

УДК 537.523

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОРОГОВ ПРОБОЯ В СВЧ-ПОЛЯХ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ С УЧЕТОМ ПОЛЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

*О. В. Ломакин*

Московский радиотехнический институт РАН, Москва, Россия

*Приведены результаты численных расчетов порогов пробоя воздуха в СВЧ-полях в зависимости от давления, полученные на основе уравнения диффузии с источниками возникновения и исчезновения электронов с учетом полей поляризации. Уточнены имеющиеся расчетные данные по порогам пробоя в СВЧ-полях.*

Пробой газа в СВЧ-поле описывается уравнением диффузии с объемными источниками [1—10]. Источником электронов в нем служит ионизация, а исчезновение электронов обусловлено прилипанием электронов к нейтральным частицам и диффузионными потерями. Необходимо отметить, что пробой рассматривается как процесс статистический. Порог пробоя в этом случае определяется соотношением между скоростями рождения и гибели электронов лишь при достаточно длительном ( $\sim 10^{-5}$ – $10^{-6}$  с и более) воздействии поля, когда заведомо хватает времени на рождение многих поколений электронов.

Всякий раз при исследовании порогов пробоя возникает вопрос о характере диффузии электронов. Начальная стадия газового разряда, а именно пробой, характеризуется малым количеством заряженных частиц обоих знаков. Это позволяет считать, что частицы (ионы и электроны) диффундируют независимо друг от друга, т. е. в уравнении диффузии должен стоять коэффициент свободной электронной диффузии. В процессе развития электронной лавины на диффузионное расплывание электронного облака начинают влиять поля поляризации, особенно это актуально в задачах, где пробой происходит в ограниченном пространстве (например между двумя плоскими параллельными поверхностями, как в рассматриваемом ниже случае), тогда электроны, оседая на стенках, способствуют скорейшей поляризации заряда в плазме. Диффузия в этом случае становится амбиполярной, и это требует уточнения уравнения баланса электронов. Момент перехода диффузии из свободной в амбиполярную и сам вид коэффициента амбиполярной диффузии для каждого конкретного случая будут свои, их вычисление представляет определенные трудности, особенно в задачах со многими параметрами (давление газа, размер разрядной области и т. д.).

В практических расчетах в связи с этим пользуются коэффициентом свободной электронной диффузии, что приводит к завышению порогов пробоя, причем, чем ниже давление, тем больше становится расхождение с измеренными значениями (при низких давлениях, когда  $p < 10$  торр, она составляет  $\sim 20-30\%$ ) [1, 2].

Цель настоящей работы — дать ответ на вопрос, при каких условиях (в какой момент времени, при каких давлениях) свободная электронная диффузия становится амбиполярной; предлагается универсальный метод расчета порогов СВЧ-пробоя в довольно широком диапазоне давлений, при различных размерах разрядной области, при различных длинах волн СВЧ-излучения. В уравнение диффузии были добавлены члены, учитывающие поля поляризации, а для нахождения этих полей к уравнению диффузии для электронов были добавлены уравнения диффузии для положительных и отрицательных ионов. Для решения полученной системы уравнений была разработана и применена компьютерная программа. Результаты вычислений порогов СВЧ-пробоя приводятся в виде графика  $E_{\text{проб}}(p)$  и дается сравнение с экспериментальными данными, взятыми из [1] и [2], и с расчетами, не учитывающими амбиполярность диффузии.

Ниже речь пойдет о воздухе в объеме, ограниченном двумя плоскими, бесконечными поверхностями с расстоянием  $\Delta$  между ними, как показано на рис. 1.

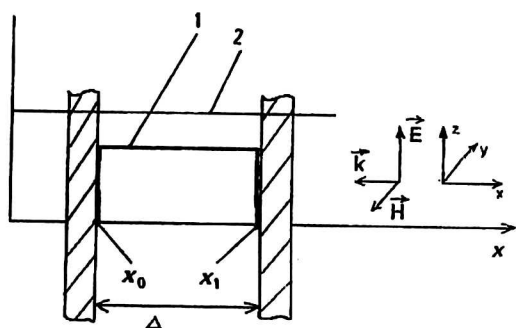


Рис. 1. Результаты вычислений порогов СВЧ-пробоя:

- 1 — начальная концентрация электронов (положительных ионов);
- 2 — амплитуда внешнего СВЧ-поля

### Обзор имеющихся теорий

Теория СВЧ-пробоя на основе диффузионного уравнения была предложена А. Мак-Доналдом. В дальнейшем ее развил Ю. П. Райзер, который уже предполагал наличие амбиполярности, но расчеты проводил с коэффициентом свободной электронной диффузии. Суть теории состоит в том, что плотность электронов как функция координат и времени подчиняется уравнению диффузии (1) с объемными источниками:

$$\partial n_e / \partial t = D \Delta n_e + (v_i - v_a) n_e. \quad (1)$$

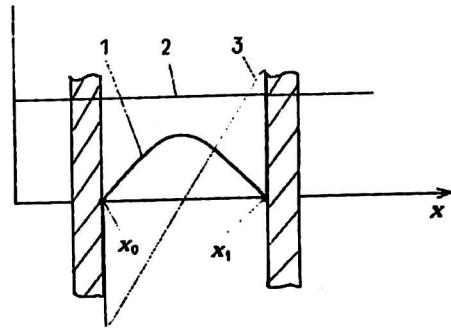
В предположении квазистационарности энергетического спектра электронов, который устанавливается в поле, зависимость  $v_i(E)$  определяется среднеквадратичной  $E$  или амплитудной (как в нашем случае)  $E_{\text{амп}}$  величиной СВЧ-поля. Ввиду малости числа электронов  $D = D_e$ . Согласно соотношению Эйнштейна, диффундирующая частица проходит за время  $t$  расстояние  $x \sim \sqrt{Dt}$ , тогда для средней скорости диффузионных потерь можно записать:

$$(\partial n_e / \partial t)_{\text{diff}} = -v_d n_e = -(D / \Lambda^2) n_e; \quad v_d = D / \Lambda^2,$$

где  $\Lambda$  — некоторый масштаб длины, характеризующий размеры объема (рис. 2).

Рис. 2. Вид характеристик разряда по прошествии некоторого времени:

- 1 — концентрация электронов;
- 2 — амплитуда внешнего СВЧ-поля;
- 3 — поле поляризации



Для определения  $\Lambda$  необходимо решить задачу на собственные значения (уравнение (1) без  $v_a$ ) с соответствующими граничными условиями, отражающими тот факт, что на стенках электроны рекомбинируют, и  $n_e = 0$ . Для плоско-го слоя с расстоянием  $\Delta$  между пластинами  $\Lambda = \Delta/\pi$ . Если теперь предположить, что поле однородно в пространстве, то  $v_i(E)$  не меняется от точки к точке, и для полного числа электронов в разрядном объеме имеем:

$$\partial N_e / \partial t = (v_i - v_a - v_d)N_e, \quad N_e = N_{e0} \exp[(v_i - v_a - v_d)t], \quad (2)$$

где  $N_{e0}$  — число затравочных электронов.

На рис. 3 приведены расчеты для воздуха при комнатной температуре, при  $\lambda = 3,19$  см. и  $\Lambda = 0,22$  см.  $v_a = 10^5 p$ , где  $p$  в торр, а  $v_a$  в 1/с.

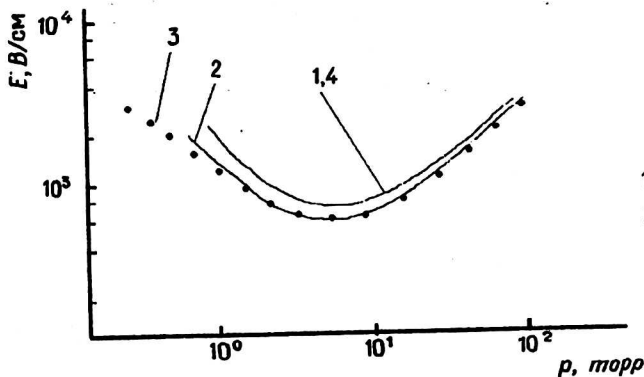


Рис. 3. Пороги СВЧ-пробоя: воздух, частота  $f = 9,4$  ГГц ( $\lambda = 3,19$  см);

диффузионная длина  $\Lambda = 0,22$  см:

- 1 — расчеты без учета полей поляризации;
- 2 — расчеты с учетом полей поляризации;
- 3 — экспериментальные данные из [2];
- 4 — аналитическая зависимость (4)

В постоянном поле частота ионизации может быть аппроксимирована общепринятой степенной зависимостью:  $v_i(E) = v_a (|E| / E_{cr})^b$ , где  $E_{cr} \approx 30 p$  ( $p$  — в торр, а  $E$  — в В/см),  $E$  — постоянное поле.

В случае СВЧ-полей вместо  $E_{cr}$  и  $E$  в эту формулу следует подставлять эффективные значения обоих полей:

$$E_{эф} = E_{амп} / \sqrt{2(1 + \omega^2 / v_{tr}^2)},$$

$$E_{эф}^{cr} = 30 p = E_{эф}^{cr} / \sqrt{2(1 + \omega^2 / v_{tr}^2)}.$$

Таким образом, в формуле для  $v_i(E)$  следует писать:

$$E_{cr} = E_{амп}^{cr} \approx 40 p \sqrt{1 + \omega^2 / v_{tr}^2} \quad (3)$$

и  $|E| = |E_{амп}|$  — амплитудное значение СВЧ-поля.

Использование эффективного поля в нашем случае оправдано, так как давление не превышает 100 торр и выполнено условие  $v_{tr} \delta \ll \omega$ , где  $\delta \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$  — коэффициент передачи энергии электронов ( $E \sim E_{tr}$ ),  $\omega \sim 10^{10}$  рад/с — частота внешнего СВЧ-излучения.

Для воздуха  $\beta = 5,3$  [2].

Из формулы (2) видно, что критерием пробы является равенство  $v_i = v_a + v_d$ , т. е.  $E_{проб} = E_{cr}(1 + D_e / \Lambda^2 v_a)^{1/\beta}$ . Если теперь подставить значение  $D_e = T_e / m_e v_{tr}$  ( $v_a \approx 10^5 p$ ,  $v_{tr} \approx 5 \cdot 10^9 p$ ,  $T_e \approx 1$  эВ =  $1,6 \cdot 10^{-12}$  эрг,  $p$  измеряется в торр, а  $\Lambda$  и  $\lambda$  — в см) в выражение (3) для  $E_{cr}$  то получим:

$$E_{проб} = 40(1 + 3,6 / \Lambda^2 p^2)^{1/\beta} \sqrt{p^2 + 1,4 \cdot 10^3 / \lambda^2}. \quad (4)$$

Аналитическая зависимость (4) также приведена на рис. 3.

Длина свободного пробега электронов  $l = 1 / N\sigma_{tr} \approx 1 / 127 p$  ( $p$  — в торр,  $l$  — в см).

Диффузионное приближение работает при  $k \ll \Delta$ , т. е.  $p \gg 1/127\Delta$  ( $\Delta$  — в см).

При  $\Lambda = 0,22$  см  $\Delta = \Lambda\pi = 0,69$  см и тогда, соответственно, условие для  $p$  будет:  $p \gg 0,01$  торр.

Приведенные на рис. 3 расчеты с  $D = D_e$  показывают, что теоретическая зависимость из [1] лежит выше, чем экспериментальная.

### Учет полей поляризации

Сделаем шаг назад от уравнения диффузии (1) и запишем более общее уравнение:

$$\partial n_e / \partial t + \text{div} \vec{\Gamma} = q, \quad (5)$$

где  $\vec{\Gamma} = -n_e \mu_e \vec{G} - D_e \nabla n_e$  — поток электронов;

$q$  — источник их образования (исчезновения);

$\mu_e$  — подвижность электронов.

Тут, помимо диффузионного члена, к потоку электронов добавлен член, учитывающий дрейф в поле поляризации  $\vec{G}$ . Для  $\vec{G}$  можем записать уравнение Максвелла:

$$\text{div} \vec{G} = 4\pi\rho = 4\pi e(n_+ - n_- - n_e).$$

В этом уравнении учтено, что в процессе ионизации наряду с электронами образуются положительные ионы, а в процессе прилипания — отрицательные ионы.

Подставив выражение для  $\vec{\Gamma}$  в уравнение (5) и, расписав его вместе с уравнением для поля поляризации в плоском приближении, как показано на рис. 1, получим:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \mu_e G \frac{\partial n_e}{\partial x} + n_e \mu_e \frac{\partial G}{\partial x} + D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + n_e (v_i(E) - v_a). \quad (6)$$

Аналогичные уравнения необходимо записать для положительных и отрицательных ионов:

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = -\mu_+ G \frac{\partial n_+}{\partial x} - n_+ \mu_+ \frac{\partial G}{\partial x} + D_+ \frac{\partial^2 n_+}{\partial x^2} + n_+ v_i(E), \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} = \mu_+ G \frac{\partial n_-}{\partial x} + n_- \mu_+ \frac{\partial G}{\partial x} + D_+ \frac{\partial^2 n_-}{\partial x^2} + n_e v_a. \quad (8)$$

Для поля  $\bar{G}$  имеем:  $\partial G / \partial x = 4\pi e(n_+ - n_- - n_e)$ .

Масса и температура отрицательных и положительных ионов приняты одинаковыми и равны массе и температуре нейтральных молекул. Разряд происходит в промежутке между двумя плоскими пластинами. Пластины и плазма внешнего СВЧ-поля не искажают, т. е. оно остается постоянным и от  $x$  не зависит. На стенках, в точках  $X_0$  и  $X_1$ ,  $n_e = 0$ , но так как заряд накапливается на поверхности, то необходимо написать граничные условия для поля поляризации  $G$  (см. рис. 2). Напишем его для точки  $X_0$ , а для  $X_1$  — будет аналогично.

Прирост заряда на единице площади поверхности за время  $dt$  равен:

$$\begin{aligned} d\sigma &= dt e (\Gamma_{-x}(x_0) + \Gamma_{ex}(x_0) - \Gamma_{+x}(x_0)); \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -G(\mu_e n_e + \mu_+ n_+ + \mu_+ n_-) - D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - D_+ \frac{\partial n_-}{\partial x} + D_+ \frac{\partial n_+}{\partial x}. \end{aligned} \quad (9)$$

В этом уравнении поле  $G$  вычисляется в точке  $X_1$ , а все концентрации берутся чуть правее этой точки из-за того, что на границе концентрации обращаются в нуль,  $\sigma$  — это поверхностная плотность заряда. Поле в точке  $X_0$  вычисляется как поле равномерно заряженной бесконечной плоскости:  $G(x_0) = 4\pi\sigma$ .

Результаты численного решения уравнений (6)–(8) с граничным условием (9) для поля  $G$  в точках  $X_0$  и  $X_1$  и с граничным условием  $n_e = 0$  в точках  $X_0$  и  $X_1$  приведены на рис. 3. Расчеты выполнялись для воздуха при тех же значениях  $p$ ,  $\lambda$  и  $\Lambda$ , что и для предыдущего графика 1, рис. 3. Частота ионизации аппроксимировалась той же функцией. Концентрация электронов, спадая вначале из-за диффузионных потерь, начинала затем расти вследствие влияния полей поляризации  $D_a < D_e$  (рис. 4, в).

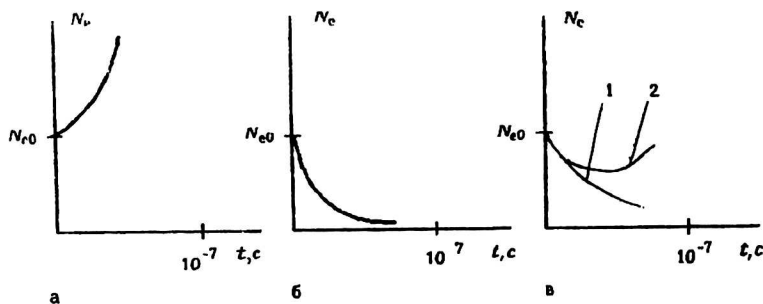


Рис. 4. Расчетные зависимости полного числа электронов в разрядном промежутке от времени:

а —  $v_f(E) > v_a + v_d^0$ ; б —  $v_f(E) < v_a + v_d^0$ ; в —  $v_a + v_d^0 < v_f(E) < v_a + v_d^0$ ;  
1 — без учета амбиполярности; 2 — с учетом амбиполярности

Время этого процесса  $\sim 10^{-7}$  с, что намного меньше среднего времени импульса СВЧ (время импульса может быть взято, например, 40 мкс, как в установке, описанной в [5]), поэтому факт пробоя определялся наличием нарастающего решения для  $n_e$  (т. е. математический критерий пробоя).

Сравнивая постановку задачи с аналогичной в [1], необходимо отметить, что в условиях симметрии не имеет значения металлические стенки (в работе [1] — это стенки резонатора, т. е. они имеют равный потенциал) или диэлектрические, не соединенные на бесконечности.

Данная теория дает лучшее согласие с экспериментом, нежели теория, построенная без учета амбиполярности диффузии.

### Обсуждение и сравнение результатов

По мере развития пробоя в промежутке между двумя поверхностями устанавливалось параболическое распределение электронной концентрации (см. рис. 2). Поле поляризации было соответственно линейной функции координаты  $x$ .

Из рис. 3 видно, что учет полей поляризации позволяет уточнить имеющиеся расчеты с коэффициентом свободной электронной диффузии в уравнении (1) и дает неплохое согласие с экспериментом в области высоких давлений и в области минимума. В области высоких давлений диффузионные потери электронов незначительны, и так как  $D_+ \ll D_e$ , то поляризации тоже не возникает, поэтому графики 1 и 2 (см. рис. 3) мало отличаются друг от друга и неплохо согласуются с экспериментом.

Иное дело в области низких давлений, когда диффузионные потери существенны, и в связи с этим возникает поляризация, тормозящая свободную электронную диффузию ( $D_a < D_e$ ), и в этом случае поляризацию необходимо учитывать, дабы не получить завышенные значения  $E_{\text{проб}}$ . С другой стороны, при совсем низких давлениях вид функции  $v_i(E)$  становится иным (он вычисляется из кинетического уравнения [2]) —  $v_i(E) \sim E^2$ . Неучет этого факта приводит к тому, что  $E_{\text{проб}}$  при низких давлениях ( $p < 1$  торр) растет гораздо быстрее, чем это есть на самом деле (см. рис. 3). При таких давлениях длина свободного пробега электронов  $l$  становится сравнимой с размерами объема —  $l \sim \Delta$ , и диффузионное приближение перестает работать, поэтому учет изменения вида функции  $v_i(E)$  работает лишь в небольшой области давлений порядка нескольких торр.

На рис. 4 изображены графики зависимости полного числа электронов в разрядном промежутке от времени  $N_e = \int_{X_0}^{X_1} n_e(x) dx$ . На рис. 4, а, б показаны си-

туации, когда  $v_i(E) > v_a + v_d^e$  и  $v_i(E) > v_a + v_d^a$ , соответственно ( $v_d^a$  — частота диффузионных потерь амбиполярная;  $v_d^e$  — свободная электронная). В этих случаях графики 1 и 2 на рис. 4 совпадают, но в случае, когда  $v_a + v_d^a < v_i(E) < v_a + v_d^e$  график 1 на рис. 4, в однозначно спадает, и пробоя нет, а график 2, по прошествии некоторого времени, начинает расти, так как диффузия начинает переходить из свободной в амбиполярную.

Таким образом, в диапазоне  $v_a + v_d^a < v_i(E) < v_a + v_d^e$  необходимо учитывать амбиполярность диффузии. В противном случае значения пробойных полей будут завышены (см. рис. 3). В области давлений от 10 торр и ниже (до границы применимости диффузионного приближения  $\sim 0,1$  торр) завышение составляет  $\sim 20\%$ . Предложенный метод является в этом смысле универсальным, так как в нем амбиполярность диффузии заложена автоматически и это обеспечивает плавный переход от свободной электронной диффузии к амбиполярной. Неучет полей поляризации приводит к погрешности в вычислении пробойного напряжения, которая становится тем больше, чем ниже давление. Меняя параметры в условии задачи ( $\lambda, \Lambda, p$  и т. д.), можно с достаточной степенью точности отве-

тить в каждом конкретном случае на вопрос, пробьется или нет газовый промежуток при данном приложенном поле  $E$ . Несоответствие ранее сделанных теоретических расчетов с экспериментами, особенно при низких давлениях, объясняется не столько близостью границы применимости диффузионного приближения [2], сколько неучетом амбиполярного характера диффузии.

### Литература

1. Мак-Доналд А. Сверхвысокочастотный пробой в газах. — М., 1969.
2. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. — М.; 1987. — 590 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М., 1982. — 620 с.
4. Грачев Л. П., Есаков И. И., Ходатаев К. В., Мишин Г. И. //ЖТФ, 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 32.
5. Грачев Л. П., Есаков И. И., Ходатаев К. В., Цыпленков В. В. Установка для исследования импульсного безэлектродного СВЧ-разряда в газах высокого и среднего давления //Препринт/ МРТИ РАН 9005. — М.; 1990. — 14 с.
6. Грачев Л. П., Есаков И. И., Ходатаев К. В., Мишин Г. И., Цыпленков В. В. //ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 1. С. 74.
7. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М., 1994. — 526 с.
8. Grachev L. P., Esakov I. I. and Mishin G. I. //Tech. Phys., 1996. № 41 (12). P. 1204.
9. Гильденбург В. Б., Семенов В. Е. //Физика плазмы. 1988. Т. 14. Вып. 4.
10. Грачев Л. П., Есаков И. И., Ходатаев К. В., Мишин Г. И. //ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 5. С. 21.

---

*Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю К. В. Ходатаеву за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также Л. П. Грачеву за полезные обсуждения.*

## THE CALCULATION OF BREAKDOWN THRESHOLDS IN MICROWAVES ON THE BASIS OF AN EQUATION OF DIFFUSION IN VIEW OF POLARIZATION FIELDS

*O. V. Lomakin*

Moscow radio-technical institute RAS, Moscow, Russia

*The results of numerical accounts of breakdown thresholds of air in microwave fields depending on pressure, received on the basis of an equation of diffusion with sources of occurrence and disappearance of electrons in view of fields of polarization are presented. Already existing calculation data on the breakdown thresholds in microwaves are defined more precisely.*