

УДК 536.3
EDN: AGJQQE

PACS: 44.40.+a, 42.68Ay, 42.72.g

**Расчет спектральной плотности излучения чёрных (серых) тел
и субволновых частиц**© А. Н. Свиридов^{1,*}, Л. Д. Сагинов¹, Р. З. Хафизов²¹ Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, 109428 Россия

*E-mail: sviridoly@yandex.ru

² АО «ОКБ «АСТРОН», Московская обл., г. Лыткарино, 140080 Россия

Статья поступила в редакцию 25.04.2025; после доработки 20.05.2025; принята к публикации 11.08.2025

Шифр научной специальности: 1.3.14

Предложена новая методика расчетов спектральных мощностей излучения субволновых частиц, в которой расчеты выполняются с использованием зависимости добротности электрически малых радиоантенн (ESA) от их относительных (по отношению к длине излучаемой волны) размеров. Получена формула для расчета спектральной плотности излучения абсолютно чёрных (серых) тел и субволновых частиц, а также соотношение для расчетов мощности, излучаемой в одной пространственно-спектральной моде чёрных (серых) тел и субволновых частиц. Приведены новые варианты представления спектральных зависимостей по формулам Планка и Стефана-Больцмана.

Ключевые слова: закон Планка; пространственно-спектральная мода; субволновая частица; электрически малая антенна (ESA); Нормальная мода; Радианная сфера; Радианная мода; Радианный излучатель; добротность; ближнее поле; дальнее поле.

DOI: 10.51368/1996-0948-2025-4-5-15

Введение

Известно [1–8], что законы Планка и Стефана-Больцмана, хорошо описывающие тепловое излучение тел, нельзя применять в случаях, когда размеры тел становятся меньше λ_{\max}^1 . Такие тела (далее будем называть их субволновыми частицами – СЧ) нельзя считать черными или серыми излучателями. Их излучательные способности и спектральный состав излучения зависят не только от материала тел, но и от их размеров и формы. Известно несколько методов расчета тепловых излучений СЧ [1–8]. Однако, несмотря на наличие различных методик расчетов излуче-

ний частиц, нельзя полагать, что эта задача в достаточной мере решена. В этой связи проблема разработки новых методик расчетов излучений СЧ остается актуальной. Аналогичные проблемы возникают и в радиодиапазоне [9–16] при рассмотрении природы и математическом описании процессов излучения объектов с размерами меньше излучаемых (принимаемых) длин волн. Разработчики приемопередающих модулей для мобильной связи, приёмников спутниковых навигационных систем и других устройств микроэлектроники стремятся уменьшить их размеры не только в абсолютном выражении, но и относительно длин волн, которые они излучают или принимают. Поэтому вопрос о пределе уменьшения размеров объектов по отношению к излучаемым или принимаемым длинам волн имеет большое научное и практическое значение.

¹ λ_{\max} – длина волны, соответствующая максимальной интенсивности излучения черного (серого) тела, нагретого до температуры T .

Обоснование методики расчетов

В области радиотехники ещё в 40-х годах прошлого века предпринимались попытки решения этой проблемы. В 1947 и 1959 годах Н. А. Wheeler опубликовал статьи [9, 10], в которых дал определение электрически малых антенн (*Electric Small Antenna, ESA*). *ESA* – это антенны, для которых справедливо следующее соотношение:

$$K \times \alpha < 1 \quad (1)$$

где $K = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора, α – радиус *Антенной сферы (Antenna Sphere, AS)*, охватывающей максимальный размер дипольной антенны (или радиус соответствующей полусферы для случая монополя). В этом случае для *ESA* справедливо следующее соотношение ($D = 2\alpha$):

$$(\pi \times D)/\lambda < 1. \quad (2)$$

В [10] было введено понятие *Радианной сферы (Radian Sphere, RS)*, которое широко используется в теории антенн. Поверхность этой сферы часто интерпретируется как эталонная граница между ближним и дальним полями, создаваемыми излучающей *ESA*. На рис. 1 схематически показана дипольная *ESA* [10, 11], заключенная в воображаемую *RS* с диаметром $D_r = \lambda/\pi$, внутри которой находится воображаемая *AS* с диаметром $D = 2\alpha$, охватывающая максимальный размер реальной дипольной антенны. Поверхность *RS* является границей ближнего поля, создаваемого *ESA*. В объеме между сферами сосредоточена колебательная энергия электрических и (или) магнитных полей, возбуждаемых *ESA*, т. е. реактивная энергия, не распространяющаяся в дальнюю зону. Нераспространяющиеся волны² – это волны, у которых одна компонента волнового вектора является мнимой. В дальней зоне эти компоненты ближнего поля отсутствуют. В то же время возбуждаемые в объеме между сферами *TEM* (поперечные электромагнитные) волны свободно распространяются в дальней зоне за пределами *RS* и образуют поток электромагнитной энергии, излучаемый антенной.

² В оптике нераспространяющиеся в дальнюю зону ЭМ волны теплового излучения, называют эванесцентными волнами.

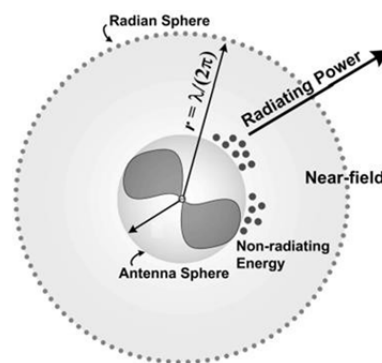


Рис. 1. Дипольная *ESA*, заключенная в воображаемую радианную сферу

Таким образом, можно считать, что *AS* сама непосредственно не излучает ЭМ энергию в дальнюю зону (в свободное пространство). Антенна нужна для создания электрического и магнитного полей в непосредственной близости от неё. А эти поля уже служат источниками излучения, в них зарождаются *TEM* электромагнитные волны, которые затем распространяются в окружающей среде. Действительно, создаваемые *ESA* высокочастотные потенциалы противоположной полярности в плечах диполя, приводят к тому, что в окружающей диполь среде возбуждаются переменные электрические и магнитные поля. Их интенсивность (напряжённость) быстро убывает по мере удаления от границ *AS* и за пределами *RS*³ этих полей уже нет. Пространство вокруг *AS*, ограниченное *RS*, называют «ближней зоной». Колебания электрического и магнитного полей ближней зоны сдвинуты по фазе друг относительно друга на угол близкий к 90°. Таким образом, для источника, питающего антенну, ближняя зона представляет собой преимущественно реактивную нагрузку, эквивалентную по своим свойствам высокодобротному колебательному *LC* контуру. Отметим еще раз, что в свободное про-

³ Развивая эти соображения, можно представить *RS* в виде согласующего устройства между источником колебаний и внешней средой. Его входное сопротивление равно входному сопротивлению антенны в точке питания от источника колебаний, а выходное равно волновому сопротивлению среды (для вакуума это 377 Ом). Для электрических диполей очень малых размеров (например, атомов) выходное сопротивление может на много порядков быть больше волнового сопротивления вакуума [17]. В результате чего энергия кванта на возбужденном уровне излучается «заторможено», т. е. за много периодов колебаний.

странство излучают поля ближней зоны, которые создаёт *ESA*. С помощью антенны источник колебаний накачивает энергию в ближнюю зону, восполняя её потери, в том числе потери на излучение. Поля ближней зоны ограничены *RS*. Размер этой сферы – это эффективный размер излучающей *виртуальной антенны*. Назовем подобный излучатель *Раддианным излучателем (Radian Emitter, RE)*, а излучаемые им моды *Раддианными модами (Radian Modes, RM)*.

Радио и оптические излучения, распространяющиеся в свободном пространстве, являются *ТЕМ*-волнами, отличающимися только частотными диапазонами. Учитывая вышесказанное, можно считать, что для всех *RE*, излучающими антеннами являются не сами эти объекты, а создаваемые ими электрические и магнитные поля, находящиеся внутри *RS*. Размеры *RS*, которые равны $D_R = \lambda/\pi$, всегда больше геометрических размеров самих *RE*, никак не зависят от физических размеров самих *RE* и определяются только длиной излучаемой волны.

Например, для атома водорода, имеющего диаметр $D_H = 1,58 \times 10^{-10}$ м, излучающего на длине волны $0,6562 \times 10^{-6}$ м (переход 3–2 серии Бальмера) одну *RM*, размер виртуальной излучающей антенны (т. е. размер *RS*) $D_R = \lambda/\pi = 2,089 \times 10^{-7}$ м, а отношение $D_R/D_H = 1,974 \times 10^3$. Таким образом, у атома водорода эффективный размер излучающей антенны почти в 2000 раз больше самого атома и соизмерим с излучаемой длиной волны. Тогда становится понятно, почему даже такой маленький (по сравнению с длиной излучаемой волны) объект как атом, может излучать в свободное пространство *ТЕМ* волны.

Из (7) (см. ниже) следует, что для всех *RE* (независимо от их размеров) $M_{\lambda R}$ – число пространственно-спектральных *RM*, излучаемых *RS* в телесном угле 4π с длиной волны λ , всегда равно единице.

$$M_{\lambda R} = \left(4\pi \times \frac{\pi D_r^2}{4} \right) / \lambda^2 = 1 \quad (3)$$

Далее рассмотрим (на примере *ESA*) факторы, определяющие зависимость энергии *RM* от отношения длины волны к размеру *RE*.

В 1948 году Chu L. J. формулирует фундаментальные пределы *Q*-добротности для *ESA* с линейной и круговой поляризациями, вписанных в *AS* [12]. Добротность характеризовалась отношением электромагнитной энергии *W*, накопленной внутри *RS*, окружающей *ESA*, умноженной на ω , к мощности P_{rad} , излучаемой за ее пределы в дальнюю зону.

$$Q = \omega \times W / P_{rad}, \quad (4)$$

где *W* – неизлучаемая энергия, накапливаемая либо электрическим, либо магнитным полем (в зависимости от типа диполя), ω обозначает круговую частоту электромагнитных колебаний. Chu L. J. получил приближенные выражения для добротности *ESA* в случае вертикальной линейной и круговой поляризации при $K \times \alpha \rightarrow 0$. Далее R. F. Harrington [13] уточнил теорию Chu L. J. в части влияния размеров антенны на величину *Q*. В последующие годы теория и техника *ESA*-радиоантенн активно развивалась: R. E. Collin and S. Rothschild [14], R. C. Hansen [15], McLean J. S. [16] предложили различные уточненные варианты математических выражений, описывающих зависимости добротности $Q(K \times \alpha)$ *ESA*-радиоантенн от их относительных (по сравнению с излучаемой длиной волны) размеров. Все эти зависимости практически совпадают при $K \times \alpha < 0,3$.

Разработка математической модели для расчета мощности и спектральной плотности излучения чёрных (серых) тел и субволновых частиц

Выше было отмечено, что оптические, инфракрасные и радиоизлучения, распространяющиеся в свободном пространстве, являются *ТЕМ* волнами, отличающимися только частотными диапазонами, поэтому природа фундаментальных ограничений, показывающих увеличение доли энергии неизлучаемой в дальнюю зону (по отношению к излучаемой энергии) при уменьшении относительных размеров излучателей, одинакова как для *ESA* радиоантенн, так и для СЧ и *RE*.

Исходя из этих соображений, в [18] мы предложили использовать для разработки но-

вой методики расчетов тепловых излучений СЧ следующие выражения для Q , описывающие зависимости добротности ESA радиоантенн от их относительных геометрических размеров [13]:

$$Q = \frac{1}{2K^3\alpha^3} + \frac{1}{K\alpha} + \sqrt{\frac{1}{4K^6\alpha^6} + \frac{1}{K^2\alpha^2}} \quad (5)$$

$$Q_1 = \frac{1}{K^3\alpha^3} + \frac{1}{K\alpha} \quad (6)$$

Результаты расчетов Q по выражению (5) очень мало отличаются от результатов расчетов по часто приводимому во многих работах (например, [11, 14]) упрощенному выражению (6). Поэтому в дальнейшем мы будем использовать выражение (6).

Следует отметить, что ESA антенны не обеспечивают полностью взаимность между режимами излучения и приема. Результаты, полученные для ESA передающих антенн, не могут быть в полной мере распространены на аналогичные приемные ESA антенны, поскольку предположение о сферичности⁴ излучаемых волн не является справедливым для принимаемых волн, так как фронт электромагнитных волн, принимаемых из дальней области поля, практически плоский. Это не позволяет строго использовать теорему взаимности между режимами излучения и приема. Поэтому зависимости $Q(K, \alpha)$, выведенные для описания процессов излучения ESA радиоантенн, мы в дальнейшем будем использовать для построения математической модели, описывающей только излучения СЧ и RE . Процессы поглощения теплового излучения СЧ будем рассчитывать с использованием модовой теории [5–7, 19]. Исходя из представления о том, что тепловое излучение, распространяющееся в свободном пространстве в телесном угле Ω в виде полихроматического пучка сечением S_{csa} в его основании, можно

представить набором монохроматических лучей (пространственно-спектральных мод) [18], число которых M_λ для любой длины волны λ этого пучка равно [6, 20, 21]

$$M_\lambda = S_{csa} \times \Omega / \lambda^2 \quad (7)$$

где M_λ – число пространственно-спектральных мод⁵ этого пучка с длиной волны λ .

Будем называть эти моды (в отличие от RM) нормальными модами (NM). Отметим, что энергия каждой NM определяется только температурой частицы и длиной излучаемой волны, тогда как энергия каждой RM определяется не только температурой и длиной излучаемой волны, но и размером частицы. Субволновая частица диаметром D при любых $\lambda < 2,221 \times D$ излучает в свободное пространство (в телесном угле $\Omega = 2\pi$) M_λ пространственно-спектральных мод, энергия каждой из которых определяется только температурой частицы T и длиной излучаемой волны и не зависит от размеров частицы [6, 20, 21]. При $\lambda = 2,221 \times D$ в дальнюю зону будет излучаться только одна мода ($M_\lambda = 1$) с длиной волны λ и энергией $W_{NM}(\nu, T)$. Обозначим эту волну как $\lambda_{cutoff} = 2,221 \times D$. При $\lambda > \lambda_{cutoff}$ (в соответствии с (7)) число свободно излучаемых мод становится меньше единицы $M_\lambda < 1$ и, следовательно, СЧ не должна излучать в дальнюю зону моды с длинами волн большими λ_{cutoff} .

Однако в действительности (как будет показано ниже) СЧ, у которых $M_\lambda < 1$, все же излучают в дальнюю зону на каждой из длин волн $\lambda > \lambda_{cutoff}$, но всего по одной пространственно-спектральной моде. Выше мы обозначили эти моды как $M_{\lambda,R}$ и назвали их *Радианными модами*. RM – это необычные моды, их энергия зависит от отношения длины излучаемой волны к геометрическому размеру источника излучения и очень быстро уменьшается (см. рис. 5) при уменьшении размеров СЧ относительно длин излучаемых волн.

⁴ В сферических волнах, излучаемых ESA , электромагнитная энергия в основном сосредоточена вблизи поверхности излучателя в ближних полях (реактивных полях), которые вносят маленький вклад в дальнее поле, что соответственно приводит к снижению коэффициента излучения.

⁵ Под пространственно-спектральной модой (типом колебаний) понимают TEM волну с заданными частотой ν , волновым вектором K и поляризацией ρ_e , где ρ_e – единичный вектор поляризации; e – индекс, принимающий только два значения: $e = 1, 2$ [20, 21].

Кроме СЧ, для которых неравенство $M_\lambda < 1$ выполняется лишь частично (только для мод с длинами волн большими λ_{cutoff}), оно выполняется всегда для таких объектов как атомы, молекулы, кластеры, квантовые точки. В радиодиапазоне к объектам, у которых неравенство $M_\lambda < 1$ также всегда выполняется, относятся электрически малые антенны – *ESA*. Все эти объекты излучают в дальнюю зону поперечные электромагнитные волны, отличающиеся лишь частотой. По механизму излучения в дальнюю зону их можно отнести к классу дипольных электрически малых антенн.

Субволновые частицы, поглощающие или излучающие тепловую энергию, также можно рассматривать как дипольные антенны. Действительно, СЧ, которая поглощает энергию электромагнитных волн, можно также представить как диполь, размеры которого много меньше поглощаемых длин волн. Под действием электрических и магнитных полей падающего излучения в СЧ возникают колебания токов проводимости и (или) смещения. В первом приближении эти колебания аналогичны собственным колебаниям электрического диполя [17]. Для волн с $\lambda > \lambda_{cutoff}$ субволновую частицу (у которой $M_\lambda < 1$) можно рассматривать как *ESA*. СЧ наряду с нормальными модами (*NM*), энергия которых определяется только температурой и длиной излучаемой волны и не зависит от размера частицы, могут излучать (на $\lambda > \lambda_{cutoff}$) и *RM*.

В атомах и молекулах электроны совершают в орбиталях периодические движения вокруг положительно заряженного ядра, что в плоскости электронной орбиты соответствует периодическим колебаниям тока (зарядов) в дипольной *ESA* антенне. Поскольку для длин волн, излучаемых атомами, молекулами, кластерами, квантовыми точками и *ESA*, всегда выполняется неравенство $\lambda \gg \lambda_{cutoff}$, эти объекты способны излучать только *RM*. Поэтому будем относить перечисленные выше объекты к *RE*.

Выполним расчеты излучаемой мощности для графитового шарика, температура которого равна T в зависимости от частот излучаемых волн и диаметра. Приведем основные соотношения, применяемые в дальнейших расчетах, в которых используются следующие

обозначения (размерность в СИ): h , k , c – соответственно, постоянные Планка, Больцмана и скорость света, D – диаметр шарика, S_{csa} – площадь поперечного сечения шарика, $S_{csa} = \pi D^2/4$, Ω – телесный угол, в котором излучает (поглощает) полусфера поверхности шарика, ε_i – коэффициент излучения материала, из которого сделан шарик. Обозначим $W_{NM}(v, T)$ энергию одной пространственно-спектральной *NM* с частотой v , излучаемой черным телом с температурой T [20, 21]:

$$W_{NM}(v, T) = \frac{hv}{\exp\left(\frac{hv}{kT}\right) - 1} \quad (8)$$

Если $\Psi_{abc}(v, T, D)$ – сумма излучаемой в свободное пространство энергии и накопленной в *RS* неизлучаемой энергии⁶, на частоте v за время, равное $1/2\pi v$, то её величина может быть рассчитана путем произведения числа мод $M(v, D)$, излучаемых полусферой СЧ в телесном угле $\Omega = 2\pi$ (в виде пучка с площадью поперечного сечения S_{csa}), на энергию каждой моды $W_{NM}(v, T)$. Это произведение необходимо умножить на 4 для учета излучения двумя полусферами поверхности шарика и двух возможных поляризаций излучаемых мод:

$$\Psi_{abc}(v, T, D) = 4\varepsilon_i W_{NM}(v, T) \times M(v, D),$$

где $M(v, D) = \frac{S_{csa} \Omega v^2}{c^2} \quad (9)$

Следует отметить, что $\Psi_{abc}(v, T, D)$ может быть рассчитана и с использованием формулы Планка по следующему выражению:

$$\Psi_{abc}(v, T, D) = \varepsilon_i \pi D^2 \times P_{Plank}(v, T), \quad (10)$$

здесь $P_{Plank}(v, T) = \frac{2\pi h v^3}{c^2 \exp\left(\frac{hv}{kT}\right) - 1} \quad (11)$

⁶ Неизлучаемая энергия образует *RS* и накапливается в ней при частотах $v < c/\lambda_{cutoff}$.

Формулы (8) и (9) справедливы только для частот $\nu \geq c/\lambda_{cutoff}$, при которых длины излучаемых волн будут меньше или равны λ_{cutoff} . Моды с этими частотами (мы их обозначили как *NM*) свободно излучаются в дальнее поле, т. к. в этих случаях $M_\lambda \geq 1$ и выходное сопротивление излучателя равно волновому сопротивлению среды. Для частот $\nu < c/\lambda_{cutoff}$ $M_\lambda < 1$ и виртуальной излучающей антенной становится не поверхность частицы, а электрические и магнитные поля внутри *RS*. В этих случаях частица излучает только *RM* моды.

Пусть

$$\begin{aligned} P_{abc}(\nu, T, D) &= \omega \times \Psi_{abc}(\nu, T, D) = \\ &= 2\pi\nu \times \Psi_{abc}(\nu, T, D) \end{aligned} \quad (12)$$

где $P_{abc}(\nu, T, D)$ – сумма мощности, излучаемой частицей в свободное пространство и неизлучаемой реактивной мощности электрических и (или) магнитных колебаний на частоте ν внутри *RS*. Обозначим $\Psi_R(\nu, T, D)$ неизлучаемую в свободное пространство энергию (реактивную энергию) электрических и (или) магнитных колебательных полей на частоте ν , накопленную за время $1/2\pi\nu$ внутри *RS* и $P_R(\nu, T, D)$ неизлучаемую в свободное пространство мощность (реактивная мощность) электрических и (или) магнитных колебаний на частоте ν внутри *RS*, тогда

$$\begin{aligned} P_R(\nu, T, D) &= \omega \times \Psi_R(\nu, T, D) = \\ &= 2\pi\nu \times \Psi_R(\nu, T, D) \end{aligned} \quad (13)$$

Если $P_{rad}(\nu, T, D)$ – мощность, излучаемая частицей в свободное пространство на частоте ν , то выражение для $Q(\nu, D)$ запишется в соответствии с (4) и (6) в следующем виде:

$$Q_1(\nu, D) = \frac{\omega \times \Psi_R(\nu, T, D)}{P_{rad}(\nu, T, D)} = \frac{c^3}{\pi^3 D^3 \nu^3} + \frac{c}{\pi D \nu} \quad (14)$$

Будем считать, что

$$P_{abc}(\nu, T, D) = P_R(\nu, T, D) + P_{rad}(\nu, T, D), \quad (15)$$

$$\text{тогда } P_{rad}(\nu, T, D) = \frac{P_{abc}(\nu, T, D)}{Q_1(\nu, D) + 1} \quad (16)$$

и, соответственно,

$$P_R(\nu, T, D) = Q_1(\nu, D) \times P_{rad}(\nu, T, D) \quad (17)$$

Приведем (для сравнения) следующие выражения для вычисления спектральных мощностей, использующие формулы Планка:

$$P_{P_{abc}}(\nu, T, D) = 2\pi\nu \epsilon_i \pi D^2 P_{Plank}(\nu, T), \quad (18)$$

$$P_{P_{rad}}(\nu, T, D) = \frac{P_{P_{abc}}(\nu, T, D)}{Q_1(\nu, D) + 1}, \quad (19)$$

где $P_{P_{abc}}(\nu, T, D)$ – сумма мощности, излучаемой частицей в свободное пространство и неизлучаемой реактивной мощности электрических и (или) магнитных колебаний на частоте ν внутри Радианной сферы, рассчитанная с помощью формулы Планка и $P_{P_{rad}}(\nu, T, D)$ – мощность, излучаемая частицей в свободное пространство на частоте ν , рассчитанная с помощью формулы Планка. Отметим, что приведенные выше выражения справедливы для одночастотного режима как для *ESA* радиоантенн, так и для СЧ.

Обсуждение результатов расчетов

На рис. 3 приведены зависимости излучаемой и неизлучаемой (реактивной) мощности от частоты ν , рассчитанные для графитового шарика диаметром 3×10^{-6} м, нагретого до температуры $T = 1273$ К.

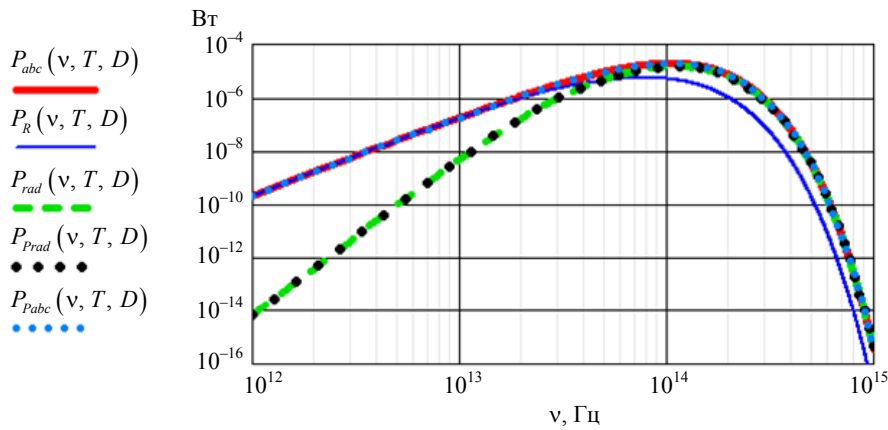


Рис. 2. Зависимости $P_{abc}(\nu, T, D)$, $P_R(\nu, T, D)$, $P_{rad}(\nu, T, D)$ от частоты ν рассчитаны с использованием представления излучаемого потока энергии набором пространственно-спектральных мод. Зависимости $P_{Prad}(\nu, T, D)$, $P_{Pabc}(\nu, T, D)$, рассчитаны (для сравнения) с использованием формулы Планка. Все зависимости рассчитывались при $D = 3 \times 10^{-6}$ м, $\epsilon_i = 0,7$ и $T = 1273$ К

Результаты расчетов показывают, что $P_{abc}(\nu, T, D)$ – зависимость, построенная на представлении мощности теплового потока в виде набора мощностей монохроматических лучей (пространственных мод), полностью совпадает с $P_{Pabc}(\nu, T, D)$ – зависимостью на основе формулы Планка⁷. При этом для $\nu \geq 1 \times 10^{14}$ Гц (т. е. при $\nu \geq c/\lambda_{cutoff}$) зависимости $P_{abc}(\nu, T, D)$ и $P_{Pabc}(\nu, T, D)$ практически совпадают с зависимостью излучаемой мощности $P_{rad}(\nu, T, D)$. При $\nu \leq 5 \times 10^{13}$ Гц (т. е. при $\nu < c/\lambda_{cutoff}$) $P_{rad}(\nu, T, D)$ – мощность, излучаемая в свободное пространство, становится меньше $P_R(\nu, T, D)$ – неизлучаемой мощности и уменьшается быстрее с уменьшением ν , чем это показывают зависимости $P_{abc}(\nu, T, D)$ и $P_{Pabc}(\nu, T, D)$. Это доказывает, что при $M < 1$ формула Планка непригодна для расчета спектральных мощностей излучений объектов, которые мы выше назвали *RE*.

Выражение $P_{Prad}(\nu, T, D)$ полностью идентично выражению $P_{rad}(\nu, T, D)$, полученному с использованием представления излу-

чаемого потока энергии набором пространственно-спектральных мод. Таким образом, для расчета спектральных мощностей излучения СЧ любых размеров и при любых температурах можно использовать любую из зависимостей: $P_{Prad}(\nu, T, D)$ или $P_{rad}(\nu, T, D)$. Из графика $P_{rad}(\nu, T, D)$ видно, что уменьшение ν (т. е. уменьшение размера частицы по отношению к λ) приводит к уменьшению (по сравнению с $P_{Pabc}(\nu, T, D)$, рассчитанной с использованием формулы Планка) мощностей излучения на длинных волнах и, следовательно, к увеличению относительной доли коротких волн. Таким образом, цвет излучающей частицы становится «более синим», чем это следует из формулы Планка.

Выше была показана (см. рис. 2) идентичность выражений (16) и (19) и, следовательно, пригодность выражения (19) для расчетов мощностей излучения не только «больших» тел, но и субволновых частиц. Формула (19) может быть представлена следующим образом: $P_{Prad}(\nu, T, D) = 2\epsilon_i \pi \nu S_s \times \chi(\nu, T, D)$ (20), где $S_s = \pi D^2$ – площадь поверхности шаровой частицы

$$\chi(\nu, T, D) = \left[1 + \frac{c}{\pi \nu D} + \left(\frac{c}{\pi \nu D} \right)^3 \right]^{-1} \times \left(\frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \right) \times \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (21)$$

⁷ Это показывает полную идентичность полученной (с использованием представления излучаемого потока энергии набором пространственных спектральных мод) нами формулы $\Psi_{abc}(\nu, T, D) = 4\epsilon_i W_0(\nu, T) \times M(\nu, D)$ с формулой Планка. Таким образом $\Psi_{abc}(\nu, T, D)$ – это другой вариант написания спектральной зависимости Планка.

Здесь $\chi(\lambda, T, D)$ – излучательная способность частицы на частоте ν (т. е. спектральная плотность мощности излучения на единицу площади). Выражение (21) представляет собой модификацию формулы Планка для расчетов излучательных способностей не только больших тел, но и СЧ.

Таким образом, получена универсальная формула, пригодная для расчетов излучательных способностей, как больших тел, так и субволновых частиц. В длинах волн эта формула имеет следующий вид

$$\chi(\lambda, T, D) = \left[1 + \frac{\lambda}{\pi D} + \left(\frac{\lambda}{\pi D} \right)^3 \right]^{-1} \times \left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \right) \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (22)$$

или

$$\chi(\lambda, T, D) = \left[1 + \frac{D_r}{D} + \left(\frac{D_r}{D} \right)^3 \right]^{-1} \times \left(\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \right) \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (23)$$

На рис. 3 показаны зависимости спектральных излучательных способностей (спектральных плотностей потоков излучения) сферических частиц от λ :

– $P_{Plank}(\lambda, T)$ – спектральная излучательная способность «большого» тела, рассчитанная по классической формуле Планка;

– $\chi(\lambda, T, D)$ – спектральные излучательные способности СЧ, рассчитанные по формуле (22), т. е. по модифицированной формуле Планка для различных значений D .

Видно, что зависимости $P_{Plank}(\lambda, T)$ и $\chi_1(\lambda, T, D)$ практически полностью совпадают при всех $\lambda < 3 \times 10^{-4}$ м. Следовательно, частицы диаметром $D \geq 2 \times 10^{-4}$ м во всем рассматриваемом спектральном диапазоне излучают (как «большое» тело) только *ММ*. При уменьшении размеров частиц происходит переход от излучения *ММ* к излучению *РМ*. Например, для зависимости $\chi_2(\lambda, T, D_2)$ – при $\lambda > 4,2 \times 10^{-5}$ м; для зависимости $\chi_3(\lambda, T, D_3)$ – при $\lambda > 4,2 \times 10^{-6}$ м; для зависимости $\chi_4(\lambda, T, D_4)$ – при $\lambda > 4,2 \times 10^{-7}$ м. Частицы с $D < 10^{-8}$ м (при $T = 1273$ К) излучают только *РМ* и, следовательно, как и атомы, молекулы, кластеры и квантовые точки являются Радианными излучателями.

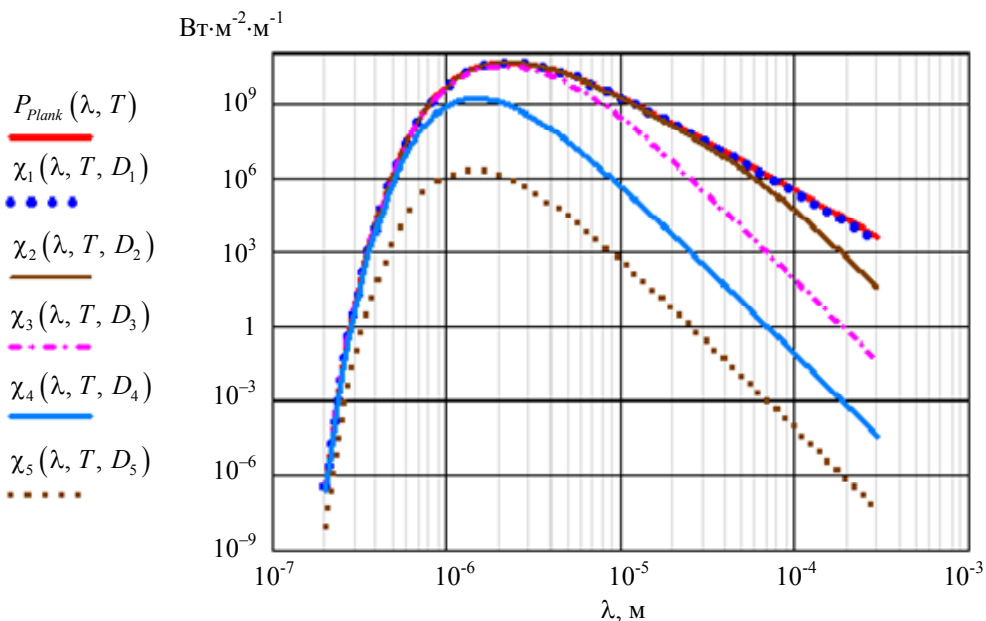


Рис. 3. Зависимости спектральных излучательных способностей «больших тел» и СЧ от λ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $T = 1273$ К и $D_1 = 2 \times 10^{-4}$ м; $D_2 = 2 \times 10^{-5}$ м; $D_3 = 2 \times 10^{-6}$ м; $D_4 = 2 \times 10^{-7}$ м; $D_5 = 2 \times 10^{-8}$ м

Приведенные зависимости показывают границы применимости формулы Планка. При $T = 1273 \text{ K}$ формула Планка пригодна только для расчетов излучения частиц с $D > 2 \times 10^{-4} \text{ м}$. В то время как, модифицированная формула (21) или (22), полученная в данной работе, пригодна для расчетов излучений как «больших» тел так и субволновых частиц. Приведенные зависимости $\chi(\nu, T, D)$ показы-

вают, что ошибки при использовании формулы Планка для расчетов спектральных излучательных способностей СЧ могут достигать (в рассматриваемом примере) нескольких порядков величин.

На рис. 4 показаны $\chi(\lambda, T, D)$ – зависимости спектральных излучательных способностей сферических частиц от их диаметров, рассчитанные при различных значениях λ .

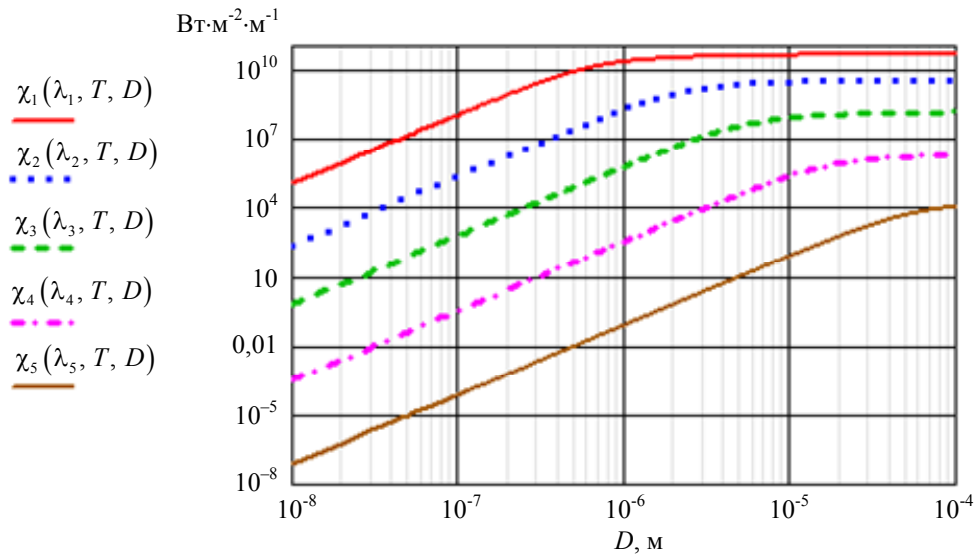


Рис. 4. $\chi(\lambda, T, D)$ – зависимости спектральных излучательных способностей сферических частиц от их диаметров, рассчитанные при $T = 1273 \text{ K}$ и следующих значениях λ : $\lambda_1 = 2,28 \times 10^{-6} \text{ м}$; $\lambda_2 = 8 \times 10^{-6} \text{ м}$; $\lambda_3 = 2 \times 10^{-5} \text{ м}$; $\lambda_4 = 6 \times 10^{-5} \text{ м}$; $\lambda_5 = 2 \times 10^{-4} \text{ м}$

На длине волны λ_1 все частицы с $D < 1 \times 10^{-5} \text{ м}$ излучают только RM , а частицы с $D > 1 \times 10^{-5} \text{ м}$ излучают NM (их спектральная излучательная способность не зависит от D).

На длине волны λ_2 частицы с $D < 3,5 \times 10^{-5} \text{ м}$ излучают только RM , а частицы с $D > 3,5 \times 10^{-5} \text{ м}$ излучают NM (их спектральная излучательная способность не зависит от D).

На длине волны λ_3 частицы с $D < 8 \times 10^{-5} \text{ м}$ излучают только RM , а частицы с $D > 8 \times 10^{-5} \text{ м}$ излучают NM (их спектральная излучательная способность не зависит от D).

На длинах волн λ_4 и λ_5 частицы с $D < 4 \times 10^{-4} \text{ м}$ излучают только RM .

Приведенные зависимости показывают изменение модового состава излучения в зависимости от размеров частиц и частоты (длины) излучаемой волны. Например, частицы с $D = 1 \times 10^{-4} \text{ м}$ излучают NM на длинах волн $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и в тоже время излучают RM на длинах волн λ_4, λ_5 .

Используя выражения (8) и (16), можно получить $P_M(D, \nu, T)$ – единую формулу, пригодную для расчета мощности как NM , так и RM :

$$P_M(\nu, T, D) = 2\pi\nu \times (Q_1(\nu, D) + 1)^{-1} \times W_{NM}(\nu, T) \quad (23)$$

В длинах волн формула (23) запишется следующим образом:

$$P_M(\lambda, T, D) = \left(\frac{\lambda}{\pi D} + \frac{\lambda^3}{\pi^3 D^3} + 1 \right)^{-1} \times \frac{2\pi h c^2}{\lambda^2 \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T}\right) - 1 \right)} \quad (24)$$

На рис. 5 показана зависимость мощности, излучаемая черным ($\epsilon_l = 1$) шариком в

одной пространственно-спектральной моде, от его диаметра.

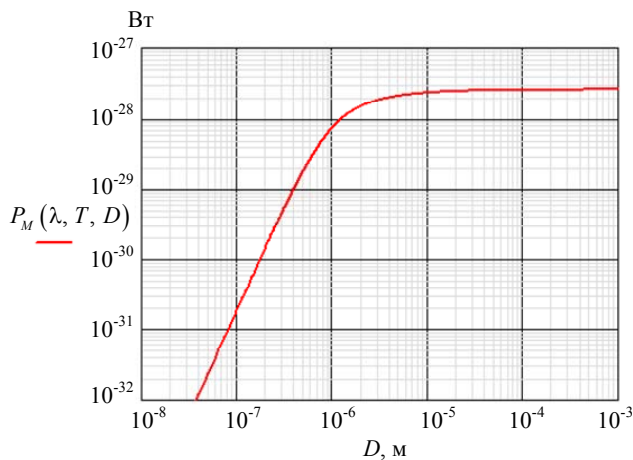


Рис. 5. Зависимость мощности $P_M(\lambda, T, D)$, излучаемой черным ($\varepsilon_i = 1$) шариком в одной пространственно-спектральной моде от его диаметра. Расчет проводился по формуле (24) при $T = 1273$ К и $\lambda = 3,5 \times 10^{-6}$ м

Видно, что при $D > 8 \times 10^{-5}$ м мощность моды не зависит от D и, следовательно, при $D > 8 \times 10^{-5}$ м частицы излучают только *NM*. При $D < 8 \times 10^{-5}$ м мощность уменьшается при уменьшении D и, следовательно, при $D < 8 \times 10^{-5}$ м частицы излучают только *RM*. Таким образом, используя формулу (24), можно рассчитывать мощность, излучаемую в одной пространственно-спектральной моде не только «больших» тел, но и субволновых частиц.

Основные результаты

На основе описанных выше представлений о механизме излучения субволновых частиц была предложена новая методика расчетов спектральных мощностей и спектральных коэффициентов излучения СЧ, в которой расчеты выполняются с использованием зависимости добротности электрически малых радиантенн (*ESA*) от их относительных (по отношению к длине излучаемой волны) размеров. Получена формула для расчетов спектральной плотности излучения чёрных (серых) тел и субволновых частиц. (Предложенная формула является модификацией формулы Планка для расчетов излучательных способностей не только «больших» тел, но и

субволновых частиц.) Выведено соотношение для расчетов мощности, излучаемой в одной пространственно-спектральной моде не только «больших» тел, но и субволновых частиц. Предложены понятия: *Нормальная мода (NM)*, *Радианная мода (RM)* и *Радианный излучатель (RE)*. Получены новые варианты представления спектральных зависимостей Планка и Стефана–Больцмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mie G.* / *Annalen der Physik.* 1908. Vol. 25. P. 377.
2. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. – М.: Мир, 1986.
3. *Мартыненко Ю. В., Огнев Л. И.* / *ЖТФ.* 2005. Т. 75. № 11. С. 130–132.
4. *Elzoukal M., Yang Ch., Albert A., Lubner S., Prasher R.* / *Cell Reports Physical Science.* 2020. Vol. 1. № 12. P. 100259.
5. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Успехи прикладной физики.* 2023. Т. 11. № 5. С. 384–398.
6. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2021. № 2. С. 12–21.
7. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2023. № 3. С. 17–25.
8. *Князев Б. А., Кузьмин А. В.* / *Вестник НГУ. Серия: Физика.* 2007. Т. 2. Вып. 1. P. 108–122.
9. *Wheeler H. A.* / *Proc. of the IRE.* December 1947. P. 1479–1488.
10. *Wheeler H. A.* / *Proc. IRE.* 1959. Vol. 47. P. 1325–1331.
11. *Davis W. A., Yang T., Caswell E. D., Stutzman W. L.* / *IET Microwaves Antennas & Propagation.* 2011. Vol. 5. № 11. P. 1297–1302. doi: 10.1049/iet-map.2010.0604
12. *Chu L. J.* / *Journal of Applied Physics.* 1948. Vol. 19, December. P. 1163–1175.
13. *Harrington R. F.* / *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 1960. Vol. 64-D, Jan/Feb. P. 1–12.
14. *Collin R. E., Rothschild S.* / *IEEE Trans. Ant. Prop.* 1964. Vol. AP-12, Jan. P. 23–27.
15. *Hansen R. C.* / *Proceedings of the IEEE.* 1981. Vol. 69. № 2. P. 170–182.
16. *McLean J. S.* / *IEEE Trans. Ant. Prop.* 1996. Vol. 44. № 5. P. 672–676.
17. *Хлебцов Б. Н.* / *Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках.* 2016. № 2. URL: mathmod.esrae.ru/2-10
18. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2024. № 2. С. 18–30.
19. *Свиридов А. Н., Сагинов Л. Д.* / *Прикладная физика.* 2023. № 4. С. 5–15.
20. *Гальярди Р. М., Карп Ш.* *Оптическая связь.* – М.: Связь, 1978.
21. *Фридрихов С. А., Мовнин С. М.* *Физические основы электротехники.* – М.: Высшая школа, 1982. С. 148, 608.

Calculation of the spectral radiation density of black (gray) bodies and subwavelength particles

A. N. Sviridov^{1,*}, L. D. Saginov¹ and R. Z. Khafizov²

¹FSAC VIM, Moscow, 109428 Russia

* E-mail: sviridtoly@yandex.ru

²ODB «ASTROHN» JSC, Lytkarino, Moscow Region, 140080 Russia

Received 25.04.2025; revised 20.05.2025; accepted 11.08.2025

A new method for calculating the spectral radiation powers of subwavelength particles is proposed, in which calculations are performed using the dependence of the quality factor of electric small radio antennas (ESA) on their relative (relative to the wavelength of the emitted wave) dimensions. A formula is obtained for calculating the spectral radiation density of black (gray) bodies and subwavelength particles, as well as a ratio for calculating the power emitted in one spatially spectral mode of black (gray) bodies and subwavelength particles. New versions of the Planck and Stefan–Boltzmann spectral dependences are presented.

Keywords: Planck's law; spatial-spectral mode; subwavelength particle; electrically small antenna (ESA); Normal mode; Radian sphere; Radian mode; Radian Emitter; Q-factor; near field; far field.

REFERENCES

1. Mie G., *Annalen der Physik* **25**, 377 (1908). <https://doi.org/10.1002/andp.19083300302>
2. Boren K. and Hafman D., *Absorption and scattering of light by small particles*, Moscow, Mir, 1986 [in Russian].
3. Martynenko Yu. V. and Ognev L. I., *ZhTF (Technical Physics)* **75** (11), 130–132 (2005) [in Russian]
4. Elzukul M., Jan Ch., Albert A., Lubner S. and Prasher R., *Cell Reports Physical Science* **1** (12), 100259 (2020) <https://doi.org/10.1016/j.xcrp.2020.100259>
5. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Journal of Communications Technology and Electronics* **67** (Suppl. 1), S83–S88 (2022).
6. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Applied Physics*, № 2, 12–21 (2021) [in Russian].
7. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Applied Physics*, № 3, 17–25 (2021) [in Russian].
8. Knyazev B. A. and Kuzmin A. V., *Bulletin of the NSU. Series: Physics* **2** (1), 108–122 (2007) [in Russian].
9. Wheeler H. A. *Proc. of the IRE*, December, 1479–1488 (1947).
10. Wheeler H. A., *Proc. IRE* **47** (Aug), 1325–1331 (1959).
11. Davis W. A., Yang T., Caswell E. D. and Stutzman W. L., *IET Microwaves Antennas & Propagation* **5** (11), 1297–1302 (2011). doi: 10.1049/iet-map.2010.0604
12. Chu L. J., *Journal of Applied Physics* **19** (December), 1163–1175 (1948).
13. Harrington R. F., *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **64-D** (Jan/Feb), 1–12 (1960).
14. Collin R. E. and Rothschild S., *IEEE Trans. Ant. Prop.* **AP-12** (Jan.), 23–27 (1964).
15. Hansen R. C., *Proceedings of the IEEE* **69** (2), 170–182 (1981).
16. McLean J. S., *IEEE Trans. Ant. Prop.* **44** (5), 672–676 (1996).
17. Khlebtsov B. N., *Mathematical modeling, computer and physical experiments in natural sciences*, № 2 (2016). URL: mathmod.esrae.ru/2-10 [in Russian].
18. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Journal of Communications Technology and Electronics*, **69** (4–6), 158–167. (2024).
19. Sviridov A. N. and Saginov L. D., *Journal of Communications Technology and Electronics* **68** (Suppl. 2), S176–S183 (2023).
20. Gagliardi R. M. and Karp Sh., *Optical communication*, New York, London, John Wiley & sons, 1976; Moscow, Svyaz, 1978.
21. Friedrichov S. A. and Movnin S. M., *Physical foundations of electrical engineering*. Moscow, Higher School, 1982. pp. 148, 608 [in Russian].

Об авторах

Свиридов Анатолий Николаевич, к.ф.-м.н., научный консультант, Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ (109428, Россия, Москва, 1-й Институтский проезд, 5). E-mail: sviridtoly@yandex.ru Author ID 171370

Сагинов Леонид Дмитриевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ (109428, Россия, Москва, 1-й Институтский проезд, 5). E-mail: lsaginov@yandex.ru SPIN-код РИНЦ 1677-3738, Author ID 171369

Хафизов Ренат Закирович, к.ф.-м.н., начальник исследовательского центра, АО «ОКБ «АСТРОН» (140080, Россия, Московская обл., г. Лыткарино, ул. Парковая, 1). E-mail: imagelab@mail.ru SPIN-код РИНЦ 3045-0138, Author ID 725980