

УДК 524.359

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ ШВАРЦШИЛЬДА ГАРМОНИЧНЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ИСТОЧНИКАМИ

Д. Н. Клочков

Физический институт РАН, Москва, Россия

*На основе леммы Лоренца строятся решения для гармоничных во времени источников. Рассматриваются диаграммы направленности для радиального и меридионального диполей, расположенных в непосредственной близости от дыры при частотах порядка  $\omega r_g \sim 1$ . Находятся полная мощность излучения и деление мощностей между свободным пространством и черной дырой.*

В данной работе развивается альтернативный подход, основанный на лемме Лоренца, позволяющий построить возмущения электромагнитного поля во всем пространстве (вопрос о нахождении электромагнитного поля от заданных токов в области, не занятой источниками, рассматривался в работах [1, 3]). При этом полностью учитывается влияние черной дыры на электромагнитные поля, воздействием же последних на геометрию пренебрегается. Всюду используется система единиц, в которой  $c = G=1$ . В исследованиях электромагнитного поля будем исходить из уравнений Максвелла, записанных в 3+1 формализме [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{rot}(\alpha \vec{D}); \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \text{rot}(\alpha \vec{B}) - 4\pi \alpha \vec{j}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha = (1 - 2M/r)^{1/2}$  — функция длительности.

Это позволяет не только использовать интуицию, основанную на опыте работы с плоским пространством, но и перенести некоторые методы классической электродинамики на искривленное пространство вокруг сферической черной дыры.

Уравнения (1) описывают эволюцию полей  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  с течением мирового времени  $t$ , оставляя условия (2) справедливыми в течение всего процесса. Далее рассматриваются фурье-компоненты полей и токов; для краткости нижний индекс  $w$  всюду опущен.

В пространственной триаде для метрики Шварцшильда общее решение однородных уравнений поля (1)–(2) может быть разложено на сумму собственных волн электрического ( $B^r = 0, D^r \neq 0$ ) и магнитного ( $B^r \neq 0, D^r = 0$ ) типов. При этом поля электрического и магнитного типов выражаются через электрический  $U^{(e)}$  и магнитный  $U^{(m)}$  потенциалы следующим образом:

$$\begin{aligned} D^r &= l(l+1) \frac{U^{(e)}}{r^2}, & B^r &= 0; \\ D^\vartheta &= \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial \vartheta \partial r}, & B^\vartheta &= -\frac{iw}{\alpha r \sin \vartheta} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \phi}; \\ D^\phi &= \frac{\alpha}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 U^{(e)}}{\partial \phi \partial r}, & B^\phi &= \frac{iw}{\alpha r} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \vartheta}; \\ D^r &= 0, & B^r &= l(l+1) \frac{U^{(m)}}{r^2}; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D^\vartheta &= 0, & B^r &= l(l+1) \frac{U^{(m)}}{r^2}; \\ D^\vartheta &= \frac{iw}{\alpha r \sin \vartheta} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \phi}, & B^\vartheta &= \frac{\alpha}{r} \frac{\partial^2 U^{(m)}}{\partial \vartheta \partial r}; \\ D^\phi &= \frac{iw}{\alpha r} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial \vartheta}, & B^\phi &= \frac{\alpha}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 U^{(m)}}{\partial \phi \partial r}, \end{aligned}$$

причем функции  $U^{(e)}$  и  $U^{(m)}$  удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\alpha^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \alpha^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\alpha^2}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right] + w^2 U = 0. \quad (3)$$

Подстановка в уравнение (3) потенциала

$$U_{lm} = \Psi_l Y_{lm}(\vartheta, \phi), \quad (4)$$

где  $Y_{lm}(\vartheta, \phi) = P_l^m(\cos \vartheta) e^{-i\phi}$  — сферические функции, приводит к уравнению для радиальной координаты [5]

$$\frac{d^2 \Psi_l}{dr^{*2}} + w^2 \Psi_l = l(l+1) \frac{\alpha^2}{r^2} \Psi_l, \quad (5)$$

в котором “черепашьи” координаты  $r^*$  выражаются через шварцшильдовские следующим образом:  $r^* = r + r_g \ln(r/r_g - 1)$ .

Уравнение (5) в координатах  $r^*$  описывает процесс рассеяния волн на потенциале. Общее решение имеет две моды: функция  $\Psi^{in}(w, r)$  описывает падающую на горизонте волну, а  $\Psi^{out}(w, r)$  — расходящуюся на бесконечности волну. Прямые волны определяются потенциалом  $U_{lm}^{in} = \Psi^{in} Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ , обратные волны —  $U_{lm}^{out} = \Psi^{out} Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ .

Ниже выводится лемма Лоренца для шварцшильдовского пространства. На основе леммы дается скалярное произведение и устанавливается ортогональность собственных волн. Затем выводятся коэффициенты разложения возбужденного электромагнитного поля по собственным волнам и рассматриваются поля, создаваемые радиальным и меридиональным электрическим диполями.

### Лемма Лоренца. Ортогональность собственных волн

Лемма Лоренца является вспомогательным математическим соотношением, которое связывает комплексные амплитуды двух электромагнитных полей [6].

Введем магнитные заряд и ток по аналогии с электрическими. Замечая, что внешнее пространство черной дыры эквивалентно с точностью до учета кривизны пространства материальной среде с электрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon = \mu = \alpha^{-1}$  [7], перепишем уравнения Максвелла (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \frac{i\omega}{\alpha} \vec{H} - 4\pi\alpha \vec{j}^m; \\ \text{rot} \vec{H} &= -\frac{i\omega}{\alpha} \vec{E} + 4\pi\alpha \vec{j}^e. \end{aligned}$$

Несмотря на то, что покоящиеся наблюдатели измеряют поля  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ , переход от рассмотрения векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  к рассмотрению  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеет то преимущество, что тангенциальные компоненты полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  не расходятся на горизонте в отличие от соответствующих компонент  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ .

Пусть поле  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ , возбуждается сторонними токами  $\vec{j}_1^e, \vec{j}_1^m$ , а поле  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  — токами  $\vec{j}_2^e, \vec{j}_2^m$ , тогда комплексные амплитуды полей удовлетворяют соотношению:

$$\text{div}(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) - \text{div}(\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) = 4\pi\alpha(\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1).$$

Интегрируя по произвольному объему  $V$ , содержащему токи, получим лемму Лоренца в интегральном виде

$$\oint \{ \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \} d\vec{S} = 4\pi \int \alpha (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV, \quad (6)$$

где  $d\vec{S} = \vec{n} dS^n$ ;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к объему  $V$ ;  $dV = \alpha^{-1} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\phi$ .

Возьмем поверхность  $S = \partial V$ , охватывающую объем  $V$ , в виде двух сфер с центром в центре черной дыры и имеющих радиусы  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Для этого случая лемма Лоренца (6) примет вид

$$\begin{aligned} \int \{ \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \} dS_2 \vec{e}_r - \int \{ \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \} dS_1 \vec{e}_r = \\ = 4\pi \int \alpha (\vec{j}_1^e \vec{E}_2 - \vec{j}_2^e \vec{E}_1 - \vec{j}_1^m \vec{H}_2 + \vec{j}_2^m \vec{H}_1) dV. \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрирование в правой части производится по объему, заключенному между сферами.

Возьмем теперь в качестве поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  поле какой-нибудь собственной волны с мультииндексом  $s$ , а в качестве поля  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  — поле другой собственной волны с мультииндексом  $s'$ . Так как эти поля не имеют источников, то правая часть (7) обращается в нуль. И, следовательно, интеграл

$$J_{s,s'} = \int [\vec{E}_s \times \vec{H}_{s'} - \vec{E}_{s'} \times \vec{H}_s] \vec{e}_r dS_r, \quad (8)$$

взятый по любой сфере  $S_r$  радиуса  $r$ , не зависит от  $r$ . Интеграл (8) можно рассматривать как скалярное произведение. Волны электрического и магнитного типов ортогональны согласно (8). Для полей одного типа скалярное произведение будет давать отличное от нуля значение только для прямой и обратной волн при условии  $l = l'$  и  $m = -m'$ .

Нормой  $s$ -волны (индекс  $s$  в данном случае включает в себя индексы  $l, m$ ) является величина  $N_s = \frac{1}{4\pi} J_{s'-s}$ . Для волн электрического типа она равна

$$N_s^{(e)} = (-1)^m \frac{2l(l+1)}{2l+1} w^2 T_l(w).$$

Для магнитных волн норма  $N_s^{(m)}$  связана с  $N_s^{(e)}$  соотношением  $N_s^{(m)} = -N_s^{(e)}$ .

### Возбуждение электромагнитных волн

Предположим, что все источники поля (электрические и магнитные токи) находятся при  $r_1 < r < r_2$ . Так как при  $r > r_1, r < r_2$  искомое поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, то оно должно иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_s C_{-s} \vec{E}_{-s}; & \vec{H} &= \sum_s C_{-s} \vec{H}_{-s}; & r &\geq r_2; \\ \vec{E} &= \sum_s C_s \vec{E}_s; & \vec{H} &= \sum_s C_s \vec{H}_s; & r &\leq r_1. \end{aligned}$$

Таким образом, волны должны расходиться из области, занятой источниками. Комплексные амплитуды волн  $C_s$  и  $C_{-s}$  легко найти, если воспользоваться леммой (7), в которой вместо поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  следует взять искомое поле  $\vec{E}, \vec{H}$ , а в качестве поля  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  — вначале  $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ , а потом  $\vec{E}_{-s}, \vec{H}_{-s}$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} C_{-s} &= -\frac{1}{N_s} \int \alpha(\vec{j}^e \vec{E}_s - \vec{j}^m \vec{H}_s) dV; \\ C_s &= -\frac{1}{N_s} \int \alpha(\vec{j}^e \vec{E}_{-s} - \vec{j}^m \vec{H}_{-s}) dV. \end{aligned} \quad (9)$$

В этом случае коэффициенты  $C_s$  и  $C_{-s}$  не зависят от  $r$ .

Выражения (9) в области, занятой источниками, не применимы. Для определения электромагнитного поля при некотором  $r$ , лежащем между  $r_1$  и  $r_2$ , можно воспользоваться следующим приемом: мысленно удалить источники из тонкого сферического слоя ( $r - \delta, r + \delta$ ), заключенного между двумя сферами  $S_{r-\delta}$  и  $S_{r+\delta}$ ; вычислить поле  $\vec{E}', \vec{H}'$  на сфере радиуса  $r$  и устремить  $\delta \rightarrow 0$ . Расходящиеся сферические волны создаются источниками, которые находятся под сферой  $S_r$ , а сходящиеся — источниками над сферой  $S_r$ . Однако поле  $\vec{E}', \vec{H}'$  отличается от поля  $\vec{E}, \vec{H}$ , существующего на той же сфере до удаления источников из тонкого сферического слоя. При удалении источников радиальные компоненты электрических и магнитных токов обрываются. В результате на сферах  $S_{r-\delta}$  и  $S_{r+\delta}$  соз-

даются поверхностные электрические и магнитные заряды, которые при временной зависимости  $e^{-i\omega t}$  приводят к дополнительному полю

$$\vec{E}'' = -\frac{4\pi\alpha}{i\omega} j^{(e)r} \vec{e}_r; \quad \vec{H}'' = -\frac{4\pi\alpha}{i\omega} j^{(m)r} \vec{e}_r$$

в сферическом слое ( $r - \delta, r + \delta$ ) при  $\delta \rightarrow 0$ . Чтобы получить истинное поле, необходимо из поля  $\vec{E}', \vec{H}'$  вычесть поле  $\vec{E}'', \vec{H}''$ . А именно:

$$\vec{E} = \sum_s (C_s \vec{E}_s + C_{-s} \vec{E}_{-s}) + \frac{4\pi\alpha}{i\omega} j^{(e)r} \vec{e}_r;$$

$$\vec{H} = \sum_s (C_s \vec{H}_s + C_{-s} \vec{H}_{-s}) + \frac{4\pi\alpha}{i\omega} j^{(m)r} \vec{e}_r.$$

При этом коэффициенты уже являются функциями от  $r$ , так как при изменении  $r$  "источники под сферой" переходят в "источники над сферой" и наоборот. Вследствие этого амплитуды волн меняются.

### Поле элементарного диполя

Рассмотрим поле электрического диполя. Без потери общности можно выбрать систему сферических координат таким образом, чтобы диполь располагался на полярной оси ( $\vartheta = 0$ ) и лежал в плоскости нулевого меридиана ( $\phi = 0$ ). Тогда произвольно ориентированный диполь может быть представлен как векторная сумма радиального и меридионального диполей, которые могут быть рассмотрены отдельно.

#### Радиальный диполь

Пусть на расстоянии  $r_0$  от центра черной дыры расположен радиальный электрический диполь (вibrator), плотность тока которого задается выражением

$$\vec{j}^{(e)} = j^r \vec{e}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

и связана с моментом диполя локальным соотношением

$$-i\omega_{\text{опн}} \vec{p} = \int \vec{j} dV,$$

где интеграл берется по объему  $V$ , содержащему диполь;  $\omega_{\text{опн}}$  — частота, измеряемая опорным покоящимся наблюдателем (ОПН) в точке  $\vec{r}_0$  по своим часам;  $\vec{p}$  — дипольный момент, измеренный ОПН в своей системе координат.

Наблюдатель, находящийся вдали от черной дыры в результате красного смещения, измерит по своим часам частоту  $\omega = \alpha(r_0) \omega_{\text{опн}}$ .

Непосредственное вычисление коэффициентов  $C_s$  и  $C_{-s}$  по формулам (9) дает тождественно равные нулю коэффициенты для магнитных и электрических с  $m \neq 0$  волн. В областях пространства  $r \geq r_0$  и  $r \leq r_0$  электромагнитное поле описывается скалярными потенциалами  $U^{(e)out}$  и  $U^{(e)in}$ , соответственно

$$U^{(e)in}_{out} = \frac{i\pi\alpha(r_0)}{\omega r_0^2} \sum_l \frac{2l+1}{2T_l(\omega)} \Psi_l^{in}(w, r_0) \Psi_l^{out}(w, r) P_l(\cos \vartheta). \quad (10)$$

Поле имеет три ненулевых составляющих вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :  $E^r, E^\vartheta$  и  $H^\phi$ . Радиальная компонента поля  $E^r$  на бесконечности падает по закону  $r^{-2}$ , около горизонта стремится к нулю как  $\alpha$ .

При малых  $w(r_g \ll 1)$  диполь излучает на бесконечность в главном порядке первую сферическую гармонику амплитудой  $\sim w^2$ ; для излучения, уходящего в дыру, амплитуда пропорциональна  $w$  для всех гармоник.

Предельный переход к  $w = 0$  в формулах (10) дает решение для стационарного диполя, которое определяется следующими потенциалами:

$$\text{для } r \geq r_0: \quad U^{out} = -p \frac{\alpha(r_0)}{r_0^2} \sum_l y_l(r_0) z_l(r) P_l(\cos \vartheta);$$

$$\text{для } r \leq r_0: \quad U^{in} = -p \frac{\alpha(r_0)}{r_0^2} \sum_l z_l(r_0) y_l(r) P_l(\cos \vartheta),$$

где  $y_l(r)$ ,  $z_l(r)$  — гипергеометрические функции Гаусса, являющиеся решением уравнения (5) при  $w = 0$ :

$$y_l(x) = \frac{[(l+1)!]^2}{2(2l)!} x^2 F(1-l, l+2; 3; x)$$

и

$$z_l(x) = (-x)^{-l} F(l, l+2; 2l+2; x^{-1}).$$

Мощности, переносимые волнами на бесконечность  $N^{out}$  и в черную дыру  $N^{in}$ , равны

$$N \frac{out}{in} = \pi \alpha^2(r_0) \frac{p^2}{r_0^4} \sum_l l(l+1)(2l+1) \left| \Psi_l^{out}(w, r_0) \right|^2. \quad (11)$$

Сделаем асимптотические оценки  $N^{out}$  для диполя, находящегося за потенциальным барьером около дыры. При  $w r_g \ll 1$  функция  $\Psi_l^{in}(w, r_0) \sim (w r_g)^{l+1}$ , поэтому мощность будет определяться первым слагаемым ряда (11)

$$N^{out} \cong \frac{8}{3} \pi \alpha^2(r_0) p^2 w^4 = \frac{8}{3} \pi \alpha^6(r_0) p^2 w_{\text{опн}}^4.$$

При  $w r_g \gg 1$  вклад в излучаемую мощность будут давать надбарьерные волны, для которых  $l < \frac{w r_0}{\alpha(r_0)}$ . Переходя в (11) от суммирования к интегрированию

по  $l$  от нуля до  $\frac{w r_0}{\alpha}$  в главном порядке, получим

$$N^{out} \sim \alpha^2(r_0) p^2 w^4 = \alpha^2(r_0) p^2 w_{\text{опн}}^4.$$

В то время как при приближении диполя к дыре интенсивность излучения на бесконечность быстро падает, мощность излучения в дыру растет, расходясь на горизонте.

Распределение мощностей  $S = N^{out} / N^{in}$  между свободным пространством и черной дырой для случая  $w r_g \ll 1$ , когда диполь находится в подбарьерной области ( $r_g + w^2 r_g^3 < r_0 < w^{-1}$ ), дается в главном порядке по  $w$  выражением

$$S \cong \frac{2}{3} w^2 r_0^4 \left( \sum_l \frac{[(l+1)!]^2}{(l+2)_l (l)_{l+1}} z_l^2(r_0) \right)^{-1}.$$

При больших  $r_0 (r_g \ll r_0 < w^{-1})$  можно приближенно считать  $S \cong w^2 r_0^6$ . Полная мощность  $N = N^{out} + N^{in}$ , излучаемая диполем в подбарьерной области при малой частоте, равна

$$N \cong 4\pi w^2 p^2 \alpha^2(r_0) \left[ \frac{2}{3} w^2 + \sum_l \frac{[(l+1)!]^2}{l(l+2)_l (l)_{l+1}} \frac{z_l^2(r_0)}{r_0^4} \right].$$

При больших  $r_0$  приближенно имеем  $N \cong \frac{8}{3} \pi w^2 p^2 [w^2 + r_0^{-6}]$ . При условии  $w^{-1/3} < r_0 < w^{-1}$  полная мощность слабо зависит от положения диполя и по порядку величины равна  $N \cong \frac{8}{3} \pi w^4 p^2$ .

### Меридиональный диполь

Рассмотрим теперь расположенный на полярной оси электрический диполь, ось которого совмещена с меридиональным направлением по нулевому меридиану. Объемное распределение тока для этого случая запишется

$$\vec{j} = j^{\theta} \vec{e}_{\theta} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

где  $\vec{r}_0 = (r_0; 0; 0)$ . Меридиональный диполь будет излучать волны как электрического, так и магнитного типа. Для электрических волн потенциал равен

$$U^{(e) \text{ out}}_{in} = -\frac{ip}{wr_0} \sum_l \frac{2l+1}{2l(l+1)T_l(w)} \partial_{r^*0} \Psi_l^{\text{out}}(w, r_0) \Psi_l^{\text{in}}(w, r) P_l^1(\cos \vartheta) \cos \phi,$$

где  $\partial_{r^*0}$  означает дифференцирование по  $r^*$  в точке  $r_0$ . Магнитные волны определяются потенциалом

$$U^{(m) \text{ out}}_{in} = -\frac{p}{r_0} \sum_l \frac{2l+1}{2l(l+1)T_l(w)} \Psi_l^{\text{out}}(w, r_0) \Psi_l^{\text{in}}(w, r) P_l^1(\cos \vartheta) \sin \phi.$$

Поле меридионального диполя в пространстве Шварцшильда имеет все шесть составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Оно имеет одну азимутальную вариацию, причем в плоскости  $\phi = 0$  отличны от нуля компоненты  $E^r$ ,  $E^{\theta}$  и  $H^{\phi}$ , а в плоскости  $\phi = \frac{\pi}{2}$  — составляющие  $H^r$ ,  $H^{\theta}$ ,  $E^{\phi}$ .

Мощности  $N^{\text{out}}$  и  $N^{\text{in}}$ , излучаемые диполем по всем направлениям, равны

$$N^{\text{out}}_{in} = \frac{\pi p^2}{2r_0^2} \sum_l (2l+1) \left( \left| \partial_{r^*0} \Psi_l^{\text{out}}(w, r_0) \right|^2 + w^2 \left| \Psi_l^{\text{out}}(w, r_0) \right|^2 \right). \quad (12)$$

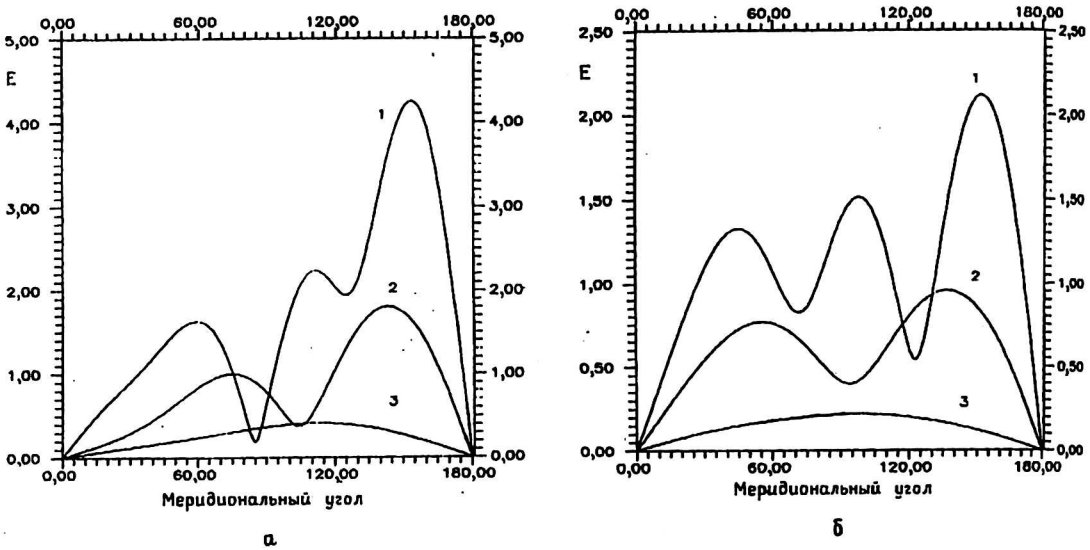
Как и в случае радиального диполя, мощность  $N^{\text{out}}$  для меридионального диполя, находящегося за потенциальным барьером вблизи дыры, при  $w r_g \ll 1$ , будет определяться первым членом ряда (12)

$$N^{\text{out}} \cong p^2 w^4 = \alpha^4(r_0) p^2 w_{\text{ам}}^4.$$

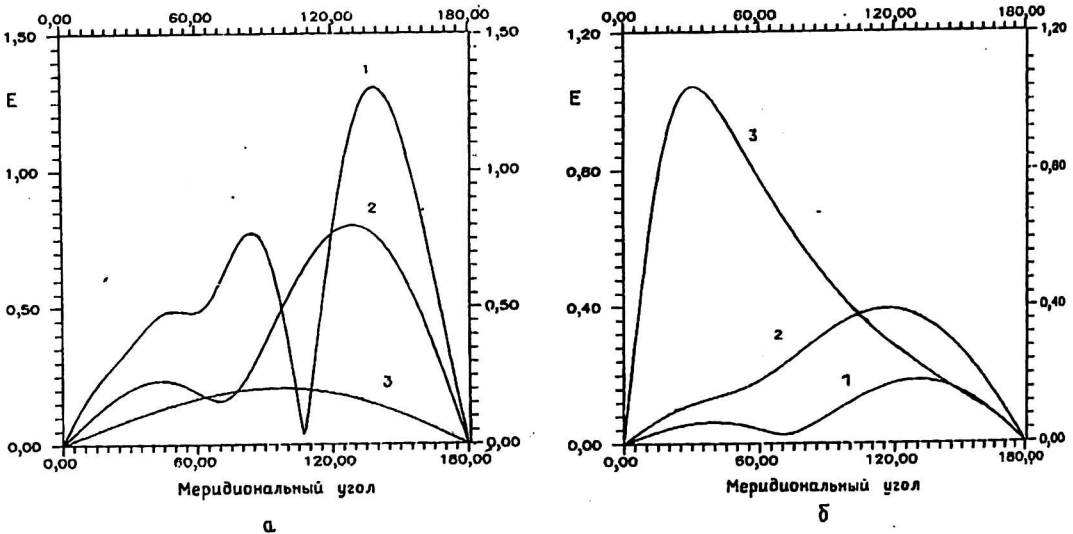
При  $w r_g \ll 1$  вклад в излучаемую мощность будут давать надбарьерные волны, для которых

$$N^{\text{out}} \approx \alpha^{-2}(r_0) p^2 w^4 = \alpha^2(r_0) p^2 w_{\text{ам}}^4.$$

Примеры расчетов излучения диполей представлены на рис. 1—4.



**Рис. 1. Характеристики направленности излучения радиального диполя, расположенного на полярной оси в точке  $r_0 = 2r_g$ ; а — на бесконечности; б — на горизонте, соответствующих значениям частот: 1 —  $\overline{\omega} r_g = 1,5$ ; 2 —  $\overline{\omega} r_g = 1$ ; 3 —  $\overline{\omega} r_g = 0,5$**



**Рис. 2. Характеристики направленности излучения радиального диполя с частотой  $\omega r_g = 1$ , расположенного на полярной оси в зависимости от расстояния: 1 —  $r_0 = 4r_g$ ; 2 —  $r_0 = 2r_g$ ; 3 —  $r_0 = 1,2r_g$ ; а — на бесконечности; б — в черную дыру**

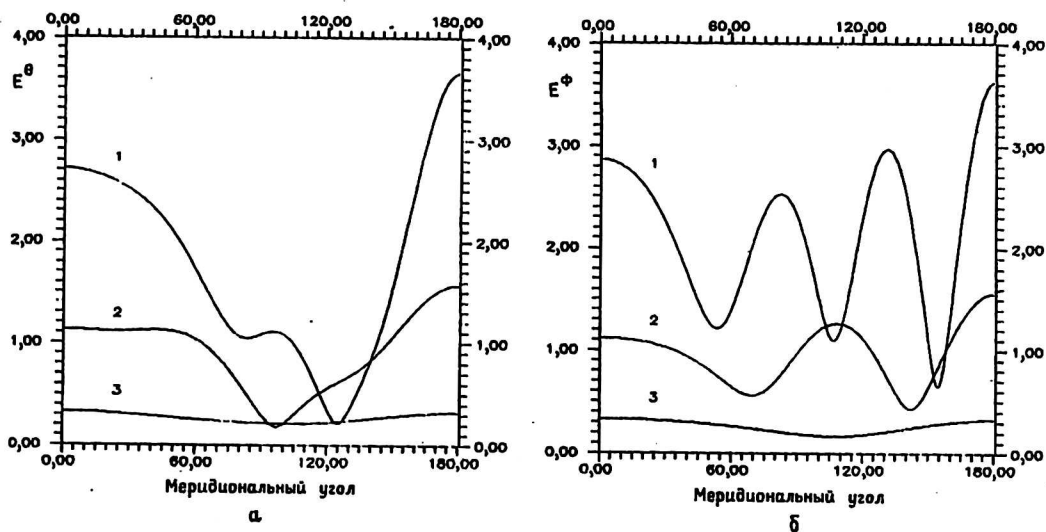


Рис. 3. Диаграммы направленности излучения на бесконечность меридионального диполя, расположенного на полярной оси вдоль нулевого меридиана. Характеристики приведены для различных частот: 1 —  $wr_g = 1,5$ ; 2 —  $wr_g = 1$ ; 3 —  $wr_g = 0,5$ ;  
 а — в плоскости  $\phi = 0$  (поле  $E^\theta$ ); б — в плоскости  $\phi = \frac{\pi}{2}$  (поле  $E^\phi$ )

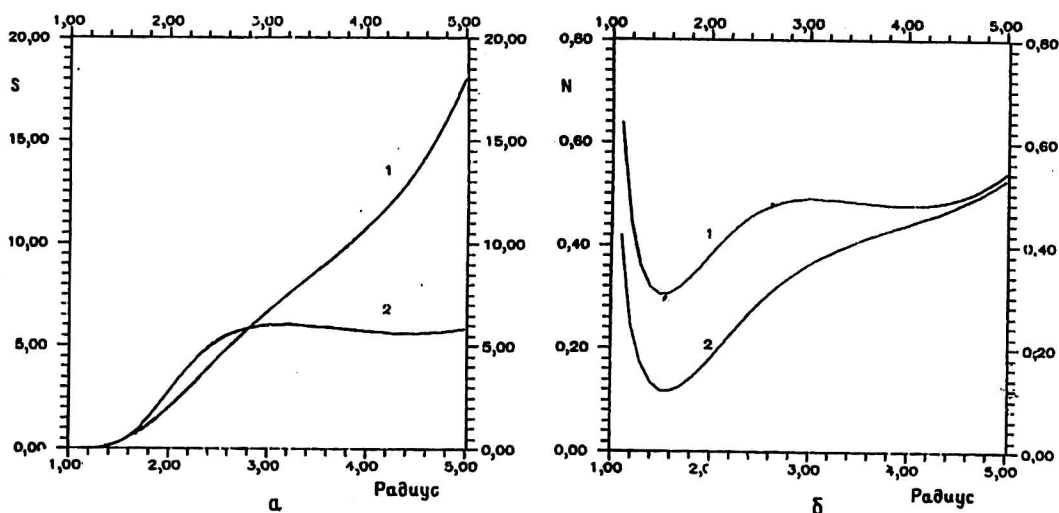


Рис. 4. Деление мощностей  $S$  (а); полная мощность излучения  $N$ , соответствующая радиальному (1) и меридиональному (2) диполям (б), в зависимости от расположения при постоянной собственной частоте  $w_{\text{онн}}r_g = 0,5$

### В ы в о д ы

1. Численный расчет, проведенный для радиального диполя, показал, что с возрастанием частоты характеристика направленности излучения на бесконечность приобретает все более многолепестковый вид, причем главный максимум

излучения сдвигается в сторону больших углов и прижимается к направлению  $\vartheta = \pi$ . Число лепестков диаграммы определяется числом меридиональных гармоник, дающих основной вклад, и не превосходит величину  $\omega R$ .

Схожую картину излучения имеет поле радиального диполя над проводящим шаром [8]. Однако в этом случае в южном полушарии ( $\vartheta > 90^\circ$ ) находятся побочные лепестки, а главный максимум расположен в районе  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  и при увеличении  $\omega R$  ( $R$  — радиус шара) сдвигается в сторону меньших углов.

2. Диаграмма направленности излучения в черную дыру от радиального диполя подобна характеристике излучения на бесконечность. При этом главный максимум выражен слабее.

3. Для меридионального диполя (так же, как и для радиального) черная дыра, в отличие от проводящего шара, не оказывает экранирующего действия, и самое яркое пятно на сфере находится при  $\vartheta = \pi$ .

4. Полные энергии, излученные меридиональным и радиальным диполями, имеют минимум, приходящийся на область  $r \sim 1,5 r_g$ , который при возрастании частоты сдвигается в сторону меньших  $r$ .

### Литература

1. Chrzanowski P. L., Misner C. W. // Phys. Rev. D 10, 1974. P. 1701.
2. Chrzanowski P. L. // Ibid, D 11, 1976. P. 806.
3. Gal'tsov D. V. // Journ. of Phys. A: Math. Gen., 1982, № 15. P. 3737.
4. Thorne K. S., Macdonald D. A. // Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1982. № 198. P. 339.
5. Price R. H. // Phys. Rev. 1972. D 5. P. 2439.
6. Вайнштейн Л. А. Колебания и волны. — М.: Сов. радио, 1957.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Т. 2. — М.: Наука, 1988. С. 333.
8. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983. С. 150.

*Автор выражает благодарность  
С. В. Дручинину за помощь и полезные советы.*

## GENERATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN SCHWARZSCHILD SPACETIME BY TIME-HARMONIC SOURCE

*D. N. Klochkov*

Physical Institute of RAS, Moscow, Russia

*Maxwell's equations for time-harmonic source in Schwarzschild geometry are solved by using Lorentz's lemma. The directivity diagrams are obtained for radial and meridional dipoles in close proximity to a black hole. The total power of radiation and the distribution of power between space and the black hole are found.*