УДК 530.145

О корректном гамильтониане спин-спиновых взаимодействий и его следствиях

Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов
Московский государственный университет, Россия

Дан всесторонний анализ гамильтониана спин-спинового взаимодействия. Показано, что обычно используемое выражение является некорректным, как и двухчастичный гамильтониан Брейта, так как приводит к отличной от нуля дивергенции магнитной индукции. Получено корректное выражение для гамильтониана спин-спинового взаимодействия и на этой основе найдена плотность энергии системы спинов во внешнем магнитном поле. Плотность энергии спин-спинового взаимодействия при этом оказывается в четыре раза большей и обменная энергия имеет другой знак в отличие от прежних результатов.

Взаимодействием магнитных моментов частиц обусловлены физические явления и эффекты в физике твердого тела [1] и атомного ядра [2], физике нейтронов, других системах частиц. Энергия таких взаимодействий в кристаллах значительно меньше обменной энергии, но благодаря этим взаимодействиям в кристалле возникает выделенное направление намагничивания. Спин-спиновые взаимодействия ответственны за установление статического равновесия в системе спинов, а также должны учитываться при взаимодействии внешних магнитных полей с системами частиц ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [3].

Как правило, гамильтониан спин-спинового взаимодействия принимается в виде, аналогичном энергии диполь-дипольного взаимодействия [1, 2, 4]:

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{1}{r_{ij}^{3}}\left(\delta^{\alpha\beta}-\frac{3x_{ij}^{\alpha}x_{ij}^{\beta}}{r_{ij}^{2}}\right)M_i^{\alpha}M_j^{\beta}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^{\alpha}\partial x_i^{\beta}}\frac{1}{r_{ij}}M_i^{\alpha}M_j^{\beta}, \tag{1}$$

где $r_{ij} = r_i - r_j$, $x_{ij}^{\alpha} = x_i^{\alpha} - x_j^{\beta}$, $\alpha = 1, 2, 3$; i, j — номера частиц или ячеек кристалла. При таком виде гамильтониана макроскопическая энергия спин-спинового взаимодействия примет вид [1]:

$$W = W' + W'';$$

$$W' = -\frac{1}{2}\int dr \int\limits_{|r-r'|>\rho} dr' M^{\alpha}(r) M^{\beta}(r') \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{|r-r'|};$$

$$W'' = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1;i\neq j\\ (r_{ij}<\rho)}}^{N} M^{\alpha}(r_i) M^{\beta}(r_j)\frac{\partial^2}{\partial x_{ij}^{\alpha}\partial x_{ij}^{\beta}}\frac{1}{r_{ij}},$$

где $\mathbf{M(r)}$ — макроскопическая плотность магнитного момента;

ρ — достаточно малая макроскопическая длина, такая что

$$a << \rho << L,$$

a — постоянная решетки;

L — длина, на которой заметно меняется плотность магнитного момен- та $\boldsymbol{M(r)}$.

Чтобы получить выражение для W' в форме

$$W' = -\frac{1}{2}\int dr\left\{\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{M}^2 + \boldsymbol{MH}\right\}, \tag{2}$$

находится решение уравнений Максвелла $\mathrm{div}(\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$ с соответствующими граничными условиями [1]. Решение имеет вид

$$H^{\alpha}(r) = \int dr' M^{\beta}(r')\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{|r-r'|}.$$

Путем явного выделения особенности $\mathbf{H}$ оказывается равным:

$$H^{\alpha}(r) = -\frac{4\pi}{3}M^{\alpha}(r) + \lim_{\rho\to 0}\int\limits_{|r-r'|>\rho} dr' M^{\beta}(r')\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{|r-r'|}. \tag{3}$$

Однако простым дифференцированием результата (3), приведенного в работе [1], легко убедиться, что оно не удовлетворяет уравнению $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$. Следовательно и (2) неверно.

С другой стороны, можно показать, что и сам гамильтониан спин-спинового взаимодействия в форме (1) находится в противоречии с уравнениями Максвелла. Действительно, из (1) получаем магнитную индукцию, создаваемую системой N магнитных моментов в вакууме, которая равна

$$B^{\alpha}(r)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{|r-r_j|}M_j^{\beta}=\int dr'\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{|r-r'|}\sum_{j=1}^{N}M_j^{\beta}\delta(r'-r_j),\qquad(4)$$

где $\sum_{j=1}^{N}M_j\delta(r'-r_j)\equiv M_m(r')$ — микроскопическая плотность магнитного момента. Очевидно, что дивергенция магнитной индукции равна нулю всюду. Тем не менее, простое дифференцирование (4) дает отличные от нуля источники магнитного поля. В самом деле, из (4) имеем:

$$\mathrm{div}\mathbf{B}=\int dr'\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\Delta\frac{1}{|r-r'|}M^{\beta}(r')\equiv-4\pi\mathrm{div}\mathbf{M}(\mathbf{r}).$$

Легко видеть, что и rot $\mathbf{B}=0$. Такой же неправильный результат мы получили при попытке обобщения квантовой гидродинамики [5—7] на случай систем частиц со спином на основании гамильтониана (1).

Найдем корректный вид гамильтониана спин-спинового взаимодействия сначала непосредственно из классических уравнений Максвелла:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0,\qquad \mathrm{rot}(\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M})=0.\qquad(5)$$

Из (5) имеем:

$$\Delta B^{\alpha}=4\pi\left(\delta^{\alpha\beta}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\nabla x^{\beta}}\right)M^{\beta}.\qquad(6)$$

Найдем функцию Грина $G^{\alpha\beta}(r)$ уравнения (6). Тогда

$$B^{\alpha}(r)=\int dr'G^{\alpha\beta}(r-r')M^{\beta}(r').\qquad(7)$$

Подставляя (7) в (6), находим уравнение для функции Грина:

$$\Delta G^{\alpha\beta}(r)=4\pi\left(\delta^{\alpha\beta}\Delta-\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\right)\delta(r).$$

Отсюда в фурье-представлении $G^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$G^{\alpha\beta}(k)=4\pi\left(\delta^{\alpha\beta}-\frac{k^{\alpha}k^{\beta}}{k^2}\right),$$

поэтому

$$G^{\alpha\beta}(r)=\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{r}+4\pi\delta^{\alpha\beta}\delta(r).\qquad(8)$$

На основании принципа суперпозиции искомый гамильтониан равен

$$\mathcal{H}=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}G_{ij}^{\alpha\beta}M_i^{\alpha}M_j^{\beta},\quad G_{ij}^{\alpha\beta}=G^{\alpha\beta}(r_i-r_j).\qquad(9)$$

При переходе к квантовомеханическому описанию M_i^{α} следует заменить оператором $M_i^{\alpha}=\mu_B\hat{\sigma}_i^{\alpha}$ магнитного момента i-й частицы.

Корректный вид энергии спин-спинового взаимодействия также должен вытекать из квантовой электродинамики.

Для двух фермионов гамильтониан спин-спинового взаимодействия получен при выводе уравнения Брейта. Сравнение найденного нами гамильтониана (9) для случая двух частиц с результатами квантовоэлектродинамического вывода [8] показывает, что эти выражения отличаются коэффициентом при δ-функции. Для выяснения этого противоречия кратко рассмотрим вывод уравнения Брейта.

Исходим из релятивистского выражения для амплитуды рассеяния двух фермионов [8]

$$M_{fi} = e^2\left(\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1\right)D^{00}(p'_1-p_1)\left(\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2\right) + e^2\left(\bar{u}'_1 \gamma^\alpha u_1\right)D^{\alpha\beta}(p'_1-p_1)\left(\bar{u}'_2 \gamma^\beta u_2\right), \quad (10)$$

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3),$$

с последующим разложением ее в ряд до членов $\sim 1/c^2$ (известное уравнение Брейта [8]). Здесь фотонный пропагатор в кулоновской калибровке имеет вид:

$$D^{00} = -\frac{4\pi}{q^2}, \quad D^{0\alpha} = 0, \quad D^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{\omega^2/c^2 - q^2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right). \quad (11)$$

Биспинорная амплитуда свободной частицы u_p с требуемой точностью выражается через спинорную амплитуду w_p волновой функции φ:

$$u_p = \sqrt{2mc^2}\begin{pmatrix}\left(1 - \dfrac{p^2}{8m^2c^2}\right)w_p \\ \dfrac{(\sigma p)}{2mc}w_p\end{pmatrix}, \qquad \varphi(r) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}} w_p e^{ipr}. \quad (12)$$

С точностью до членов $\sim 1/c^2$ волновая функция φ удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^2c^2}\right)\varphi = \left(\varepsilon - mc^2\right)\varphi.$$

Из выражений (10), (11) и (12) получаем:

$$M_{fi} = -4m_1m_2c^4 w_1'^{+} w_2'^{+} \hat{U}(p_1, p_2, q) w_1 w_2,$$

$$\hat{U}(p_1,p_2,q) = 4\pi e^2\left\{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{8m_1^2c^2} - \frac{1}{8m_2^2c^2} + \frac{(qp_1)(qp_2)}{m_1m_2c^2q^4} - \frac{(p_1p_2)}{m_1m_2c^2q^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{i\sigma_1[qp_1]}{4m_1^2c^2q^2} - \frac{i\sigma_1[qp_2]}{2m_1m_2c^2q^2} - \frac{i\sigma_2[qp_2]}{4m_2^2c^2q^2} + \frac{i\sigma_2[qp_1]}{2m_1m_2c^2q^2}\right\} + \hat{U}_{spin}(q),$$

где интересующий нас потенциал спин-спинового взаимодействия имеет вид:

$$\hat{U}(q) = \frac{e^2}{4m_1m_2c^2}4\pi\left(\frac{q^\alpha q^\beta}{q^2} - \delta^{\alpha\beta}\right)\hat{\sigma}_1^\alpha\hat{\sigma}_2^\beta,$$

а в координатном представлении:

$$\hat{U}_{spin}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int dq\,\hat{U}_{spin}(q)e^{iqr} = \frac{e^2}{4m_1m_2c^2}\hat{\sigma}_1^{\alpha}\hat{\sigma}_2^{\beta}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{r} - 4\pi\delta^{\alpha\beta}\delta(r)\right).$$

Этот результат находится в согласии с найденным выше выражением для функции Грина (8). Следующим шагом в получении уравнения Брейта является выделение δ-функции, присутствующей неявно в выражении $-\partial^2/\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}(1/r)$, путем усреднения по всем направлениям вектора $\boldsymbol{r}$, так что (см. [8])

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\frac{1}{r} = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{r^3} - \frac{3x^{\alpha}x^{\beta}}{r^5} + \frac{4\pi}{3}\delta^{\alpha\beta}\delta(r). \tag{13}$$

Действительно, взяв шпур от обеих частей равенства (13), получаем тождество. В результате спин-спиновая часть потенциала Брейта приобретает вид:

$$\hat{U}_{spin}(r) = \frac{e^2}{4m_1m_2c^2}\hat{\sigma}_1^{\alpha}\hat{\sigma}_2^{\beta}\left(\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r^3} - \frac{3x^{\alpha}x^{\beta}}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\delta^{\alpha\beta}\delta(r)\right). \tag{14}$$

Так называемое контактное взаимодействие Ферми $-8\pi\mu_B^2\left(\hat{\sigma}^{\alpha}\right)^2\delta(r)$ вводится в теории ЯМР для устранения неопределенности типа $0\times\infty$, возникающей при вычислении квантовомеханического среднего от гамильтониана спин-спинового взаимодействия в форме (1) [3].

Однако как и выражение (1), формула (14) приводит к отличной от нуля дивергенции магнитной индукции. Причина такого противоречия лежит в некорректном выделении δ-функции в формуле (13). Несмотря на то, что шпур от (13) приводит к тождеству, дифференцирование левой части (13) по x^{β} дает:

$$-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\Delta\frac{1}{r} = 4\pi\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\delta(r),$$

а для правой части (13) получаем:

$$\frac{4\pi}{3}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\delta(r).$$

По-видимому, в этом случае необходимы более тонкие методы анализа обобщенных функций [9].

Таким образом, потенциал (14) является некорректным, в отличие от полученного выше гамильтониана (9).

Рассмотрим одно из следствий, к которым приводит корректный потенциал спин-спинового взаимодействия (9) в квантовой теории систем многих частиц. Найдем плотность энергии системы частиц со спином во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}_0$.

Энергия взаимодействия равна:

$$E = -\frac{1}{2}\mu_B^2\sum_S\int dR\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\Psi_S^*(R)G_{ij}^{\alpha\beta}\left(\hat{\sigma}_i^{\alpha}\hat{\sigma}_j^{\beta}\Psi\right)_S(R) - \tag{15}$$
$$-\mu_B B_0^{\alpha}\sum_S\int dR\sum_{i=1}^{N}\Psi_S^*(R)\left(\sigma_i^{\alpha}\Psi\right)_S(R).$$

Волновая функция $\Psi_S(R) = \Psi_{S_1,\dots,S_N}(r_1,\dots,r_N)$ представляет собой спинор N-го ранга. Плотность магнитного момента определяется формулой

$$M^{\alpha}(r) = \sum_S \int dR \sum_{i=1}^{N} \delta(r - r_i)\mu_B \Psi_S^*(R)\left(\hat{\sigma}_i^{\alpha}\Psi\right)_S(R), \quad (\nu = \pm 1/2).$$

Поэтому формулу (15) можно представить в виде $E = \int d\mathbf{r}_{\varepsilon}(\mathbf{r})$. При этом плотность энергии взаимодействия $\varepsilon(r)$ равна:

$$\varepsilon(r) = -\frac{1}{2}\int dr' G^{\alpha\beta}(r - r')\sum_{\nu,\nu'} M_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r') - B_0(r)M(r), \tag{16}$$

где

$$M_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r') = \sum_S \int dR \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \delta(r - r_i)\delta(\nu - s_i)\delta(r'-r_j)\delta(\nu'-s_j)\times$$
$$\times\mu_B^2 \frac{1}{4}\left(\Psi_S^*\left(\hat{\sigma}_i^{\alpha}\hat{\sigma}_j^{\beta}\Psi\right)_S + \left(\hat{\sigma}_j^{\beta}\Psi\right)_S\left(\hat{\sigma}_i^{\alpha}\Psi\right)_S + \text{к. с.}\right) \tag{17}$$

— двухчастичный тензор плотности магнитного момента (к. с. — комплексно сопряженная часть).

Если система находится в равновесии во внешнем магнитном поле, то часть спинов будет ориентирована вдоль магнитного поля, а часть против поля таким образом, что энергия системы будет минимальна. Ограничимся случаем низких температур, $\theta \ll \varepsilon_F$, где ε_F — энергия ферми системы. Тогда в приближении невзаимодействующих частиц состояние системы задается волновой функцией в пространстве чисел заполнения, и мы из (17) получаем:

$$M_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r') = M_{\nu}^{\alpha}(r)M_{\nu'}^{\beta}(r') + m_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r'), \tag{18}$$

где $m_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r')$ — корреляционная функция, для которой имеем:

$$m_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r') = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi h)^6}\int dp\int dp'\mu_B^2\Big\{n_{p,\nu'}n_{p',\nu}\times$$
$$\times\left(\left(\hat{\sigma}^{\alpha}\right)_{\nu,\nu'}\left(\hat{\sigma}^{\beta}\right)_{\nu',\nu}e^{i(p-p')(r-r')/h} + \left(\hat{\sigma}^{\beta}\right)_{\nu,\nu'}\left(\hat{\sigma}^{\alpha}\right)_{\nu',\nu}e^{-i(p-p')(r-r')/h}\right) +$$
$$+\delta(\nu - \nu')\sum_{\sigma} n_{p,\sigma}n_{p',\nu}\Big(\left(\hat{\sigma}^{\alpha}\right)_{\nu,\sigma}\left(\hat{\sigma}^{\beta}\right)_{\sigma,\nu}e^{i(p-p')(r-r')/h} +$$
$$+\left(\hat{\sigma}^{\beta}\right)_{\nu,\sigma}\left(\hat{\sigma}^{\alpha}\right)_{\sigma,\nu}e^{-i(p-p')(r-r')/h}\Big)\Big\}, \tag{19}$$

$n_{p,\nu}$ — числа заполнения, принимающие значения 0 и 1.

Используя групповое разложение (18), находим выражение для плотности энергии (16) в виде:

$$\varepsilon(r) = -\frac{1}{2}M(B - B_0) - MB_0 + \tilde{\varepsilon}(r), \tag{20}$$

где $\tilde{\varepsilon}(r)$ — плотность обменной спин-спиновой энергии. С учетом (19) получаем для обменной энергии:

$$\tilde{\varepsilon}(r) = -\frac{1}{2}\int dr' G^{\alpha\beta}(r - r')\sum_{\nu,\nu'} m_{\nu\nu'}^{\alpha\beta}(r,r') =$$

$$= \frac{1}{2}\int dr' G^{\alpha\beta}(r - r')\frac{1}{(2\pi h)^6}\int dp\int dp' \mu_B^2 \times$$

$$\times\left\{\left(n_{p,\frac{1}{2}} - n_{p,-\frac{1}{2}}\right)\left(n_{p',\frac{1}{2}} - n_{p',-\frac{1}{2}}\right)\delta^{\alpha 3}\delta^{\beta 3}\cos\{(p - p')(r - r')/h\} +\right.$$

$$+2n_{p,-\frac{1}{2}}n_{p',\frac{1}{2}}\Big(\delta^{\alpha\beta}\cos\{(p - p')(r - r')/h\} -$$

$$\left.-\left(\delta^{\alpha 1}\delta^{\beta 2} - \delta^{\alpha 2}\delta^{\beta 1}\right)\sin\{(p - p')(r - r')/h\}\Big)\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^6}\int dp\int dp' \mu_B^2 \frac{1}{2}\left\{\left(n_{p,\frac{1}{2}} - n_{p',-\frac{1}{2}}\right)\left(n_{p',\frac{1}{2}} - n_{p',-\frac{1}{2}}\right)G^{33}(p - p') +\right.$$
$$\left.+2n_{p,-\frac{1}{2}}n_{p',\frac{1}{2}}G^{\alpha\alpha}(p - p')\right\}. \tag{21}$$

Так как $G^{\alpha\alpha}(p) = 8\pi$, то из (21) имеем:

$$\tilde{\varepsilon}(r) = \frac{1}{(2\pi h)^6}\int dp\int dp' \mu_B^2 \frac{1}{2} \times$$

$$\times 4\pi\left\{-\left(n_{p,\frac{1}{2}} - n_{p,-\frac{1}{2}}\right)\left(n_{p',\frac{1}{2}} - n_{p',-\frac{1}{2}}\right)\frac{\left(p^z - p^{z'}\right)^2}{|p - p'|^2} +\right.$$
$$\left.+\left(n_{p,\frac{1}{2}} + n_{p,-\frac{1}{2}}\right)\left(n_{p',\frac{1}{2}} + n_{p',-\frac{1}{2}}\right)\right\}. \tag{22}$$

Поскольку в системе заняты все нижние уровни энергии, то $n_{p,+\frac{1}{2}}$ и $n_{p,-\frac{1}{2}}$ вырезают в пространстве интегрирования два шара с радиусами $\sqrt{2m(\varepsilon_F \pm \mu_B B)}$, а разность $\left(n_{p,\frac{1}{2}} - n_{p,-\frac{1}{2}}\right)$ — узкий шаровой слой между соответствующими сферами. Ширина этого слоя достаточно мала, так как на практике реализуема ситуация, когда $\mu_B B / \varepsilon_F \ll 1$. Поэтому первый интеграл можно вычислить приближенно, полагая в подынтегральном выражении $|p| = |p'|$. Тогда из (22) окончательно получаем для обменной спин-спиновой энергии:

$$\tilde{\varepsilon} = 2\pi\mu_B^2 n^2 - \frac{2\pi}{3}\mu_B^2(n_+ - n_-)^2, \tag{23}$$

где $n_\pm$ — концентрация электронов, спины которых ориентированы вдоль (против) внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, $n = n_+ + n_-$ — суммарная концентрация. Заметим, что в (23) первое слагаемое в правой части значительно превышает второе, так как обычно $n_+ - n_- << n_+ + n_-$. С учетом (20) и (23) полная плотность энергии для среды с однородной намагниченностью равна:

$$\varepsilon = -\frac{8\pi}{3}M^2 - MH + 2\pi\mu_B^2 n^2, \quad M = \mu_B(n_+ - n_-). \tag{24}$$

Для парамагнитных систем полную энергию системы с учетом обменной кулоновской энергии можно представить в виде [10, 11]:

$$E(P) = E(0) + \alpha\frac{P^2}{N} - P\mu_B H, \tag{25}$$

где α — константа, полученная, например, в [12] и определяемая кулоновским обменным взаимодействием и корреляциями [11], $P = N_+ - N_-$. Учет (24) приведет к замене в (25) $E(0)$ на $\tilde{E}(0)$ и α на $\tilde{\alpha}$, где

$$\tilde{E}(0) = E(0) + 2\pi\mu_B^2 nN, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{8\pi}{3}\mu_B^2 n,$$

N — число частиц в системе. При этом магнитная восприимчивость будет равна

$$\chi = n\frac{\mu_B^2}{2\tilde{\alpha}} = n\frac{\mu_B^2}{2\left(\alpha - 8\pi\mu_B^2 n / 3\right)}.$$

Полученная поправка к χ с учетом спин-спинового взаимодействия мала в обычных условиях и может давать заметный вклад лишь в системах с очень высокой плотностью электронов.

Как видно из (20) и (24), энергия спин-спинового взаимодействия $-8\pi M^2/3$ оказывается в четыре раза большей по сравнению с общепринятым результатом, приведенным, например, в работе [1]. Плотность энергии обменного спин-спинового взаимодействия при этом строго положительна, в то время как обменная энергия, рассчитанная на основе общепринятого гамильтониана (1), была бы равной:

$$\tilde{\varepsilon}' = -2\pi\mu_B^2 n_+ n_- - \frac{2\pi}{3}\mu_B^2(n_+ - n_-)^2,$$

и, как легко видеть, отрицательно определенной. Несмотря на то, что спин-спиновые взаимодействия вносят незначительный вклад в магнитную восприимчивость, плотность обменной энергии (23) должна давать заметный вклад в динамику спиновых волн.

Литература

1. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. — М.: Наука, 1967.
2. *Бор О., Моттельсон Б.* Структура атомного ядра. — М.: Мир, 1971. Т. 1. С. 72.
3. *Александров И. В.* Теория ядерного магнитного резонанса. — М.: Наука, 1964. С. 95—102.
4. *Ashcroft N. W., Mermin N. D.* Solid state physics. Cornell University, HOLT, RINEHART AND WINSTON, New York, Chicago, San Francisco, Atlanta, Dallas, Montreal, Toronto, London, Sydney, 1976.
5. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды в трех томах. Том третий. — Киев: Наукова думка, 1971.
6. *Кузьменков Л. С., Максимов С. Г.* Квантовая гидродинамика систем частиц с кулоновским взаимодействием и квантовый потенциал Бома // ТМФ. 1999. Т. **118**. С. 287—304.
7. *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.* О квантовом описании линейных кинетических свойств бесстолкновительной плазмы//УФН, 1999. Т. 169. № 6. С. 687.
8. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989. С. 383—390.

9. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. С. 320.
10. *Wigner E. and Seitz F.*//Phys. Rev. 1933. Vol. **43**. P. 804; 1934. Vol. **46**. P. 509.
11. *Wigner E.* Ibid. 1934.. Vol. **46**. P. 1002.
12. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. — М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит. 1949. С. 605—657.

On the correct spin-spin hamiltonian and its consequences

L. S. Kuz'menkov, S. G. Maksimov
Moscow State University, Moscow, Russia

The detailed analysis of the spin-spin hamiltonian is given. The usually used expression is shown to be incorrect, as the two-particle Breit hamiltonian, because it gives non-zero divergency of the magnetic field. The correct form of the spin-spin interaction hamiltonian is obtained, and the spin system energy in exterior magnetic field is calculated on the basis of this form. As a result the density of spin-spin interaction energy is appeared to be four times more in comparison with previous results and the exchange energy has the different sign.