УДК 533.9.01

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМО-ЭФФЕКТА ДЛЯ ОДНОРОДНО РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ПЛАЗМЕННОГО ШАРА

Ю. В. Думин
Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН,
г. Троицк Московской обл., Россия
E-mail: dumin@center.izmiran.troitsk.ru

Дано краткое описание метода решения уравнений динамо-эффекта в расширяющемся плазменном шаре, основанного на использовании обобщенных сферических функций (которые представляют собой обобщение полиномов Лежандра). Приведены примеры конкретных аналитических решений для простейших граничных условий.

Постановка задачи

Проблема генерации электрических полей и токов в слабоионизованном плазменном шаре, расширяющемся во внешнем магнитном поле B_0 (рисунок, а), имеет важное значение при описании экспериментов по искусственной инжекции плазмы в околоземное космическое пространство [1], а также в некоторых других областях физики. Этот процесс может быть описан хорошо известной системой уравнений, включающей в себя:

стационарное уравнение непрерывности электрического тока

$$\operatorname{div} j = 0, \tag{1}$$

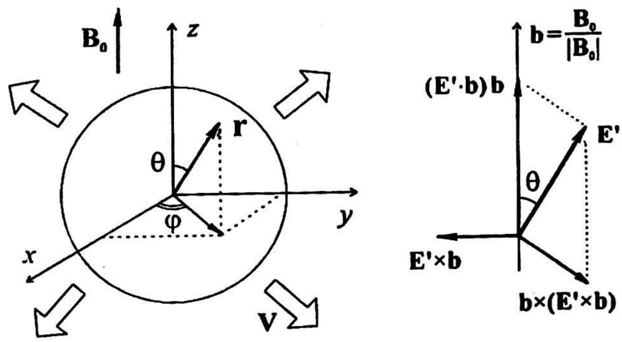
обобщенный закон Ома, выражающий плотность тока j через продольную проводимость σ_0, проводимости Холла σ_H и Педерсена σ_P (см. рисунок, б),

$$j = \sigma_0(E'b)b + \sigma_P(b \times (E' \times b) - \sigma_H(E' \times b), \qquad b = B_0 \,/\, |B_0|, \tag{2}$$

а также выражение для напряженности электрического поля E' в системе координат, движущейся со скоростью V,

$$E' = E + V \times B_0 \,/\, c, \qquad E = -\operatorname{grad}\tilde{\varphi}, \tag{3}$$

где c — скорость света в вакууме; $\tilde{\varphi}$ — потенциал электрического поля (тильда была использована здесь для того, чтобы отличить его от азимутального угла).



а б

Система координат, используемая для описания расширяющегося сгустка плазмы (а); разложение плотности электрического тока в терминах продольной, педерсеновской и холловской компонент (б)

Предполагается, что поле скоростей $V(r,\ t)$ в (3) определяется движением нейтральной компоненты плазмы. В последующих расчетах будем использовать модель однородно расширяющегося шара, граница которого движется по линейному закону со скоростью u_0:

$$V_r(r,t) = \left(u_0 / R(t)\right) r\ , \tag{4}$$

Такой закон движения соответствует асимптотической стадии инерциального разлета, когда основная часть начальной тепловой энергии газа перешла в кинетическую энергию его макроскопического движения [2].

Общее решение для потенциала электрического поля

Удобно ввести сферическую систему координат (r, θ, φ), (см. рисунок, а) и переформулировать исходную систему уравнений (1)–(3), (4) в терминах единственной неизвестной переменной . Подставляя (2), (3) и (4) в (1), получаем требуемую формулу (где $\xi = \cos\theta$):

$$\begin{aligned}(\sigma_0 - \sigma_P)\Bigg[\xi^2 r^2 \frac{\partial^2 \tilde\varphi}{\partial r^2} + 2(1-\xi^2)\xi r \frac{\partial^2 \tilde\varphi}{\partial r \partial \xi} + (1-\xi^2)^2 \frac{\partial^2 \tilde\varphi}{\partial \xi^2} + (1-\xi^2) r \frac{\partial \tilde\varphi}{\partial r} -\\ - 3(1-\xi^2)\xi \frac{\partial \tilde\varphi}{\partial \xi}\Bigg] + \sigma_P\left[r^2 \frac{\partial^2 \tilde\varphi}{\partial r^2} + (1-\xi^2)\frac{\partial^2 \tilde\varphi}{\partial \xi^2} + 2r\frac{\partial \tilde\varphi}{\partial r} - 2\xi \frac{\partial \tilde\varphi}{\partial \xi}\right] = \\ = 2\sigma_H (B_0 u_0 / cR) r^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Как видно, выражение (5) представляет собой весьма сложное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, и на первый взгляд кажется, что его решение вряд ли может быть получено каким-либо аналитическим методом. Это уравнение или подобные ему рассматривались и ранее в статьях других авторов. Использовавшиеся при этом подходы были основаны на его сведении к квазидвумерному виду за счет предположения о бесконечной продольной проводимости ($\sigma_0 \to \infty$) и введения интегральных (вдоль магнитного поля) проводимостей Педерсена и Холла, или на использовании численных методов для проведения вычислений в случае реалистической трехмерной геометрии и произвольных значений проводимости плазмы.

Ниже описан метод, который объединяет в себе достоинства этих обоих подходов и позволяет получать явные аналитические решения уравнения (5) при реалистической трехмерной геометрии плазменного сгустка и произвольных значениях его проводимостей (включая конечное значение продольной проводимости σ_0). Метод основан на использовании обобщенных сферических функций, теория которых была развита в исследованиях [3–5]. В статье не будет изложен последовательный вывод соответствующих формул; вместо этого будут представлены лишь окончательные результаты. (Они могут быть легко проверены непосредственной подстановкой приводимых ниже решений в уравнение (5)).

Искомое общее решение для потенциала электрического поля в терминах обобщенных сферических функций имеет следующий вид:

$$\tilde\varphi(r,\xi) = \frac{B_0 u_0 R}{c}\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_P}\right)\left\{\frac{1}{A+3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\xi^k \sum_{n=k}^{\infty} c_n a_{nk}\left(\frac{r}{R}\right)^n\right\}, \tag{6}$$

где $A = (\sigma_0 - \sigma_P)/\sigma_P$ — параметр анизотропии; c_n — произвольные коэффициенты, которые могут быть вычислены, исходя из конкретных граничных условий; a_{nk} — коэффициенты, определяющие обобщенные сферические функции и рассчитываемые по следующим рекуррентным соотношениям (где δ_{ki} — символ Кронекера) :

$$\begin{aligned}(1-\delta_{k0}-\delta_{k1})A(n-k)\,(n-k+2)\,a_{n,k-2} &+ \\ +\,(n-k)\,[(2k+1)A+(n+k+1)]\,a_{nk} &+ \\ +\,(k+1)(k+2)(A+1)\,a_{n,k+2} &= 0\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Как легко видеть, эти рекуррентные соотношения имеют значительно более сложный вид, чем в случае обычных сферических функций:

$$(n-k)(n+k+1)\,a_{nk} + (k+1)(k+2)\,a_{n,k+2} = 0\,. \tag{8}$$

Тем не менее можно показать [3], что коэффициенты a_{nk} , определяемые формулами (7), обладают в точности теми же алгебраическими свойствами, что и коэффициенты, определяемые (8). Так, каждая из обобщенных сферических функций содержит в своем разложении лишь конечное число ненулевых слагаемых; более того, это число оказывается в точности таким же, что и для соответствующей обычной сферической функции. Благодаря этому вся процедура решения уравнения динамо-эффекта в терминах обобщенных сферических функций оказывается совершенно аналогичной решению уравнения Лапласа в сферической области в терминах обычных сферических функций (т. е. полиномов Лежандра).

Частные решения для простейших граничных условий

Использование обобщенных сферических функций для решения уравнения динамо-эффекта (5) при достаточно сложных граничных условиях, например, соответствующих излучению альвеновских волн с поверхности расширяющегося плазменного сгустка или генерации токовых систем в фоновой плазме, не будет рассмотрено. С целью же иллюстрации принципиальных идей обсуждаемого метода ограничимся лишь рассмотрением двух простейших типов граничных условий — внешних сред в виде идеального диэлектрика и идеального изотропного проводника.

В первом случае (идеальная диэлектрическая внешняя среда) нормальная компонента плотности электрического тока (2) должна обращаться в ноль на поверхности шара. Это приводит к следующему условию для потенциала электрического поля (в дальнейшем он будет помечаться индексом "d"):

$$\begin{aligned}(1+A\xi^2)(\partial\tilde{\varphi}_d / \partial r)\Big|_{r=R} + (A/R)(1-\xi^2)\xi(\partial\tilde{\varphi}_d / \partial\xi)\Big|_{r=R} &= \\ = (B_0 u_0 / c)(\sigma_H / \sigma_P)(1-\xi^2). &\end{aligned} \tag{9}$$

Подставив общее решение (6) в формулу (9), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных величин c_n:

$$\begin{aligned}(1-\delta_{k0}-\delta_{k1})\sum_{n=k}^{\infty} A(n-k)a_{n-2,k-2}c_{n-2} + \sum_{n=k}^{\infty}(n+Ak)a_{nk}c_n &= \\ = \frac{A+1}{A+3}(\delta_{k0} - 3\delta_{k2}), \qquad k = 0,1,2,\ldots &\end{aligned} \tag{10}$$

Анализируя (10), нетрудно показать, что решение этой системы уравнений содержит лишь один нетривиальный коэффициент — c_2. Окончательно искомый результат может быть записан в виде

$$\tilde{\varphi}_d(r,\xi) = \frac{B_0 u_0 R}{c}\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_P}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{2}(1-\xi^2).$$

С другой стороны, в случае бесконечно проводящей внешней среды (он будет обозначаться индексом "c") на поверхности шара должна обратиться в ноль тангенциальная компонента электрического поля:

$$(\partial\tilde{\varphi}_c / \partial\xi)\big|_{r=R} = 0.$$

После подстановки общего решения (6) в вышеприведенную формулу, получаем однородную систему линейных уравнений:

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n a_{nk} = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

которая очевидным образом имеет лишь тривиальное решение:

$$\tilde{\varphi}_c(r,\xi) \equiv \text{const}$$

(т. е., как и можно было ожидать, в случае идеально проводящей внешней среды динамо-эффект внутри рассматриваемого плазменного шара отсутствует).

Используя аналогичную процедуру, можно и при любых других граничных условиях свести решение уравнения динамо-эффекта (5) к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения по обобщенным сферическим функциям.

Наиболее важным практическим достоинством изложенного метода является возможность получения значений искомых величин непосредственно в требуемой точке (месте расположения детектора), не производя трудоемкого численного расчета во всей области пространства.

Литература

1. Marklund G., Brenning N., Holmgren G., Haerendel G. On Transient Electric Fields Observed in Chemical Release Experiments by Rockets//J. Geophys. Res., 1987. V. 92. № A5. P. 4590.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: ГИФМЛ, 1963. Гл. I, § 29, 30. Гл. VIII. § 6, 7.
3. Думин Ю. В. Использование обобщенных сферических функций для решения сферически-симметричной задачи динамо-эффекта// Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1998. Т. 38. № 11. С. 1900.
4. Dumin Yu. V. An Exact Solution of a Three-Dimensional Dynamo-Effect Problem in an Expanding Plasma Ball Injected into the Near-Earth Space// Proc. 2nd Int. Workshop "Problems of Geospace," Wien, 1999. P. 295.
5. Dumin Yu. V. An Exact Solution of Three-Dimensional Dynamo-Effect Problem in Expanding Plasma Ball, Based on Using the Generalized Spherical Functions. Phys. and Chem. of the Earth, 1999 (in press).

Автор выражает свою благодарность Д. С. Дорожкиной, А. В. Бурдакову и другим участникам XXVI Звенигородской конференции по физике плазмы и УТС, проявившим интерес к обсуждению данного доклада.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-05-65080).

AN EXACT SOLUTION OF THE DYNAMO-EFFECT PROBLEM FOR A UNIFORMLY EXPANDING PLASMA BALL

Yu. V. Dumin
Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere, and Radiowave Propagation RAS
Troitsk, Moscow region, Russia
E-mail: dumin@center.izmiran.troitsk.ru

We give a brief description of solving the dynamo-effect problem in an expanding plasma ball by using the generalized spherical functions, which represent generalization of the well-known Legendre polynomials and were introduced in our previous studies. Examples of particular analytic solutions for the simplest boundary conditions are presented.