УДК 533.9.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. Ермилов

Московский научно-исследовательский институт радиосвязи, Москва, Россия

Определение и представление потенциала рассеяния через вторую производную радиальной волновой функции уравнения Шредингера на основе физической аналогии, когда разные явления имеют сходство в математической форме.

Отыскивается уравнение для потенциала рассеяния на основе физической аналогии, когда разные явления имеют сходство в математической форме.

Процесс рассеяния описывается волновой функцией ψ уравнения Шредингера

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{h^2}E\Psi = 0;$$

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{h^2}(E-U)\Psi = 0 \tag{1}$$

соответственно до и после рассеяния при положительных значениях энергии E. Полагая, что потенциал U определяется посредством E, принимаем как исходное уравнение (1), которое для радиальной волновой функции имеет вид

$$\Psi'' + \frac{2}{r}\Psi' + \frac{2m}{h^2}\left(E - \frac{h^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Psi = 0. \tag{2}$$

Потенциал U представляется через вторую производную волновой функции таким образом, что

$$U = \frac{h^2}{2m}\Psi'' \tag{3}$$

аналогично тому, как $\frac{d^2w}{dr^2}$ или $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ определяют упругое состояние мембраны и нити через момент от упругих сил $M = D\,\frac{d^2W}{dr^2}$ и $M = I\varphi''$, где W — прогиб по поверхности мембраны на радиусе r; φ — угол поворота инерционной массы, раскручиваемой с ускорением с помощью нити; D и I — константы (для нуклон-нуклонного взаимодействия $U = 41{,}6\ \psi''$ МэВ).

Поскольку U находится в зависимости от E, то в уравнении (2) получим

$$\Psi'' + \frac{2}{r}\Psi' + \frac{2m}{h^2}\left(-K\frac{h^2}{2m}\Psi'' - \frac{h^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Psi = 0,$$

где K — некоторая константа. Отсюда имеем

$$\Psi'' = -\frac{2}{r}\frac{\Psi'}{1-K\Psi} + \frac{l(l+1)}{r^2}\frac{\Psi}{1-K\Psi}. \tag{4}$$

Используя уравнение (4), можно установить некоторое правило для построения потенциальных функций согласно выражению (3) применительно к потенциалам рассеяния для сильного и кулоновского взаимодействий.

Число парциальных волн, вклад которых надо учитывать при рассмотрении рассеяния, определяется энергией E частицы, в связи с чем могут быть получены потенциалы рассеяния для различных значений l при заданной энергии E.

Взаимодействие между двумя частицами будет эффективным, когда они находятся друг от друга на расстоянии ρ меньшем, чем радиус a действия ядерных сил, $\rho < a$.

В соответствии с моментами количества движения, равными 0, 1, 2, ..., l пучок падающих частиц разделяется на цилиндрические зоны с радиусом $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = ƛ$, $\rho_2 = 2ƛ$, ..., $\rho_l = lƛ$, где $ƛ$ — дебройлевская длина волны.

Поскольку $\rho_l < a$, то $l < \frac{a}{ƛ}$. В с.ц.и. $ƛ = \frac{9 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{E, \text{МэВ}}}$, где E берется в л.с.к.

Для больших значений r возможно решение (4) в виде $\frac{1}{r^2}$, что соответствует $\psi' \to \text{const}$. Тогда при $r \to \infty$ имеем $\psi = r$. Если принять $\psi' = 1$, то будем иметь $\Psi = r$ и для некоторого r, например $r = 10\,000$, получим $\psi = 10\,000$. Берем К = 1. Возьмем также значения l, начиная с $l = 5$ до $l = 0$. При $E = 250$ МэВ $ƛ = 0{,}57 \cdot 10^{-13}$ см.

Для $l = 5$ должно быть $\rho = 2{,}85 \cdot 10^{-13}$, что меньше a ~3ф (ф — радиус Ферми), т. е. находится в зоне действия ядерных сил. Решение $\psi''(r)$, соответственно принятым исходным данным, дает $\psi''_{\min} = -0{,}00134$ при $r = 124$. Для образования связанного состояния должно быть $|V| > E$. Поскольку имеем рассеяние, то как равновесный случай рассматриваем $|V_{\min}| = E$, т. е. $V_{\min} = -250$ МэВ.

Зависимость $\psi''(r)$ имеет ту же характерную особенность, что и потенциал сильного взаимодействия, соответственно крутому подъему при некотором r.

Значения Z характеризуются неким масштабом μ, если считать, что при $r \approx 3$ф величина $V \to 0$. Значение $\psi''_{\min} = -0{,}00134$ занимает по r около 1/6 интервала до ψ''~0, в связи с чем $r = 124$ можно представить как $r = 0{,}5$ф. Тогда $\mu = \frac{124}{0{,}5} = 248$.

Поскольку $\Psi'' = \frac{d^2\psi}{dr^2}$, то $\psi''_{r=0,5} = \psi''_{r=124}\,\mu^2 = -0{,}00134 \cdot 248^2 = -82{,}4$. Соответственно $V = \frac{h^2}{2m}\psi'' = -250 = V_{\min}$, должно быть $\psi'' = -250/\frac{h^2}{2m} = -6$, что меньше $\Psi''_{r=0,5}$ в $82{,}4/6 = 13{,}7$. Значение $\Psi''_{r=0,5}$ соответственно $V_{\min} = -250$ можно получить, если взять в уравнении (4) $K = 13{,}7$.

В общем, преобразование к новым значениям по всем r, ψ'', и ψ' выглядит так:

$$\mu = \frac{r = 124}{r = 0{,}5} = 248;$$

$$\Psi''_{r=0,5} = \frac{\mu^2}{K}\Psi''_{r=124};$$

$$\Psi'_{r=0,5} = \frac{\mu}{K}\Psi'_{r=124}.$$

Сама же Ψ-функция при таком подобном преобразовании остается той же самой, поскольку преобразование, в котором присутствует коэффициент μ, связано только с координатой r.

$$\Psi_{r=0,5} = \frac{1}{K}\Psi_{r=124}.$$

Зависимость $V = \frac{h^2}{2m}\psi''$, где m — приведенная масса двух нуклонов, а $\psi''(r)$ берется после подобного преобразования, представлена на рис. 1 для $l = 5, 4, 3, 2, 1, 0$.

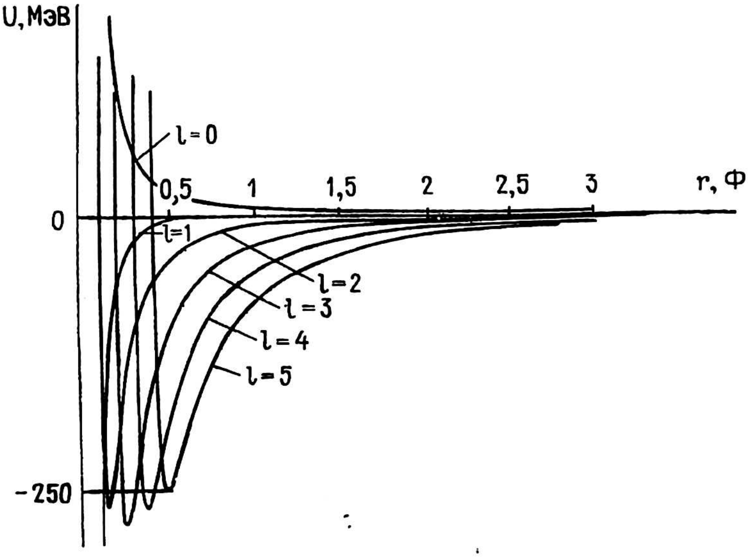

Рис. 1. Потенциалы рассеяния при различных l для сильного взаимодействия

Для каждого из значений l при одной и той же энергии E будет свой потенциал рассеяния V.

Потенциал U может быть представлен из уравнения (4) также, как кулоновский, если провести решение с исходными данными $\Psi = -10\,000$, $r = 10\,000$, $\Psi' = 1$, $l = 5$. При этом $K = -0{,}0007$, что соответствует энергии кулоновского отталкивания двух протонов. С ростом начального значения Ψ первое слагаемое в уравнении (4) становится пренебрежительно малым, тогда $\Psi'' = \frac{C}{r^2}$ от $r = 0$ до $r = \infty$. Новое значение $\Psi'' = \sqrt{C} / R$, где $R = \sqrt{r^2}$. За счет K константа $\sqrt{C}$ может быть приведена к значению соответственно кулоновскому потенциалу

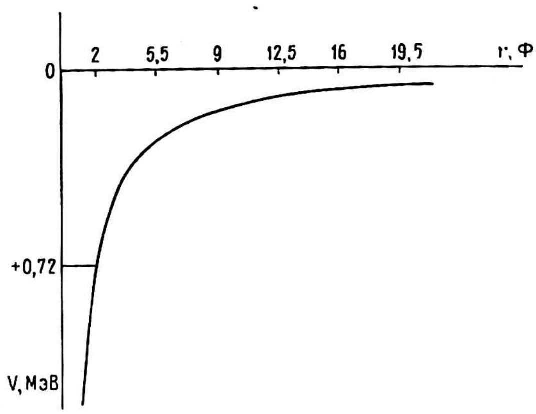

Рис. 2. Кулоновский потенциал рассеяния

на рис. 2 при $r = R$, т. е. будем иметь тот же кулоновский потенциал, что и на рис. 2, когда r и R неразличимы.

MODELLING OF THE POTENTIAL FUNCTIONS

V. G. Ermilov
Moscow Research Institute of radio communication, Moscow, Russia

Definition and presentation of the dispersion potential through the double differentiation of the radial wavy function from Shredinger's equation on the basis of the physical analog, when the different phenomenons have the analog in the mathematic form.