

УДК 621.039.624

## **ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАПЕРТОЙ МОДЫ В ТОКАМАКЕ**

**А. П. Попрядухин**

ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований,  
г. Троицк, Россия

*Рассмотрено развитие запертой моды без каких-либо неустойчивостей в результате одновременного воздействия резонансных возмущений магнитного поля и неоднородного охлаждения. Такой механизм объясняет многие явления в разрядах на токамаке.*

Одним из наиболее опасных явлений в разрядах на токамаках являются срывы тока, состоящие в самопроизвольном прерывании полного тока плазмы за короткое время. Делались попытки связать это явление с развитием специфической неустойчивости, отождествить которую с какими-либо известными типами, например с перекрывающимися тиринг-модами, мешала сильная зависимость от поступления примесей со стенок вакуумной камеры.

В 1988 г. в работе [1] было предложено объяснить срыв тока без каких-бы то ни было неустойчивостей. В основу механизма было положено два фактора: статические возмущения магнитного поля и неоднородное тепловое воздействие, порождаемое именно потоками холодных частиц на периферии плазменного шнура.

В 1991 г. появились первые экспериментальные работы [2], в которых была установлена важная роль резонансных возмущений магнитного поля при развитии срыва. Однако в теории явления снова делаются попытки привлечь для его объяснения неустойчивости; на этот раз в нелинейной стадии с учетом статических возмущений.

Приведенный в [1] механизм относится не к самому срыву, который происходит гораздо быстрее, чем это позволяют тепловые процессы и процессы перераспределения токов, а к его предвестнику — запертой моде, впервые описанной в [3]. Явление развития запертой моды выглядит следующим образом. Вращающиеся магнитные острова, представляющие собой развитую тиринг-моду, при введении статического возмущения с той же пространственной структурой начинают тормозиться и при дальнейшем увеличении возмущения останавливаются. Далее размер острова растет, и процесс заканчивается срывом тока. Действительно, происходящее похоже на нелинейную стадию неустойчивости, но большая роль состояния диафрагм и других источников холодных частиц в получении устойчивых по отношению к срывам тока режимов, четко установленная экспериментально, никак не согласуется с теорией неустойчивости.

Срывы тока прекратились, когда на токамаке ТО-2 после неудачных попыток получить несрывающиеся разряды в одном из новых режимов было изменено положение клапана, напускающего рабочий газ, на  $180^\circ$  по большому обходу.

В работе [4] продемонстрировано стабилизирующее влияние магнитных островов на магнитогидродинамическую неустойчивость\*. Существуют режимы, когда неустойчивость стабилизирована островами, а срывы тока не происходят. В образовании запертой моды и последующем срыве тока неустойчивости не играют существенной роли. Предложенный механизм можно относить к режимам без неустойчивости. В режимах торможения вращения островов он относится к явлениям, происходящим после остановки.

#### НЕОДНОРОДНОЕ ТЕПЛОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПЛАЗМЕННЫЙ ШНУР

Начнем рассмотрение неоднородного по малому обходу нагрева (охлаждение рассматривается как нагрев со знаком минус) с идеализированного случая, когда никаких островов нет. Неоднородную составляющую плотности мощности следует представить как винтовую гармонику:  $\tilde{p} = p_m \cos m\theta_n$ , где  $\theta_n = \theta - (n/m)\phi$  — винтовая переменная;  $\theta$  и  $\phi$  — углы по малому и большому обходам соответственно.

Оценки показывают (что видно из дальнейшего), что в нерезонансном случае, когда силовая линия обходит всю магнитную поверхность, неоднородность температуры, связанная с плотностью мощности  $p(\theta_n)$ , получается пренебрежимо малой. Это объясняется тем, что продольная теплопроводность на много порядков превышает поперечную. На резонансной поверхности  $r_s$  силовые линии замыкаются на себя после  $m$  оборотов, и выравнивание неоднородности температуры  $\tilde{T} = T_m \cos m\theta_n$

\* Более четко влияние островов на дрейфово-диссипативную неустойчивость было продемонстрировано на стеллараторе [5].

за счет продольной теплопроводности исключено. Слой, где модуляция температуры заметна, имеет малую толщину, поэтому справедливы следующие упрощения. Во-первых, задачу можно считать плоской (отклонения  $\tilde{r}$  от поверхности  $r_s$  малы,  $\tilde{r} \ll r_s$ ). Во-вторых, радиальная неоднородность плотности мощности на малых расстояниях  $\tilde{r}$  не существенна, и можно считать  $\tilde{p}$  не зависящим от  $\tilde{r}$ . В-третьих, в полоидальном потоке тепла можно учитывать только член, обусловленный продольной теплопроводностью  $\chi_{\parallel}$ , и пренебрегать членом с  $\chi_{\perp}$ . В этих предположениях стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\chi_{\parallel} \left( \frac{1}{2\pi R} \frac{di}{dr} \right)^2 r^2 T_m - \chi_{\perp} \frac{d^2 T_m}{d\tilde{r}^2} = \tilde{p}_m, \quad (1)$$

где  $i$  — угол вращательного преобразования;

$R$  — радиус тора;

$\chi_{\parallel}$ ,  $\chi_{\perp}$  выражены в Вт/(м·эВ),  $p_m$  — в Вт/м<sup>3</sup>. Поясним происхождение члена с  $\chi_{\parallel}$  в этом уравнении. На поверхности  $r_s$  силовая линия замыкается на себя после  $m$  оборотов. На близком расстоянии  $\tilde{r}$  от этой поверхности силовая линия длиной  $2\pi m R$  замыкает точки с разностью температур  $-m \sin m \theta_h T_m (di/dr) \tilde{r}$ . Поток тепла пересекает линию  $\theta_h = \text{const}$  на длине  $2\pi R m$  под малым углом  $(di/dr) \tilde{r} \cdot r_s / (2\pi R m)$ . Далее берется разность потоков при  $\theta_h$  и  $\theta_h + \Delta\theta_h$ , после чего получается вторая производная, которая дает множитель  $-m^2$ .

Введем безразмерные переменные  $r' = \tilde{r} / r_o$ ,  $T' = T_m / T_o$  с помощью масштабов:

$$r_o = r_s \left( \frac{\chi_{\perp}}{\chi_{\parallel}} \right)^{1/4} \left( \frac{2}{9} \right)^{1/2}; \quad T_o = \frac{2 p_m r_s^2}{9 (\chi_{\parallel} \chi_{\perp})^{1/2}}, \quad (2)$$

где  $\vartheta = \frac{r_s^2 df}{R dr}$  — шир;

$\dot{t} = \frac{\dot{t}}{2\pi}$  — число вращения;

$i = 1/q$ ,  $q$  — запас устойчивости;  
 $R$  — большой радиус тора.

В новых переменных уравнение (1) примет вид:

$$r'^2 T' - \frac{d^2 T'}{dr'^2} = 1, \quad (3)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде ряда по четным степеням  $\nu$

$$T' = \sum_{\nu} a_{2\nu} \cdot r'^{2\nu}.$$

Коэффициенты  $a_{2\nu}$  определяются рекуррентными соотношениями:

$$a_{2\nu+4} = \frac{1}{(2\nu+4)(2\nu+3)} a_{2\nu};$$

$$a_0 = 1,311034; \quad a_2 = -0,5; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициент  $a_2$  находится из условия тождественного равенства левой части уравнения (3) единице, а коэффициент  $a_0$  — из асимптотического поведения  $T'$  на бесконечности:  $T' \rightarrow 1/r'^2$ , очевидного из (3). Решение имеет максимум при  $r' = 0$  и спадает при удалении от резонансной поверхности на расстояние  $2 \cdot r_0$  в 3,6 раза. Масштаб  $r_0$  можно выразить из (2) через параметры плазмы

$$r_0 = 7,7 \cdot 10^{-2} r_s \frac{1}{T_e^{3/4}} \left( \frac{n_{19}}{9 \cdot B_0} \right)^{1/2} f_A^{1/4},$$

где  $B_0$  — основное поле, Тл;

$f_A$  — фактор аномальности поперечной электронной теплопроводности;

$n_{19}$  — плотность, выраженная в единицах  $1 \cdot 10^{19} \text{ 1/м}^3$ .

Результатом этого рассмотрения является то, что ширина  $r_0$  для крупных токамаков крайне мала даже при значении фактора аномальности  $f_A = 300$ . При  $r_s = 1 \text{ м}$ ,  $B_0 = 5 \text{ Тл}$ ,  $T_e = 20 \text{ кэВ}$  и  $n_{19} = 30$  получаем  $r_0 = 0,2 \text{ мм}$ . Так как не может быть и речи об островах такого малого размера, можно сделать вывод о неправомерности принятой идеализации.

Примем, что в системе присутствуют острова, вызванные винтовой резонансной гармоникой возмущений магнитного поля. В этом случае они могут захватывать тепло, и винтовая неоднородность температуры продольное теплопроводностью выравниваться не будет. Вне островов силовые линии обходят магнитную поверхность, сводя неоднородность  $\tilde{T}$  в присутствии неоднородной плотности мощности  $\tilde{p}$  к нулю. Таким образом, возникает задача о нагреве полосы источником с постоянной по  $\tilde{r}$  мощностью с нулевыми граничными условиями на краях полосы. Такая задача решается элементарно, температура в слое имеет параболический профиль:

$$T_m = \frac{p_m \Delta^2}{2 \chi_{\perp}} \left( 1 - \frac{\tilde{r}^2}{\Delta^2} \right), \tag{4}$$

где  $\Delta$  — полуширина слоя, определяемая размером островов.

#### ПОВЕДЕНИЕ ОСТРОВОВ ПРИ ТЕПЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

При изменении температуры в острове в нем изменяется проводимость, что приводит к возникновению винтового тока, создающего дополнительное магнитное поле. Рассмотрим качественно характер действия дополнительного поля на острова.

На рис. 1, а показаны сечение плазменного шнура и резонансная поверхность  $r_s$ . Пусть ток плазмы течет в сторону плоскости рисунка, тогда преобразование поворота происходит по часовой стрелке. Для простоты рассуждений примем, что на резонансной поверхности  $\dot{t} = 1$  силовая линия замыкается на себя через один оборот и островов нет. При радиусе, несколько большем  $r_s$ , начальная точка 1 при каждом обороте будет испытывать стробоскопическое смещение против часовой стрелки влево, так как преобразование поворота на большем радиусе меньше. При этом точка 2 будет смещаться также против часовой стрелки вправо. На радиусе, мень-

шем  $r_s$ , преобразование поворота больше и смещение будет происходить по часовой стрелке, как показано на рис. 1. Теперь предположим, что в правой части поверхности  $r_s$  произошло усиление тока, т. е. в этом месте появился дополнительный ток. Его поле будет направлено по часовой стрелке, как и поле тока плазмы. Под действием этого поля точки 1 и 2 будут смещаться вверх. Это смещение в сочетании со стробоскопическим даст движение вдоль жирных кривых на рисунке. Зная конечный результат, легко видеть, что при дальнейшем движении остров получится на левой стороне поверхности  $r_s$ . Если предположить, что на правой стороне резонансной поверхности произошло ослабление тока, что эквивалентно дополнительному отрицательному току, поле которого в точках 1 и 2 направлено вниз, то образующийся остров охватит область с уменьшенным током (см. рис. 1, б).

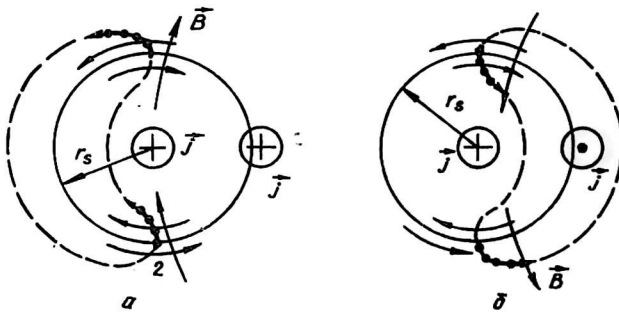


Рис. 1. Смещение изображающих точек под действием стробоскопического сноса (стрелки вдоль поверхности  $r_s$ ) и возмущений магнитного поля

Из рассуждений видно, что если в сечении шнура уже имелись острова, фазовые соотношения таковы, что при уменьшении тока в острове он будет расти, а при увеличении тока — уменьшаться в размере.

Сделаем еще замечание по поводу магнитного поля от тока, протекающего по островам. При не слишком большом их размере ток можно считать поверхностным, тогда при фиксированной плотности тока его поле будет пропорционально ширине островов.

Рассмотрим теперь поведение островов при их охлаждении за счет поступления холодных частиц. Как было показано выше, охлаждение островов вызовет их увеличение, но при увеличившемся размере захват тепла (с отрицательным знаком) согласно формуле (4) улучшится, к тому же при большей ширине и магнитное поле еще увеличится. Это приведет к росту островов и т. д. Каков будет окончательный результат: остановится ли рост островов на некотором размере, большем, чем без охлаждения, или он будет происходить неограниченно? Оказывается, могут реализоваться обе возможности.

**СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ ТЕПЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ**

Динамика процессов в плазменном шнуре при включении нагрева островов, которая будет рассмотрена далее, достаточно сложна, поэтому используется модель, в которой реальная островная структура заменяется полосой  $r_s - \Delta < r < r_s + \Delta$ , в которой проводимость испытала изменение. В данном разделе рассматривается стационарное поле винтовых токов, связанных с модуляцией проводимости. Будем считать, что дополнительные токи имеют структуру одной винтовой гармоники  $m/n$ :

$$\vec{j} = j_m(r) \cdot \cos(m \cdot \theta_h),$$

где  $\theta_h = \theta - \alpha \cdot z$ ;  $\alpha = n / (m \cdot R)$ ;

$z$  — координата вдоль выпрямленной магнитной оси (тороидальность не учитывается).

Радиальную зависимость плотности тока принимаем параболической в соответствии с формулой (4):

$$j_m = j_s \left( 1 - \frac{(r - r_s)^2}{\Delta^2} \right).$$

Скалярный магнитный потенциал поля одной винтовой гармоники дается формулой:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta_h) &= \varepsilon I_m(mar) \cdot \sin(m\theta_h); \\ \psi(r, \theta_h) &= \varepsilon K_m(mar) \cdot \sin(m\theta_h), \end{aligned}$$

где  $I$  и  $K$  — функции Бесселя мнимого аргумента;  
 $\varepsilon$  — амплитуда.

Первая формула дает поле в области внутри цилиндрической токовой поверхности, вторая — во внешней области.

Для не слишком больших  $m \cdot a \cdot r \ll 1$  функции  $I$  и  $K$  могут быть разложены в ряд. Ограничившись одним членом ряда, получим простые формулы для радиальной компоненты магнитного поля  $B_r = \partial\psi / \partial r$

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{2} \mu_0 i_m \left( \frac{r}{r_i} \right)^{m-1} \sin(m \cdot \theta_h), \quad r < r_i; \\ B_r &= \frac{1}{2} \mu_0 i_m \left( \frac{r_i}{r} \right)^{m+1} \sin(m \cdot \theta_h), \quad r > r_i, \end{aligned}$$

где  $r_i$  — радиус токового слоя;

$i_m$  — поверхностный ток.

Далее проведем интегрирование по  $r_i$ , принимая  $di_m = j_m \cdot dr$ . В токовой полосе интеграл разбивается на два — в пределах от  $r_s - \Delta$  до  $r$ , используя вторую формулу (5), и от  $r$  до  $r_s + \Delta$  — первую формулу (5). Приведем результат для гармоники  $m = 2$ :

$$B_r = \frac{2}{3} \mu_0 j_s \Delta f(\rho, \delta); \quad (6)$$

$$f = -\frac{3}{8^3} \left( \left( 2 - \frac{\delta^2}{2} \right) c_1 \ln \frac{1+\delta/2}{c_1} + c_1 \left( \frac{5}{2} + \delta - \frac{\delta^2}{8} \right) + \frac{2}{3} c_1^3 - \right. \\ \left. - \frac{16}{5} c_1^2 + \frac{(1-\delta/2)^2}{3c_1^3} \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\delta + \frac{1}{8}\delta^2 \right) \right), \quad (7)$$

где  $c_1 = \frac{r}{r_s} = 1 + \frac{1}{2}\delta \rho$ ;  $\delta = k \Delta$ ;  $\rho = (r - r_s) / \Delta$ ;  $k = m / r_s$  — волновое число ( $m = 2$ ;  $-1 < \rho < 1$ ).

Вне полосы при  $\rho < -1$  и  $\rho > 1$

$$f = c_1 \left( 1 + \frac{1}{20} \delta^2 + \frac{3}{560} \delta^4 \right); \quad f = \frac{1}{c_1^3} \cdot \left( 1 + \frac{3}{20} \delta^2 \right).$$

В соответствии с изложенным выше качественным рассмотрением в формулу (6) в качестве множителя вошла полуширина слоя  $\Delta$ . Линейная зависимость при  $r = r_s$  несколько ослаблена из-за фактора  $f$  (7) (рис. 2).

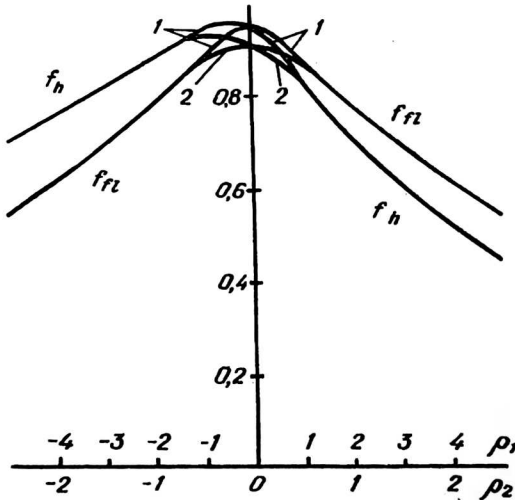


Рис. 2. Профиль магнитного поля вблизи поверхности  $r_s$ :

1 —  $k\Delta_0 = 0,12$ ; 2 —  $k\Delta_0 = 0,24$ ;  $f_{rl}$  — поле в плоском случае;  $f_h$  — винтовое поле

Сравним результат для винтовой гармоники  $m = 2$  с расчетом в плоском случае, который приводится ниже. Ось  $x$  направим вдоль слоя, так что она соответствует дуге окружности радиуса  $r_s$  с азимутальным углом  $\theta$ . Координату вдоль малого радиуса по-прежнему будем обозначать через  $\tilde{r}$ , ток течет вдоль оси  $z$ . В этих координатах  $\vec{j}$  и  $\vec{B}_r$  выразятся так:

$$\vec{j} = \vec{j}_z = j_m(r) \cos kx; \quad \vec{B}_r = B_{mr}(r) \sin kx.$$

Поле  $\vec{B}_r$  можно найти из уравнений Максвелла, которые приводят к дифференциальному уравнению для  $B_{mr}$ :

$$\frac{d^2 B_{mr}}{dr^2} - k^2 B_{mr} = k \mu_0 j_s \left( 1 - \frac{\tilde{r}^2}{\Delta^2} \right).$$

Внутри токовой полосы решение в тех же обозначениях, что и для винтового поля, имеет вид:

$$B_{\text{вр}} = \frac{2}{3} \mu_0 j_s \Delta f(\rho, \delta);$$

$$f = \frac{3}{\delta^3} \left( (1+\delta) e^{-\delta} \text{ch}(\delta \rho) - 1 + \frac{\delta^2}{2} (1-\rho^2) \right). \quad (8)$$

Снаружи полосы

$$f = \frac{3}{\delta^2} (\delta \text{ch} \delta - sh \delta) e^{-\delta \rho}.$$

Поле, вычисленное по формулам (7), (8), показано на рис. 2. Видно, что в пределах токовой полосы величина поля для плоского случая не сильно отличается от величины винтового поля, особенно при не слишком больших  $\delta$ . Это подтверждается формулами, получающимися разложением по  $\delta$  при  $\rho = 0$ :

$$f = 1 - \frac{3}{8} \delta + \frac{1}{10} \delta^2 - \frac{1}{48} \delta^3.$$

Выражение для винтового поля отличается только тем, что в последнем члене стоит  $1/64$  вместо  $1/48$ .

#### РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ОСТРОВОВ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ТЕПЛОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Будем суммировать полученное винтовое поле с полем внешних возмущений  $B_{\text{вр}}$ , тогда для размера острова можно написать:

$$\Delta = 2 r_s \sqrt{\frac{1}{m g B_0} (B_{\text{вр}} + \tilde{B}_r)}. \quad (9)$$

Плотность тока  $\tilde{j}$  в формулах (6), (8) связана с модуляцией температуры  $\tilde{T}$  через проводимость  $\delta$ . При малых  $\tilde{T}/T$

$$\tilde{j} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} j = \frac{3 \tilde{T}}{2 T} j.$$

В формуле (9) вместо статического возмущения  $B_{\text{вр}}$  введем начальный размер острова  $\Delta_0$ , когда модуляция температуры отсутствует. Обозначим отношение  $\Delta/\Delta_0$  через  $y$ , тогда из формул (8), (9) получим:

$$y = \sqrt{1 + P y^3 \delta_0 f(y \delta_0)}. \quad (10)$$

Параметр  $P$  определяется равенством:

$$P = \frac{2}{m^2 g} - \frac{\mu_0 j_{\text{ps}} r_s P_m r_s^2}{B_0 \chi T_{\text{ps}}}. \quad (11)$$

В равенствах (10), (11)  $\delta_0 = k \cdot \Delta_0 = (m / r_s) \cdot \Delta_0$ , индекс  $ps$  относится к току и температуре плазменного шнура на резонансной поверхности  $r_s$ . Параметр  $P$  пропорционален мощности теплового воздействия  $p_m$ , он также зависит от профилей плотности тока и температуры в плазменном шнуре. Более подробное обсуждение его величины приведено ниже, а теперь приведем решение уравнения (10) относительно  $y$ . Простейший способ решения состоит в том, что  $P$  выражается как функция  $y$ , а затем графически или путем интерполяции табличных данных определяется обратная функция  $y(P)$ . Такие графики приведены на рис. 3. Начальный размер острова  $\delta_0$  служит параметром.

При увеличении  $y$  от начального значения  $y = 1$  растет  $P$ , но затем достигает пологого максимума. При нахождении  $y$  по заданному  $P$  видим, что при малых  $P$  отличие  $y$  от единицы невелико, при некотором  $P = P_{кр}$ , зависящем от  $\delta_0$ , решения не существует. Согласно рис. 3 величина  $P_{кр}$  уменьшается при увеличении  $\delta_0$ . При заданном  $P$  найдется такое  $\delta_0 = \delta_{кр}$ , что решения для  $y$  также не будет существовать (рис. 4). Как трактовать такую особенность решений? При увеличении размера острова растет эффективность захвата тепла, что ведет к дополнительному их росту. Если размер острова меньше критического, включение мощности неоднородного нагрева вызывает только некоторый его рост, если же  $\delta_0$  больше критического, рост острова не прекращается. Это и следует трактовать как развитие запертой моды. Подобный характер ее роста будет получен при решении динамической задачи.

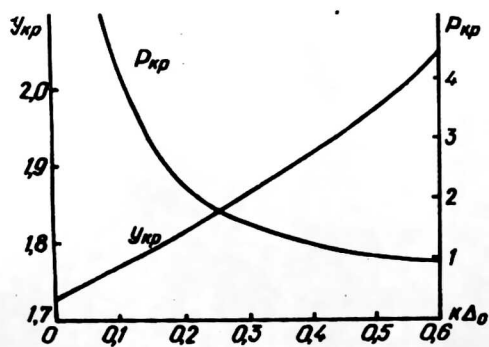
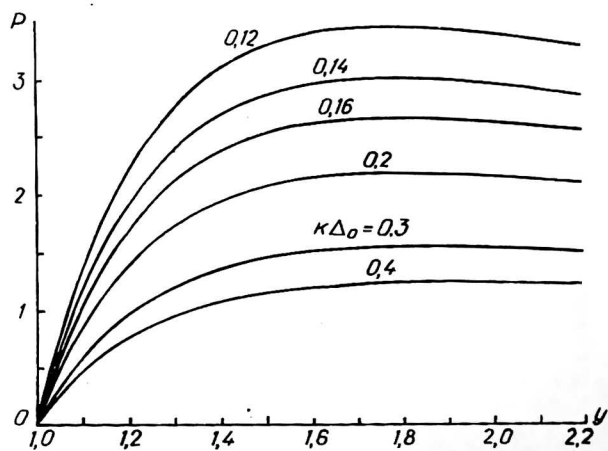


Рис. 3. Параметр  $P$  как функция  $y$  при различных  $k\Delta_0$

Рис. 4. Зависимость  $P_{кр}$  и  $y_{кр}$  от  $k\Delta_0$

Заметим, что  $P$  может быть как положительным, так и отрицательным. При отрицательном  $p_m$  (охлаждение) в токамаке  $P > 0$ , так как шир  $\vartheta < 0$ . В стеллараторе  $\vartheta > 0$  (на рис. 1 следует изменить направление стробоскопического сноса) и в токовом режиме охлаждение островов должно приводить к их уменьшению.

Обсудим также вопрос о применимости модели резонансного слоя. Ограниченность этой модели проявляется в том, что при подстановке поля  $\vec{B}_T$  в формулу (9) неизвестно, для какой точки  $\vec{r}$  его следует брать. Модель оправдывается тем, что это поле, имеющее максимум внутри слоя, несильно

меняется в пределах слоя, особенно при малых  $\delta$  как для цилиндрического, так и плоского случая (см. рис. 2). Более сложное поведение точных решений связано также с тем, что даже при очень тонком слое острова меняют распределение поверхностного тока  $i(\theta_n)$ , и по мере роста островов меняется гармонический состав возбуждаемого винтового магнитного поля, в то время как в модели учитывается только одна гармоника  $m$ . Можно надеяться, что учет тонких эффектов изменения формы островов по мере их роста не сильно изменит полученные результаты.

#### СКИН-ЭФФЕКТ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прежде чем перейти к динамике запертой моды, необходимо привести решение ряда вспомогательных задач, касающихся скин-эффекта, возникающего в плазменном шнуре вблизи резонансной поверхности после включения теплового воздействия. Рассмотрим, каким образом может происходить такое включение.

При локальном охлаждении плазменного шнура большое значение имеют фазовые соотношения. Расположение источника вблизи седловой точки не будет вызывать охлаждения острова. В модели резонансной полосы этот случай эквивалентен нагреву острова. В реальном случае воздействие на остров более эффективно, чем на седловую точку, так как вблизи последней ширина острова мала.

В оптимальном режиме, который подбирается интуитивно, источники охлаждения располагаются именно таким образом. Это объясняет эксперимент по переносу клапана газа на  $180^\circ$  по большому обходу. Немаловажно также расположение островов по отношению к диафрагмам. В процессе плазменного разряда шнур может коснуться другой диафрагмы. Это и будет моментом включения неоднородного нагрева. Другая возможность связана с тем, что суммарное винтовое возмущение может иметь несколько источников с различным временным ходом. Например, ток индуктора меняется совершенно по другому закону, чем ток в управляющих обмотках. Это может приводить к повороту островной системы в процессе разряда, который не следует смешивать с вращением островов тиринг-моды до ее остановки. Если в начале разряда фаза островов была выбрана оптимальной, то в дальнейшем она может стать неблагоприятной, и произойдет включение неоднородного охлаждения.

Закон Ома в магнитной гидродинамике записывается следующим образом:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]).$$

К сожалению, используемая модель не удовлетворяет условиям равновесия плазмы. Если все же попытаться получить скорость плазмы исходя из полученного результата для электрического и магнитного полей, получается  $\vec{v} = 0$ . Поэтому будем использовать закон Ома в простейшей форме.

#### СКИН-ЭФФЕКТ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Аналитическое решение плоской задачи о скин-эффекте получено в следующих случаях: 1 — неограниченная плазма, ступенчатая функция  $\tilde{\sigma}(\vec{r})$ , т. е.  $\tilde{\sigma} = \text{const}$  в пределах полосы  $-\Delta < \vec{r} < \Delta$ ; 2 — неограниченная плазма, параболический профиль  $\tilde{\sigma}$ ; 3 — полубесконечная плазма, ступенчатый профиль.

Из решений первой и третьей задач получается как частный случай решение для  $\tilde{B}_r$  при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Приведем решение для наиболее простой первой задачи, магнитное поле вычислим в пределе  $\Delta \rightarrow 0$ . Внезапно включенное возмущение  $\tilde{\sigma}$  вызывает возмущение плотности тока:

$$\tilde{j}_z = \tilde{\sigma} E_0 + \sigma_s \tilde{E}.$$

Из того, что в первый момент после включения модуляции  $\tilde{\sigma}$  плотность тока не может измениться, следует начальное условие для  $\tilde{E}$ :

$$\tilde{E}_z(0) = -\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_s} E_0 = -E_m \cos kx. \quad (12)$$

Для выбранной в (12) зависимости электрического поля от  $x$  получаются следующие зависимости для компонент  $\tilde{B}_r$  и  $\tilde{B}_x$ :  $\tilde{B}_r = B_{rm} \sin kx$ ,  $B_x = B_{xm} \cos kx$ . Тогда уравнения Максвелла записываются в виде:

$$\frac{\sigma B_{xm}}{\partial r} - k B_r = \mu_0 \sigma_0 \left( E_m + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_0} E_0 \right); \quad (13)$$

$$k \tilde{E}_m = \frac{\partial B_{rm}}{\partial t}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial r} = \frac{\partial B_{xm}}{\partial t}. \quad (15)$$

Второй член (обозначим его через  $E_{me}$ ) в скобках в правой части уравнения (13) представляет собой поле сторонней ЭДС, действующей постоянно после включения в начальный момент, в который оно компенсируется полем  $E_m$ . Уравнение для  $E_m$  получается из (13)–(15):

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial r^2} - k^2 E_m = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial E_m}{\partial t}.$$

Его решение имеет вид:

$$E_{m\lambda} = C_\lambda \cos(kx) e^{-\frac{(k^2 + \lambda^2)t}{\mu_0 \sigma_0}}.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию для  $E_m$ , запишется в виде интеграла Фурье:

$$E_m = -\frac{2}{\pi} E_{me} \int_0^\infty e^{-\frac{(k^2 + \lambda^2)t}{\mu_0 \sigma_0}} \sin(\lambda \Delta) \cos(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (16)$$

После вычисления интеграла найдем:

$$E_m = -\frac{\sigma_m}{\sigma_0} \frac{E_0}{2} \left( \operatorname{erf} \frac{\delta + \rho}{2\sqrt{t'}} + \operatorname{erf} \frac{\delta - \rho}{2\sqrt{t'}} \right),$$

где  $t' = t / \tau$ ,  $1 / \tau = k^2 / (\mu_0 \sigma_0)$ .

Для получения  $B_{tm}$ , согласно (14), проинтегрируем выражение (16) по времени под знаком интеграла и перейдем к пределу  $\Delta \rightarrow 0$ . После интегрирования по  $\lambda$  получим:

$$B_{tm} = \mu_0 \sigma_0 E_{me} \Delta \cdot \left[ e^{-|\rho|} - \frac{e^{\rho}}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{t'} + \frac{\rho}{\sqrt{t'}} \right) \right) - \frac{e^{-\rho}}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{t'} - \frac{\rho}{\sqrt{t'}} \right) \right) \right].$$

Первый член в квадратных скобках дает безразмерное статическое поле тонкого слоя с периодическим током. Так как  $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ , два других члена компенсируют первый при  $t = 0$  и затухают при  $t \rightarrow \infty$ .

Ток определяется полным электрическим полем  $E = E_{me} + E_m$ . Второй член суммы, который имеет физический смысл поля индуктивной противо-ЭДС, равен  $-E_{me}$  при  $t = 0$  и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Для полубесконечной плазмы формулы упрощаются, если начало отсчета выбрать на границе раздела. По-прежнему координата, перпендикулярная к граничной плоскости, обозначается через  $r$ .

Резонансная поверхность располагается при  $r = -a$ . Вне плазмы решение для электрического поля  $E_m$  имеет вид экспоненты  $C_1 \cdot \exp(-kr)$ , оно сшивается с решением при  $r < 0$ .

$$E_m = C \left( \cos \lambda r - \frac{k}{\lambda} \sin \lambda r \right) e^{-(k^2 + \lambda^2)t / (\mu_0 \sigma_0)}$$

из условий непрерывности поля  $E_m$  и его производной. Однако необходима еще процедура ортогонализации и нормировки, в результате проведения которой  $C$  заменяется на Фурье-амплитуду  $C_\lambda$

$$C = C_\lambda \lambda \left[ \pi (k^2 + \lambda^2) \right]^{-1/2}.$$

$C_\lambda$  находится из разложения ступенчатой функции, равной  $-E_{me}$  в полосе  $-a - \Delta < r < -a + \Delta$  и нулю — вне этой полосы.

Дальнейший ход решения повторяет приведенный выше, но формулы оказываются громоздкими. Окончательный результат приведен в приложении.

Аналитические формулы для второй задачи были приведены в работе [1].

Решение для полубесконечной плазмы и параболического профиля  $\tilde{\sigma}$  было получено численно. Резонансная полоса разбивалась на части, в каждой из которых применялись формулы для магнитного поля при  $\Delta \rightarrow 0$ . При суммировании амплитудные множители  $(1 - \rho_1^2)$  задавали параболу. Точность метода проверялась сравнением с нестационарным процессом второй задачи. При шаге суммирования  $\Delta/12$  обеспечивалась точность

не хуже 0,1 %. Полученные решения для профилей  $E_m$ ,  $J_m$ ,  $B_{tm}$  проиллюстрированы на рис. 5.

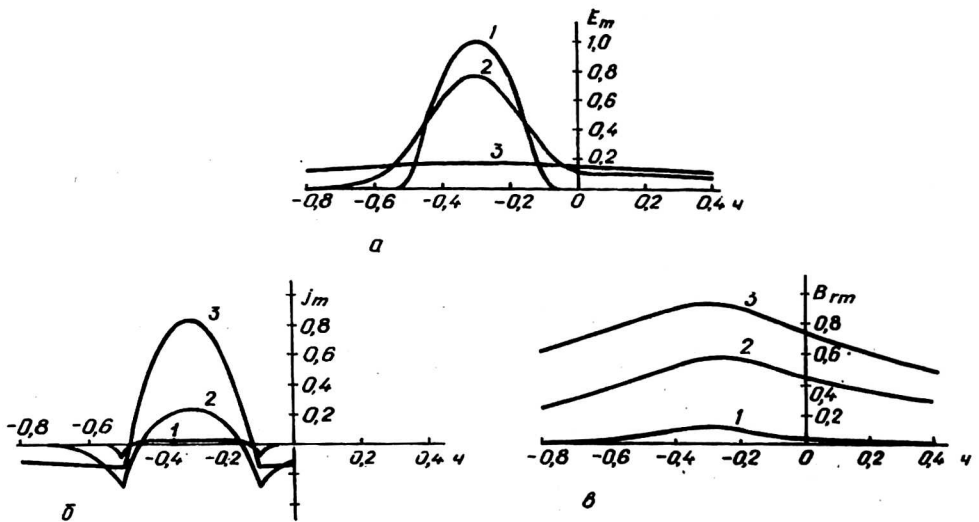


Рис. 5. Электрическое поле (а), плотность тока (б) и магнитное поле (в) при наличии границы плазмы ( $a = 0,3$ ;  $k\Delta = 0,2$ ) в моменты времени: 1 — 0,0002; 2 — 0,005; 3 — 0,2

#### РАСЧЕТ ДИНАМИКИ ЗАПЕРТОЙ МОДЫ

По мере роста поля  $\tilde{B}_T$  после включения теплового воздействия растут размеры островов, а в применяемой модели — ширина резонансной полосы. Таким образом, необходимо решать задачу о скин-эффекте в слое переменной ширины, причем ширина и магнитное поле меняются самосогласованным образом.

Численное решение основано на том, что после включения стороннего электрического поля, амплитуда которого определяется начальной шириной полосы, через промежутки времени  $\Delta t$  производится мгновенное включение новых постоянных во времени сторонних полей, амплитуда  $\Delta E_i$  которых определяется приращением  $\Delta\sigma$  при изменении ширины резонансной полосы за время  $\Delta t$ .

Из формулы (4) получим:

$$T_{m,i} = \frac{P_m}{2\chi} (\Delta_i^2 - \bar{r}^2), \quad T_{m,i-1} = \frac{P_m}{2\chi} (\Delta_{i-1}^2 - \bar{r}^2);$$

$$\Delta T_i = \frac{P_m}{2\chi} (\Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2).$$

Отсюда можно найти амплитуду  $\Delta E_i$ :

$$\Delta E_{m,i} = \frac{3 P_m E_0}{4 \chi T} (\Delta_i^2 - \Delta_{i-1}^2).$$

Из последней формулы видно, что поле  $\Delta E_{m,i}$  не зависит от  $\tilde{r}$ , значит при расчете магнитного поля, возбуждаемого этим сторонним полем, нужно пользоваться решением третьей задачи. Поле  $B_{m}$  зависит от координаты  $\rho$ , времени  $i$ , как от параметра, от  $k\Delta$ , поэтому полное поле определится суммой (будем принимать  $\tilde{r} = 0$ )

$$B_{m}(t_i, \Delta_i) = B_{m}(t_i, \Delta_0) + \sum_{j=0}^i \Delta B_j(\tau_{ij}, \Delta_j). \quad (17)$$

Время действия  $j$ -составляющей  $\tau_{ij} = t_i - t_j$  тем меньше, чем позднее включилась  $j$ -ЭДС, фактически сумма в (17) есть численное представление интеграла Дюамеля. Поле перед знаком суммы в (17) — это поле параболически распределенного тока при начальной полуширине  $\Delta_0$ .

Как и ранее, будем связывать ширину резонансной полосы с полем  $\tilde{B}_r$  формулой с радикалом (9). Далее, переходя к безразмерным параметрам  $y_i$ ,  $P$ ,  $\delta_0$  ( $\delta_0 = k\Delta_0$ ) получим:

$$y_{i+1} = \sqrt{1 + P\delta_0 \left[ f(t_i, \delta_0) + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^i (y_j^2 - y_{j-1}^2) y_j f_{st}(t_i - t_j, \delta_0, y_j) \right]} \quad (18)$$

Происхождение множителя  $3/2$  перед знаком суммы таково. В формулах (6), (8) множитель  $2/3$  был введен для того, чтобы функция  $f(\delta)$  в пределе  $\delta \rightarrow 0$  стремилась к единице; он вошел также в параметр  $P$ . Безразмерная функция  $f_{st} \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow 0$  без дополнительного множителя. Эта разница и компенсируется в формуле (18). Введение индекса  $j + 1$  в левой части формулы (18) позволяет свести ее к рекуррентному соотношению. Вычислительный процесс становится вполне определенным, если принять естественное условие  $y_0 = 1$ , а в приращении  $y_1$  учитывать только первый член в квадратных скобках.

На рис. 6 показаны примеры развития процесса при фиксированном  $\delta_0$  и различных  $P$ . При малых  $P$  кривые асимптотически приближаются к предельному значению  $y_\infty$ . Хорошей проверкой правильности вычислительного процесса является сопоставление  $y_\infty$  со статическим значением, вычисленным из уравнения (10) и приведенным на графике рис. 3. Имеет место точное совпадение. Если при динамическом расчете взять  $P > P_{кр}$  согласно рис. 4, то ширина  $\Delta = y \Delta_0$  действительно неограниченно растет. Момент, когда вторая производная  $y''_{tt}$  становится положительной, видимо, следует считать началом развития запертой моды. Отметим, что практически переход через  $P_{кр}$  может быть расплывчатым, так как при увеличении  $y$  острок может коснуться стенки или диафрагмы до перехода через точку перегиба кривой  $y(t)$ .

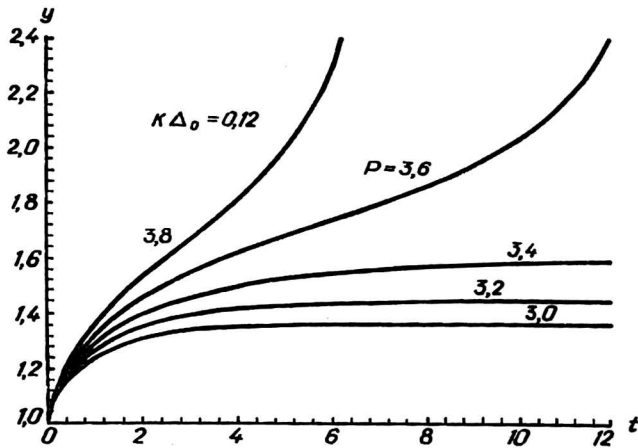


Рис. 6. Развитие запертой моды при  $k\Delta_0 = 0,12$  в различных значениях  $P$

#### ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОГО РАЗМЕРА ОСТРОВОВ И УРОВНЯ МОЩНОСТИ ОХЛАЖДЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Переход к неограниченному росту островов, кроме их начального размера, определяется параметром  $P$  (11), зависящим прежде всего от уровня плотности мощности охлаждения. Другие параметры, входящие в  $P$ , не являются независимыми, например, плотность тока разряда на резонансной поверхности  $j_{ps}$ , шир  $\vartheta$  и основное магнитное поле  $B_0$ . Эти три параметра можно связать, задавшись профилем плотности тока и значением  $q = m/n$  на поверхности  $r_s$ . Будем также задаваться профилем температуры электронов.

Расчеты приведем для плазменного шнура круглого сечения без учета тороидальности. Если предположить, что поперечная теплопроводность и плотность мощности нагрева постоянны по сечению плазменного шнура, то для профиля температуры получим выражение:

$$T = \frac{P_0 a^2}{4\chi} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

с помощью которого можно исключить  $\chi$  в формуле (11).

Выберем профили температуры и плотности тока в форме:

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{n_T}; \quad j = j_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{n_j} \quad (19)$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем выражение для  $P$ :

$$P = \frac{16}{m^2} \frac{\bar{p}}{p_0} f_j f_T.$$

Для приведенных распределений (19) произведение форм-факторов выражается формулой:

$$f_j f_T = \frac{1}{2} \frac{\frac{r_s^2}{a^2} \left(1 - \frac{r_s^2}{a^2}\right)^{n_j - n_T} (n_j + 1)}{1 - \left(1 - \frac{r_s^2}{a^2}\right)^{n_j} \left(1 + n_j \frac{r_s^2}{a^2}\right)}$$

При  $n_j = n_T = 1$   $F = f_j f_T = 1$ . В таблице приведены некоторые значения общего форм-фактора  $F$ .

$\frac{r_s}{a}$	Значения общего форм-фактора при различных значениях $n_j$ и $n_T$					
	$n_j = 0,6$ $n_T = 1,6$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
0,7	2,77	2,16	1,72	1,40	1,14	0,95
0,8	3,64	2,70	2,05	1,58	1,23	0,96
0,9	6,12	4,13	2,84	1,98	1,39	0,99

Из таблицы видно, что при обостренном профиле температуры и уплотненном профиле плотности тока на краю плазменного шнура фактор  $F$  может превышать 3. Критический режим, показанный на рис. 6, соответствует параметрам  $F = 3,64$ ,  $m = 2$  при  $p/p = 1/4$ . При этих параметрах охлаждение плазмы в острове  $T/T_s$  составляет 2,4 % в к. и в 4 раза меньшую величину — в начале процесса. Малая величина этого отношения оправдывает применение принципа суперпозиции.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие запертой моды часто предшествует срыву тока и представляет поэтому большую опасность в токамаках. Отсутствие срывов тока в токовом режиме стелларатора при умеренных токах в рамках рассмотренного механизма легко связать с положительным знаком шира. В этом случае охлаждение островов приводит к их уменьшению и не представляет опасности. При больших токах знак шира может измениться, и срывы тока возможны.

Можно также отметить различие ко- и контринжекции нейтральных пучков. В первом случае, попадая в остров, что более вероятно, чем в седловую точку, пучок увеличивает ток в острове, и последний уменьшается. Во втором случае более вероятно ослабление тока, поэтому срывы тока возможны.

Существенным для подтверждения приведенного механизма является объяснение влияния очистки диафрагм и стенок камеры. Попадание примесей в остров может снизить проводимость и без промежуточного этапа охлаждения.

Критическое возмущение магнитного поля, полученное в теории нелинейной неустойчивости [6], зависит от размеров токамака. При реакторных размерах требуемая точность становится недостижимой. Приведенные результаты не подтверждают такой закономерности.

Необходимость компенсации резонансных возмущений была впервые высказана в работе [1]. В настоящее время начались эксперименты по такой компенсации [2]. Из данной работы вытекают специфические методы борьбы со срывами тока. После проведения компенсации необходимо вновь ввести возмущения только в систему продольного поля, чтобы острова, подавив тиринг-неустойчивость, не поворачивались. Их размер не должен слишком ухудшать удержание плазмы. Диафрагмы, клапаны подачи газа и другие источники охлаждения нужно сфазировать с седловыми точками. Антенны ВЧ-нагрева, входные патрубки нагревающих нейтральных пучков, наоборот, нужно расположить против статических островов. Эти меры исключают срывы тока.

Наиболее перспективным представляется применение компенсации важнейших гармоник с их стабилизацией обратными связями. Прецизионное поле может снизить мощность усилителей обратных связей на несколько порядков.

### Литература

1. Попрядухин А. П. Прецизионный токамак//Препринт/МИФИ, 038—88, 1988.
2. La Haye R. F., Hyatt A. W., Scoville J. T.//General Atomic Preprint, GA-A20824, 1992.
3. Schueller F. C., Alladio P., Campbell, D., Crisanti F. et al.//12-th European Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys.- Budapest, 9F, part 1, 1985, 151.
4. Karger F. et al. 8-th European Conf. on Contr. Fusion and plasma Phys.- Prague, 1977. V. 1. P. 3.
5. Ивановский М. А., Попов С. Н., Попрядухин А. П., Рабинович М. С. Plasma Phys. and Controlled nuclear fusion research//Proc. 4-th Intern. conf. — Medison, Vienna, 1971. V. 3. P. 63.
6. La Haye R. F., Groebner R. J., Hyatt A. W., Scoville J. T.//General Atomic Preprint, Ga-A20782, 1992.

Работа выполнена при поддержке  
Американского Физического Общества

Статья поступила в редакцию 23 июня 1995 г.

## THE DYNAMIC MODEL OF THE LOCKED MODE IN TOKAMAKS

A. P. Popryaduchin

RRS RF Troitsk Institute of Innovatory and Thermonuclear investigations, Troitsk, Russia

*Increase of the locked mode is considered without any instability. It is driven by the magnetic field resonant perturbations and inhomogeneous cooling simultaneously. Such mechanism gives explanations of many phenomena in tokamak discharges.*