимости параксиального приближения. Предложен критерий оценки влияния магнитного поля на распространение пучка. Проанализированы частные случаи транспортировки.

Ключевые слова: пучок электронов, транспортировка пучка, магнитное поле.

Ссылка: *Ризаханов Р. Н., Бармин А. А., Рудштейн Р. И.* // Прикладная физика. 2019. № 5. С. 20.
Reference: R. N. Rizakhanov, A. A. Barmin, and R. I. Rudshtein, Prikl. Fiz., No. 5, 20 (2019).

Введение

Закономерности распространения электронного пучка в рассеивающей среде представляют интерес в ряде задач вневакуумных технологий (сварка и резка толстостенных конструкций в воздушной среде, поверхностное упрочнение, локальная наплавка и др.), а также при транспортировке в генераторах электронно-пучковой плазмы. Если в газах форвакуумных давлений (до 10^3 Па) основным процессом, приводящим к уширению пучка, является рассеяние электронов на молекулах газа, то при повышенных давлениях дополнительно включаются механизмы деградации энергии.

В перечисленных выше технологических процессах, в которых электронный пучок используется в качестве концентрированного потока энергии, важным является сохранение его малых поперечных размеров при прохождении в среде. Данное обстоятельство оправдывает применение параксиального приближения для описания транспортировки. Как будет показано далее, даже в весьма плотной среде на начальном участке распространения параксиальное уравнение дает адекватное представление об эволюции пучка.

Снижению расширения способствует наложение внешнего магнитного поля, которое оказывает фокусирующее воздействие и сохраняет остронаправленность пучка, что является важным как для технологии, так и для работы устройства.

Таким образом, существует необходимость исследования транспортировки электронного пучка в газовой среде с учетом следующих факторов: исходной структуры пучка, рассеяния на частицах среды, торможения (или энергетических потерь), наличия однородного магнитного поля, вектор индукции которого направлен вдоль оси цилиндрического пучка. Это и является целью данной работы.

Постановка работы

Структура пучка характеризуется его поперечными размерами (радиусом) и угловым разбросом электронов по отношению к оси и численно определяется эмиттансом [1, 2].

Ризаханов Ражудин Насрединович, нач. отдела, к.ф.-м.н.
Бармин Александр Александрович, в.н.с., к.т.н.
Рудштейн Роман Ильич, н.с., к.ф.-м.н.
Исследовательский Центр им. М. В. Келдыша (ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»).
Россия, 125438, Москва, ул. Онежская, 8.
E-mail: rn_rizakhanov@kerc.msk.ru; nanocentre@kerc.msk.ru; rudshtein@gmail.com

Статья поступила в редакцию 26 июня 2019 г.

Эмиттанс является инвариантом движения при распространении пучка в отсутствие столкновений (т. е. в вакууме). Рассеяние электронов сопровождается увеличением углового разброса и приводит к росту эмиттанса. Для описания этого процесса используется приближение многократного рассеяния. В рамках данного приближения полагается, что рассеяние на заданный угол в результате однократного рассеяния имеет пренебрежимо малую вероятность в сравнении с вероятностью многократного малоуглового отклонения на тот же угол.

Основным механизмом торможения электронов в газе полагаются ионизационные потери. Быстрый электрон передает часть своего импульса атомному электрону, в результате чего последний либо переходит на более высокий энергетический уровень (возбуждение), либо покидает атом (ионизация). Потери электронов из-за тормозного излучения в данной работе не учитываются. Влияние указанного механизма становится заметным при очень высоких энергиях электронов (800 кэВ и более).

Также в данной работе не учитывается собственное электрическое и магнитное поле пучка, поскольку в рассматриваемых диапазонах энергий и полного тока электронов (не более 500 кэВ, не более 0,3 А) они не играют существенной роли.

Параксиальное уравнение огибающей пучка

Уравнение огибающей пучка в параксиальном приближении имеет вид [3, 4]:

$$\frac{d^2r}{dz^2}+\frac{k^2}{\gamma^2\beta^2}r+\frac{1}{\gamma\beta^2}\frac{d\gamma}{dz}\frac{dr}{dz}-\frac{E^2}{\beta^2\gamma^2r^3}=0, \quad (1)$$

с условиями в исходном сечении (например, $z=0$):

$$r(z=0)=r_0, \quad r'(z=0)=0, \quad (2)$$

где β, γ — релятивистские факторы; $\gamma=1+$ $+eU/m_0c^2$, $\beta=\sqrt{\gamma^2-1}/\gamma$; e, m_0 – заряд и масса покоя электрона; c – скорость света в вакууме; U – пройденная электроном разность потенциалов; E – эмиттанс пучка.

В уравнении (1) первый член представляет собой инерциальную составляющую. Второй член учитывает влияние магнитного поля на транспортировку пучка:

$$k=\frac{eB}{2m_0c}, \quad (3)$$

где B – осевая составляющая вектора индукции магнитного поля.

Третий член описывает торможение, приводящее к уменьшению γ:

$$\frac{d\gamma}{dz}=-\frac{QN}{\beta^2}, \quad (4)$$

где в соответствии с [5]:

$$Q=2\pi r_e^2Z\left[\ln\frac{m_0^2c^4(\gamma-1)^2(\gamma+1)}{2I^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{2\gamma-1}{\gamma^2}\ln 2+\frac{\gamma-1}{8\gamma}\right].$$

Здесь r_e – классический радиус электрона, N – концентрация рассеивающих центров, Z – атомный номер рассеивающей частицы, I – средняя работа ионизации.

Анализ выражения в квадратных скобках показывает, что для широкого диапазона параметров процесса (энергии электронов $eU=50\div500$ кэВ, работы ионизации рассеивающих центров $I=15\div60$ эВ) его величина изменяется незначительно в пределах 15÷20 и может рассматриваться как константа.

Последний член в левой части (1) содержит информацию об изменении фазовой структуры пучка в процессе распространения в газовой среде. В работах [3, 6] показано, что в рассеивающей среде эмиттанс меняется по закону:

$$E^2=E_0^2+\int_0^z\gamma^2\beta^2r^2\frac{d\langle\theta^2\rangle}{dz}dz, \quad (5)$$

где E_0 – эмиттанс пучка в исходном сечении $z=0$, $d\langle\theta^2\rangle/dz$ – темп роста среднеквадратического углового разброса пучка.

Исходное среднеквадратичное значение эмиттанса равно

$$E_0^2 = \gamma_0^2 \beta_0^2 r_0^2 \left\langle \theta_0^2 \right\rangle,$$

где r_0^2 и $\left\langle \theta_0^2 \right\rangle$ – среднеквадратичные радиус и угловой разброс пучка, индекс «0» означает, что все значения относятся к сечению $z = 0$.

$$\frac{d\left\langle \theta^2 \right\rangle}{dz} = \frac{DN}{\gamma^2 \beta^4}, \qquad D = 8\pi r_e^2 Z\left(Z+1\right)\ln\frac{60\pi\gamma\beta}{Z^{1/3}}. \tag{6}$$

Здесь также следует отметить слабые отклонения значения логарифмического члена от средней величины, примерно равной 5, при существенных изменениях энергии электронов и атомного номера рассеивающих центров.

Таким образом, система формул и уравнений (1)–(6) позволяет рассчитать огибающую электронного пучка, распространяющегося в рассеивающе-тормозящей среде в однородном магнитном поле.

Условия параксиальности

По мере распространения пучка в рассеивающей среде происходит рост его поперечных размеров и расходимости. Наступает момент, когда применение параксиального приближения становится некорректным и уравнение (1) перестает соблюдаться. Параксиальность нарушается, если хотя бы одна из следующих величин – угол наклона огибающей пучка к оси r' или среднеквадратичный угловой разброс электронов в пучке $\sqrt{\left\langle \theta^2 \right\rangle}$ – перестает быть малой, т. е. если перестает выполняться $r'^2 \ll 1$ или $\left\langle \theta^2 \right\rangle \ll 1$.

Так как в рассеивающей среде важным является последнее ограничение, то можно потребовать условия соблюдения параксиальности в следующем виде:

$$\left\langle \theta_S^2 \right\rangle = 0{,}2, \tag{7}$$

где индекс S указывает, что значение берется на конце участка параксиальности.

Полагая рассеивающую среду однородной и пренебрегая изменениями γ и β, а также логарифмического члена (что допустимо для оценок), можно из (6) определить длину начального участка распространения пучка в газе S, на которой он может считаться параксиальным

$$S = \frac{\gamma_0^2 \beta_0^4 \left\langle \theta_S^2 \right\rangle}{DN}. \tag{8}$$

Полная длина пробега пучка в среде, полученная в [4] путем решения уравнения (4), рассчитывается по формуле

$$L = \frac{\left(\gamma_0 - 1\right)^2}{\gamma_0 QN}. \tag{9}$$

Учитывая $D \approx \left(Z+1\right)Q$, имеем

$$\frac{S}{L} = \frac{\left(\gamma_0 + 1\right)^2}{\gamma_0} \frac{\left\langle \theta_S^2 \right\rangle}{Z+1}. \tag{10}$$

Отсюда следует, что протяженность участка транспортировки пучка в плотной среде, на котором справедливо параксиальное приближение, зависит от энергии электронов и атомного номера рассеивающего вещества. В частности, в водородной среде этот участок составляет 40÷50 %, а в воздухе – 10÷15 % от длины пробега электронов в соответствующем газе.

Рассмотрим, как на этом участке изменяются релятивистские факторы. Интегрирование (4) в предложении неизменности логарифмического члена дает

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = \gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0} - QNz,$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[\gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0} - QNz + \sqrt{\left(\gamma_0 - \frac{1}{\gamma_0}\right)^2 - 2QNz\left(\gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0}\right) + Q^2 N^2 z^2}\,\right].$$

На начальном участке $0 \le z \le S$ данное выражение может быть разложено в ряд, в котором сохраняются первые несколько членов:

$$\gamma=\gamma_0-\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2-1}QNz-\frac{\gamma_0^3}{\left(\gamma_0^2-1\right)^3}\left(QNz\right)^2-$$
$$-\frac{\gamma_0^4\left(\gamma_0^2+1\right)}{\left(\gamma_0^2-1\right)^5}\left(QNz\right)^3. \qquad (11)$$

Подставив сюда $z=S$ из (8), можно понять, сколько членов из ряда можно оставить. Даже при самом неблагоприятном соотношении параметров (например, $\gamma_0=3$, а в качестве газа взят водород с $Z=1$) члены в (11) соотносятся как $3:0,8:0,027:0,0027$, т. е. достаточно сохранения трех членов. Если же взять $\gamma_0=2$, а в качестве газа – азот, то члены будут соотноситься как $2:0,075:0,001:0,00012$, т. е. можно оставить первые два члена для описания огибающей пучка на участке параксиальности.

Зная зависимость (11), можно определить и другие функции, входящие в уравнение (1):

$$\frac{d\gamma}{dz}=-\frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2-1}QN\times$$
$$\times\left[1+\frac{2\gamma_0}{\left(\gamma_0^2-1\right)^2}QNz+\frac{3\gamma_0^2\left(\gamma_0^2+1\right)}{\left(\gamma_0^2-1\right)^4}\left(QNz\right)^2\right],$$

$$\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma_0^2-1}=\left[1-\frac{2\gamma_0^3}{\left(\gamma_0^2-1\right)^2}QNz+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_0^4\left(\gamma_0^2-3\right)}{\left(\gamma_0^2-1\right)^4}\left(QNz\right)^2-\frac{4\gamma_0^5}{\left(\gamma_0^2-1\right)^6}\left(QNz\right)^3\right].$$

Последнее выражение с погрешностью не более процента на участке параксиальности может быть переписано в виде

$$\beta^2\gamma^2=\beta_0^2\gamma_0^2\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^2,\quad \lambda=\frac{\gamma_0\beta_0^4}{QN}, \qquad (12)$$

где λ имеет размерность длины.

Следует отметить, что

$$\frac{S}{\lambda}=\frac{\gamma_0\left\langle\theta_S^2\right\rangle}{Z+1},\quad \frac{\lambda}{L}=\left(\frac{\gamma_0+1}{\gamma_0}\right)^2.$$

Решение уравнения огибающей

Для решения уравнения (1) введем новые переменные:

$$y=r^2,\quad h\left(z\right)=\beta^2\gamma^2. \qquad (13)$$

Дифференцирование (1) в новых переменных и последующее сокращение на y приводит к соотношению:

$$\frac{h}{2}y'''+\frac{3}{4}h'y''+\frac{h''}{4}y'+2k^2y'=\frac{DN}{\beta^2}. \qquad (14)$$

На данное уравнение накладываются начальные условия, вытекающие из (1) и (2):

$$y\left(z=0\right)=y_0=r_0^2,\ \ y'\left(z=0\right)=0,$$
$$y''\left(z=0\right)=\frac{2}{h_0}\left(\frac{E_0^2}{y_0^2}-k^2y_0\right). \qquad (15)$$

Используя (4), а также связь между Q и D, перепишем правую часть (14) в виде

$$\frac{DN}{\beta^2}=-\left(Z+1\right)\frac{d\gamma}{dz}.$$

Заметив, что левая часть (14) является полным дифференциалом, интегрируем с учетом условий (15) и последнего соотношения обе части в пределах от 0 до z:

$$\frac{h}{2}y''+\frac{h'}{4}y'+2k^2y=$$
$$=\left(Z+1\right)\left(\gamma_0-\gamma\right)+\frac{E_0^2}{y_0}+k^2y_0. \qquad (16)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, теория которых представлена в [7].

Фундаментальной системой решения для (16) является

$$y_1=\sin\left(2k\int\frac{dz}{\sqrt{h}}\right),\quad y_2=\cos\left(2k\int\frac{dz}{\sqrt{h}}\right)$$

с вронскианом

$$W=y_1y_2'-y_1'y_2=-\frac{2k}{\sqrt{h}}.$$

Вводя функцию $\alpha(z)=2k\int dz\big/\sqrt{h}$ и обозначив правую часть (16) через $g(z)$, можно записать общее решение в виде

$$y=C_1\sin\alpha+C_2\cos\alpha-\frac{1}{k}\cos\alpha\int\frac{g(z)\sin\alpha dz}{\sqrt{h}}+ \\ +\frac{1}{k}\sin\alpha\int\frac{g(z)\cos\alpha dz}{\sqrt{h}}, \qquad (17)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Для расчета подынтегральных функций с помощью (11) и (12) можно записать

$$g(z)=\frac{(Z+1)\left(\gamma_0^2-1\right)}{\gamma_0}\times\frac{z}{\lambda}\left(1+\frac{z}{\gamma_0^2\lambda}\right)+\frac{E_0^2}{y_0}+k^2y_0,$$

$$\sqrt{h}=\beta\gamma=\sqrt{h_0}\left(1-\frac{z}{\lambda}\right),\quad \text{где } h_0=\beta_0\gamma_0,$$

$$\alpha=2k\int\frac{dz}{\sqrt{h}}=-\frac{2\lambda k}{\sqrt{h_0}}\ln\left(1-\frac{z}{\lambda}\right).$$

При расчете (17) можно воспользоваться интегралами [8]:

$$\int\sin(a\ln x)x^n dx= \\ =\frac{x^{n+1}}{a^2+(n+1)^2}\left[(n+1)\sin(a\ln x)-a\cos(a\ln x)\right],$$

$$\int\cos(a\ln x)x^n dx= \\ =\frac{x^{n+1}}{a^2+(n+1)^2}\left[a\sin(a\ln x)+(n+1)\cos(a\ln x)\right]$$

для $n=-1,0,1,2$.

Введем безразмерный параметр τ:

$$\tau=\frac{\sqrt{h_0}}{2k\lambda}. \qquad (18)$$

Тогда (17) с учетом начальных условий (15) запишется в виде:

$$y=\lambda\tau f_1\sin(\alpha)+\left(\frac{y_0}{2}-\frac{E_0^2}{2k^2y_0}-f_2\right)\cos(\alpha)+ \\ +\frac{y_0}{2}+\frac{E_0^2}{2k^2y_0}+f_2+f_1z+f_3z^2, \qquad (19)$$

где

$$f_1=\frac{2(Z+1)\lambda\tau^2}{\left(1+\tau^2\right)\gamma_0}\left[1+\frac{6\tau^2}{\left(1+4\tau^2\right)\gamma_0^2}\right],$$

$$f_2=\frac{2(Z+1)\lambda^2\tau^4\left[\gamma_0^2-2+4\left(\gamma_0^2+1\right)\tau^2\right]}{\left(1+\tau^2\right)\left(1+4\tau^2\right)\gamma_0^3},$$

$$f_3=\frac{2(Z+1)\tau^2}{\left(1+4\tau^2\right)\gamma_0^3}.$$

Анализ решения

Полученное выражение является решением уравнения (1) на начальном участке распространения пучка $0\le z\le S$, где S определяется из (8), на котором выполняется условие параксиального приближения (7). Здесь сохранены члены, обеспечивающие точность расчетов не хуже 1 %, что представляется приемлемым для практических применений.

Решение (19) приобретает относительно простой вид в двух диаметрально противоположных случаях.

Случай 1. Сильное внешнее магнитное поле, выполняется

$$\tau\ll 1, \qquad (20)$$

что означает, что на характерной длине λ огибающая пучка испытывает много фокусировок.

Отбрасывая в (19) члены, пропорциональные τ^4 и τ^5, запишем решение в переменных r:

$$r^2=r_0^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{E_0^2}{k^2r_0^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+ \\ +\frac{2(Z+1)\lambda\tau^2}{\gamma_0}(\lambda\tau\sin\alpha+z)+\frac{2(Z+1)}{\gamma_0^3}\tau^2z^2. \qquad (21)$$

На рассматриваемом участке $z\ll\lambda$, поэтому последним членом в правой части можно пренебречь в сравнении с предпоследним. Тогда огибающая представляет собой синусоиду, пульсирующую относительно параболы:

$$r^2=r_0^2+\left(\frac{E_0^2}{k^2r_0^2}-r_0^2\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{(Z+1)h_0}{2\gamma_0k^2\lambda}z. \qquad (22)$$

Случай 2. Слабое магнитное поле, т. е.

$$\tau \gg 1. \quad (23)$$

Аргументы тригонометрических функций в (19) становятся малыми, функции можно разложить в ряд и, сохранив члены, пропорциональные τ^{-2}, на участке $0 \le z \le S \ll \lambda$ записать решение в виде

$$r^2 = r_0^2 + \frac{E_0^2}{h_0 r_0^2} z^2 + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{3}\frac{(Z+1)}{\gamma_0} + \frac{E_0^2}{h_0 r_0^2}\right] z^3 + + \frac{r_0^2}{4\tau^2}\frac{z^2}{\lambda^2}\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right). \quad (24)$$

В отсутствие поля $\tau = \infty$ и последний член исчезает.

Проведенный анализ решения (19) демонстрирует правомерность введения критерия фокусировки с помощью параметра τ. Если $\tau \gg 1$, т. е. магнитное поле оказывает слабое влияние на транспортировку пучка, огибающая расширяется по закону $y \sim z^3$. При $\tau \ll 1$ фокусировка доминирует над рассеянием, тогда $y \sim z$; огибающая испытывает пульсации относительно указанной линии, причем амплитуда пульсаций пропорциональна τ^2, а частота – обратно пропорциональна τ. В этом случае рост сечения пучка происходит намного медленнее, также медленно увеличиваются эмиттанс и среднеквадратичный угловой разброс $\langle \theta^2 \rangle$.

Параметр τ может быть выражен через индукцию магнитного поля B и длину пробега электрона в среде L с помощью соотношений (3), (9) и (12)

$$\tau = \frac{\beta_0 \gamma_0 m_0 c}{eB\lambda}. \quad (25)$$

Его можно представить через ларморовский радиус R_L

$$R_L = \frac{\beta_0 \gamma_0 m_0 c}{eB},$$

представляющий собой радиус окружности, по которой будет двигаться в вакууме электрон с импульсом $\beta_0 \gamma_0 m_0 c$ перпендикулярно магнитному полю B:

$$\tau = \frac{R_L}{\lambda} = \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\right)^2 \frac{R_L}{L}. \quad (26)$$

Это означает, что в сильных полях ларморовский радиус существенно меньше пробега электрона в данной среде.

Заключение

Получено аналитическое решение параксиального уравнения огибающей электронного пучка, распространяющегося в рассеивающе-тормозящей газовой среде в однородном магнитном поле. Полученное выражение обеспечивает точность расчетов на уровне 1 %, что является приемлемым при решении практических задач.

Установлены границы применимости параксиального приближения, а именно предложен критерий оценки длины начального участка распространения пучка в газе, на котором он может считаться параксиальным. В частности, показано, что в водородной среде этот участок составляет 40–50 %, а в воздушной – 10–15 % от длины пробега электронов в соответствующем газе.

Предложен критерий оценки влияния магнитного поля на транспортировку пучка в рассеивающей среде. Проанализированы частные случаи транспортировки – в присутствии сильного и слабого магнитного поля, для которых решение параксиального уравнения приобретает относительно простой вид. Показано, что при слабом влиянии магнитного поля на транспортировку пучка ($\tau \gg 1$) огибающая расширяется по закону $y \sim z^3$. При сильном же влиянии магнитного поля ($\tau \ll 1$) фокусировка доминирует над рассеянием, сечение пучка растет существенно медленнее, чем в предыдущем случае, а его огибающая испытывает пульсации относительно линии $y \sim z$ с амплитудой, пропорциональной τ^2, и частотой, обратно пропорциональной τ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лоусон Д.* Физика пучков заряженных частиц. – М.: Мир, 1980.

2. *Молоковский С. И., Сушков А. Д.* Интенсивные электронные и ионные пучки. – М.: Энергоатомиздат, 1991.

3. *Lee E. P., Cooper R. K.* // Particle Accelerators. 1976. No. 7. P. 83.

4. *Ризаханов Р. Н.* // Прикладная физика. 2007. № 1. С. 47.

5. *Эберт Г.* Краткий справочник по физике. – М.: Физматлит, 1963.
6. *Киквидзе Р. Р., Минаев И. М., Рухадзе А. А., Шкварунец А. Г.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. № 5. С. 976.
7. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2001.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. – М.: Наука, 1971.

PACS: 07.77.Ka

Electron beam transportation into scattering medium and external magnetic field

R. N. Rizakhanov, A. A. Barmin, and R. I. Rudshtein

Keldysh Research Center
8 Onezhskaya st., Moscow, 125438, Russia
E-mail: rn_rizakhanov@kerc.msk.ru; nanocentre@kerc.msk.ru; rudshtein@gmail.com

Received June 26, 2019

Analytical solution of electron beam envelope equation in paraxial approximation (Lee-Cooper's equation) for scattering-dissipative gas medium and external magnetic field is obtained. Limits of paraxial approximation applicability are found. Evaluation criterion for magnetic field influence on electron flow behavior is proposed. Particular cases of transportation are analyzed.

Keywords: electron beam, beam transport, magnetic field.

REFERENCES

1. J. D. Lawson, *The physics of charged-particle beams* (Clarendon Press, Oxford; New York, 1977; Mir, Moscow, 1980).
2. S. I. Molokovskij and A. D. Sushkov, *Intense electron and ion beams* (Moscow, Energoatomizdat, 1991) [in Russian].
3. E. P. Lee and R. K. Cooper, Particle Accelerators, No. 7, 83 (1976).
4. R. N. Rizakhanov, Prik. Fiz., No. 1, 47 (2007).
5. G. Ebert, *Physics Quick Reference* (Moscow, Fizmatlit, 1963) [in Russian].
6. R. R. Kikvidze, I. M. Minaev, A. A. Ruhadze, and A. G. Shkvarunets, Fizika plazmy **10** (5), 976 (1984).
7. V. F. Zajtsev and A. D. Polyanin, *Ordinary Differential Equations* (Moscow, Fizmatlit, 2001) [in Russian].
8. I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, sums and products* (Moscow, Nauka, 1971) [in Russian].