УДК 621-11:620:178.156.6

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ*

Р. И. Зайнетдинов, С. Н. Киселев

Московский государственный университет путей сообщения, Москва, Россия

Рассмотрен процесс упругопластического деформирования несущих металлических машиностроительных конструкций на базе модели бистабильного активного элемента, применяемой в синергетике. С использованием математического аппарата теории марковских процессов и информационно-энтропийного критерия изучены переходные и стационарные процессы в локальной диссипативной зоне концентрации напряжений. Получены аналитические и графические зависимости, описывающие кинетику изменения во времени информационной энтропии и скорости ее приращения для различных режимов нагружения локальной зоны, которые определяют реакцию конструкции на изменение внешних и внутренних условий.

Деформирование и разрушение несущих конструкций являются не чисто механическими феноменами, а сопровождаются протеканием неравновесных физико-химических процессов, что приводит к необходимости использовать для их изучения идеи и методы неравновесной термодинамики и синергетики.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Несущая конструкция, подверженная силовому и (или) термодеформационному воздействию, при ее работе в упругопластической области рассматривалась как открытая, устойчиво неравновесная термодинамическая система (ТДС), которая может обмениваться энергией, веществом и энтропией (информацией) с окружающей средой. Наличие потока энергии от внешнего источника к ТДС и диссипация энергии во внешнюю среду являются предпосылками активности ТДС.

Один из типов активных элементов, выделяемых в синергетических системах [1], — бистабильный (триггерный) элемент (рис. 1), обладающий двумя устойчивыми состояниями (0 и 1), в каждом из которых он может находиться достаточно долго.

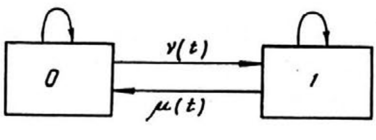

Рис. 1. Схема переходов в бистабильном элементе

Учитывая, что для обеспечения работоспособности несущей конструкции, как деформируемого твердого тела, наибольшее значение имеют два авторегуляторных механизма — упругость и пластичность, рассмотрим поведение конструкции под нагрузкой с использованием модели бистабильного элемента. В качестве параметра, определяющего переход бистабильного элемента из одного состояния в другое (в дальнейшем — определяющего параметра), принимали величину интенсивности напряжений σ_1 по теории потенциальной энергии формоизменения:

$$\sigma_i = (1/\sqrt{2})\ \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения в локальной зоне концентрации напряжений (деформаций), лимитирующей несущую способность конструкции.

В дальнейшем изложении будем называть локальной диссипативной зоной (ЛДЗ) зону концентрации напряжений, а диссипативной системой — несущую конструкцию в целом. Доказательство диссипативности исследуемой системы приведено ниже.

Считалось, что переход из нулевого состояния, соответствующего упругому поведению материала ЛДЗ, в первое (состояние пластического течения) вызывается таким внешним воздействием на диссипативную систему, при котором определяющий параметр превышает пороговый уровень, равный математическому ожиданию предела текучести $\sigma_т$. В пространственной системе координат σ_1, σ_2, σ_3 поверхность пластичности, соответствующая условию Губера-Мизеса, представляет равнонаклоненный к осям круговой цилиндр. Если траектория определяющего параметра $\sigma_1\ (t)$ находится внутри этого цилиндра, то ЛДЗ пребывает в нулевом состоянии, а если на поверхности пластичности или вне ее — то переходит в первое состояние.

С использованием математического аппарата теории случайных марковских процессов дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей нулевого $P_0\,(t)$ и первого $P_1\,(t)$ состояний бистабильного элемента ЛДЗ могут быть записаны в виде:

$$\frac{dP_0\,(t)}{dt} = -\ \nu\ (t)\ P_0\,(t) + \mu\ (t)\, P_1\,(t); \tag{1}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \nu(t) P_0(t) - \mu(t) P_1(t), \qquad (2)$$

где $\nu(t), \mu(t)$ — интенсивности случайных потоков внешних воздействий, переводящих бистабильный элемент ЛДЗ соотвественно из нулевого состояния в первое и обратно.

Интенсивности переходов $\nu(t)$ и $\mu(t)$ являются функциями таких параметров случайного процесса нагружения несущей конструкции, как среднее значение σ_m и дисперсия D динамических напряжений в локальной зоне концентрации, эффективная частота f_e, коэффициент широкополосности β случайного процесса, а также математическое ожидание предела текучести $\sigma_т$ материала. В частном случае одномерного Гауссовского стационарного процесса нагружения интенсивность переходов определялась по формуле:

$$\nu(t) = f_e \exp\left[-\frac{(\sigma_T - \sigma_m)^2}{2D}\right].$$

В случае однородного марковского процесса, когда интенсивности переходов $\nu(t)$ и $\mu(t)$ не зависят от времени, при условии, что в начальный момент времени ЛДЗ находилась в упругом состоянии, решение дифференциальных уравнений (1) и (2) получено в виде:

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\nu+\mu} + \frac{\nu}{\nu+\mu}\, e^{-(\nu+\mu)t} = \frac{1}{1+\alpha}\left[1 + \alpha e^{-\beta t}\right]; \qquad (3)$$

$$P_1(t) = \frac{\nu}{\nu+\mu} - \frac{\nu}{\nu+\mu}\, e^{-(\nu+\mu)t} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\left[1 - e^{-\beta t}\right], \qquad (4)$$

где $\alpha = \nu/\mu; \quad \beta = \nu + \mu.$

Марковский процесс эргодичен, поскольку при $t \to \infty$ существуют финальные вероятности нулевого и первого состояний, соответствующие стационарному режиму и равные:

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = \frac{1}{1+\alpha}; \qquad P_1 = \lim_{t\to\infty} P_1(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha}. \qquad (5)$$

Это значит, что после окончания переходного процесса в стационарном режиме локальная зона несущей конструкции будет менять свое состояние, переходя из нулевого в первое и обратно, но вероятности этих состояний уже не зависят от времени. Их можно интерпретировать как среднее относительное время пребывания ЛДЗ в каждом из состояний.

В зависимости от величины параметра режима α были выделены три характерных режима нагружения ЛДЗ несущей конструкции:

легкий, когда $\alpha < 1$; $\nu < \mu$; $P_0 > P_1$, т. е. ЛДЗ бо́льшую часть времени находится в упругом состоянии;

симметричный, когда $\alpha = 1$; $\nu = \mu$; $P_0 = P_1 = 0{,}5$;

тяжелый, когда $\alpha > 1$; $\nu > \mu$; $P_1 > P_0$, т. е. ЛДЗ бо́льшую часть времени находится в состоянии пластического течения.

Покажем, что система, эволюционирующая в соответствии с дифференциальными уравнениями (1) и (2), является диссипативной [1]. Для этого проанализируем вектор $\overline{\mathbf{X}} = \{\mathbf{P}_0\,\mathbf{P}_1\}$ и векторную функцию $\overline{\mathbf{V}}\,(\overline{\mathbf{X}}) = \{\mathbf{V}_0\,\mathbf{V}_1\}$ с компонентами $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{V}_1$, равными для системы дифференциальных уравнений (1), (2) следующим функциям:

$$V_0 = -\nu P_0 + \mu P_1; \quad V_1 = \nu P_0 - \mu P_1.$$

В работе [1] показано, что, если выполняется условие

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}\,(\overline{\mathbf{X}}) < 0,$$

то система является диссипативной.

Полученный результат

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{V}}\,(\overline{\mathbf{X}}) = -(\nu + \mu) < 0$$

подтверждает диссипативность исследуемой системы.

Важнейшей функцией состояния термодинамической системы является энтропия. Известно [2], что различные трактовки энтропии имеют глубокую внутреннюю связь. Например, на основе представлений об информационной энтропии можно вывести все важнейшие положения статистической физики. В работе [3] показано, что физическая энтропия системы совпадает с термодинамической S, а информационная энтропия H связана с ними соотношением

$$S = k \cdot \ln 2 \cdot H,$$

где k — постоянная Больцмана.

Синергетический подход предполагает исследование кинетики изменения энтропии во времени, что позволяет анализировать эволюцию диссипативной системы [4].

Рассмотрим информационную энтропию, являющуюся мерой степени неопределенности существования системы, и равную количеству информации по Шеннону, необходимому для снятия этой неопределенности [3]. Для бистабильного элемента, моделирующего ЛДЗ, функция информационной энтропии $H\,(t)$ определялась по формуле

$$H\,(t) = -\sum_{j=0}^{1} P_j\,(t) \log_2 P_j\,(t). \tag{6}$$

При этом минимальное значение энтропии $H\,(t) = 0$ соответствовало вырождению стохастической системы в жесткую детерминированную, а максимальное $H\,(t) = 1$ — процессу деградации (накопления повреждений) в ЛДЗ несущей конструкции.

С использованием формул (3), (4) и (6) получена аналитическая зависимость информационной энтропии от времени:

$$H\,(t) = -\frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{\ln 2} \left\{ \frac{1+\alpha e^{-\beta t}}{\alpha} \ln \left[\frac{1}{1+\alpha} \left(1 + \alpha e^{-\beta t}\right) \right] + \right.$$

$$\left. + \left(1 - e^{-\beta t}\right) \ln \left[\frac{\alpha}{1+\alpha} \left(1 - e^{-\beta t}\right) \right] \right\}. \tag{7}$$

Анализ полученной функции показал, что в условиях тяжелого режима нагружения ЛДЗ (при $\alpha > 1$) в момент времени

$$t_m = -\frac{1}{\nu + \mu} \ln \left(\frac{\alpha - 1}{2\alpha}\right)$$

достигается максимальное значение энтропии $H(t_m) = 1$. После прохождения диссипативной системой этой критической точки, являющейся стохастическим аналогом точки бифуркации, информационная энтропия уменьшается и, выходя из переходного процесса, стабилизируется на уровне

$$H_{\text{ст}} = \frac{1}{\ln 2} \ln \left[(1+\alpha)/\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right]. \tag{8}$$

Согласно традиционной интерпретации энтропии это означает [5], что за счет оттока энтропии в ходе эволюции разупорядоченность уменьшается, т. е. система структурируется, отвечая на тяжелый режим нагружения самоорганизацией дислокационных структур [4]. Это является признаком приспособления (адаптации) ЛДЗ несущей конструкции к случайному процессу нагружения, характеризуемому параметром режима α.

Легкий режим нагружения ЛДЗ ($\alpha < 1$) отличается отсутствием стохастического аналога бифуркации и стабилизацией энтропии на уровне $H_{\text{ст}}$ за время выхода диссипативной системы из переходного в стационарный процесс.

С позиций синергетического подхода большой интерес представляет функция скорости изменения энтропии во времени, полученная из уравнения (7) в виде:

$$\dot{H}_t = \frac{dH}{dt} = -\frac{\nu e^{-\beta t}}{\ln 2} \ln \left[\frac{\alpha(1 - e^{-\beta t})}{1 + \alpha e^{-\beta t}}\right].$$

Анализ этой функции показал, что реагирование ЛДЗ несущей конструкции на тяжелый режим нагружения резким ростом энтропии происходит одновременно с уменьшением скорости ее приращения. В критической точке максимума энтропии $\dot{H}_t$ становится равной нулю. Дальнейшее уменьшение энтропии и стабилизация ее на стационарном уровне $H_{\text{ст}}$ связаны с образованием новых диссипативных структур, соответствующих нагрузке ЛДЗ. Этот процесс структурообразования отражается в том, что скорость приращения энтропии становится отрицательной, проходит минимум и стремится к нулю, когда диссипативная система входит в стационарный процесс. Это соответствует теореме И. Пригожина о минимальном производстве энтропии при протекании в системе стационарного процесса, эквивалентной принципу наименьшего рассеяния энергии Л. Онсагера [2].

Рассмотрим поведение ЛДЗ несущей конструкции как отклик на изменение ΔU комплекса внешних и (или) внутренних условий. Первоначальный комплекс условий обозначен U, последующий $U' = U + \Delta U$. Результатом этих изменений может оказаться как модификация режима нагружения ЛДЗ (т. е. параметра α), так и вероятностей состояний. При обозначении новых значений величин, соответствующих комплексу условий U', буквами со штрихом была получена система дифференциальных уравнений Колмогорова, аналогичных уравнениям (3) и (4), решение которой получено в виде:

$$P_0'(t') = \frac{1}{1+\alpha'} + \left(\frac{\alpha'}{1+\alpha'} - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right) e^{-\beta' t'};$$

$$P_1'(t') = \frac{\alpha'}{1+\alpha'} + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha'}{1+\alpha'}\right) e^{-\beta' t'}.$$

При этом отсчет времени t' в момент изменения нагрузки U' был начат заново, а в качестве начальных условий были приняты финальные вероятности (5), т. е. при $t' = 0$ выполнялись условия согласования марковского процесса

$$P_0'(0) = 1/(1+\alpha); \quad P_1'(0) = \alpha/(1+\alpha).$$

Финальные вероятности состояний для стационарного процесса в новых условиях U' (при $t' \to \infty$) составили

$$P_0' = 1/(1+\alpha'); \quad P_1' = \alpha'/(1+\alpha').$$

На рис. 2 показаны различные варианты реакции ЛДЗ несущей конструкции на изменение комплекса условий. Рис. 2, а соответствует случаю ужесточения режима нагружения ЛДЗ, когда после легкого ($\alpha = 0{,}25$) устанавливается тяжелый режим ($\alpha' = 5$). Равновероятность обоих состояний ЛДЗ несущей конструкции $P_0'(t_m') = P_1'(t_m') = 0{,}5$ в критической точке соответствует достижению максимальной разупорядоченности и является стохастическим аналогом бифуркации. При прохождении этой точки в момент времени t_m', равный

$$t_m' = -\frac{1}{\nu' + \mu'} \ln \frac{(\alpha' - 1)(\alpha + 1)}{2(\alpha' - \alpha)}, \tag{9}$$

дисперсия D динамических напряжений имеет максимум.

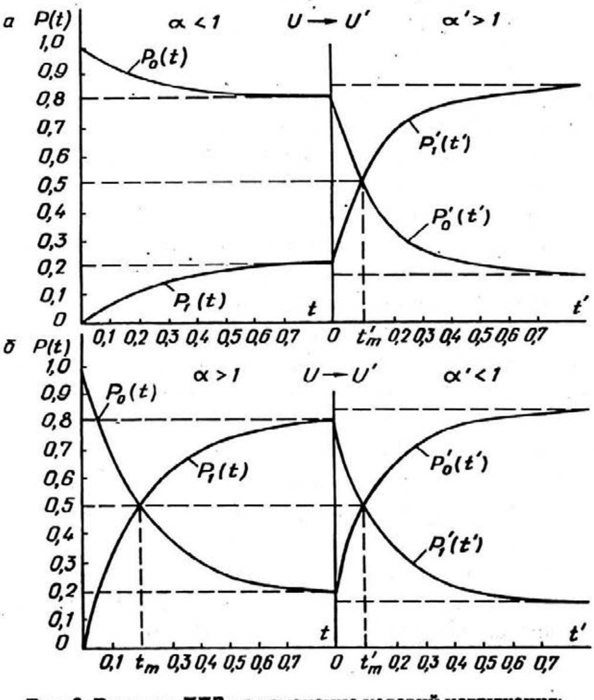

Рис. 2. Реакции ЛДЗ на изменение условий нагружения:
а — ужесточение режима ($\alpha < 1$, $\alpha' > 1$); б — ослабление режима ($\alpha > 1$, $\alpha' < 1$)

После прохождения критической точки дисперсия стабилизируется на новом стационарном уровне, соответствующем условиям нагружения U'.

При испытаниях несущей конструкции с помощью тензорезисторов можно произвести замеры и зафиксировать процессы изменения во времени математического ожидания и дисперсии напряжений вблизи от локальных диссипативных зон концентрации напряжений. Наличие характерных пиков дисперсии напряжений, соответствующих критическим точкам, позволяет сделать выводы о завершении приработки конструкции и ее приспособлении к новым условиям. Анализ процессов, происходящих в ЛДЗ на основе применения информационно-энтропийного критерия, позволяет ускорить сроки получения данных о завершении периода приспособления конструкции к изменившимся воздействиям, тем самым улучшая временны́е свойства информации о техническом состоянии несущей конструкции.

Аналогичный эффект прохождения точки бифуркации наблюдался и в случае ослабления режима нагружения ЛДЗ, когда $\alpha' < 1$. Этот случай реакции диссипативной зоны на изменение условий показан на рис. 2, б и характеризуется наличием двух критических точек. При построении графиков было принято $\alpha = 4$; $\alpha' = 0{,}2$.

С позиций синергетики важное значение имеет анализ функций информационной энтропии $H'(t')$ и скорости ее изменения $\dot{H}_t'$, как отклика диссипативной системы на внезапное измение внешних или внутренних условий. Аналитическое выражение для энтропии $H'(t')$ в новых условиях нагружения U' конструкции получено в виде:

$$H'(t') = -\frac{1}{\ln 2\ (1+\alpha)(1+\alpha')} \times$$

$$\times \left\{ [(1+\alpha) + (\alpha'-\alpha)\, e^{-\beta' t'}] \ln \frac{(1+\alpha) + (\alpha'-\alpha)\, e^{-\beta' t'}}{(1+\alpha)(1+\alpha)} + \right.$$

$$\left. + [\alpha'(1+\alpha) + (\alpha-\alpha')\, e^{-\beta' t'}] \ln \frac{\alpha'(1+\alpha) + (\alpha-\alpha')\, e^{-\beta' t'}}{(1+\alpha)(1+\alpha')} \right\}. \qquad (10)$$

Скорость приращения энтропии после изменения условий нагружения конструкции составляет:

$$\frac{dH'(t')}{dt'} = \frac{\nu\mu' - \nu'\mu}{\beta \cdot \ln 2}\, e^{-\beta' t'} \ln \left[\frac{\nu'\beta + (\nu\mu' - \nu'\mu)\, e^{-\beta' t'}}{\mu'\beta + (\nu'\mu - \nu\mu')\, e^{-\beta' t'}} \right]. \qquad (11)$$

Очевидно, что функции (10) и (11) зависят от сочетания условий нагружения U и U'.

В начальный момент времени после изменения условий $t' = 0$ выражение (10) обращается в формулу (8) для стационарной энтропии $H_{\text{ст}}$ (при $t \to \infty$). При этом начальная скорость изменения энтропии равна

$$\left. \frac{dH'(t')}{dt'} \right|_{t'=0} = \frac{\nu\mu' - \nu\mu'}{\beta \cdot \ln 2} \ln \alpha$$

и зависит от сочетания условий нагружения U и U'.

На рис. 3 показаны графики функций энтропии H'(t') и скорости ее приращения $\dot{H}_t'$ для случая ужесточения режима нагружения ЛДЗ ($\alpha < 1$, $\alpha' > 1$). Значения параметров режима соответствовали принятым на рис. 2, а. Анализ графиков и полученных аналитических зависимостей показал, что ЛДЗ несущей конструкции реагирует на внезапное изменение внешних или внутренних условий резким возрастанием информационной энтропии от достигнутого в предшествующих условиях эксплуатации стационарного уровня $H_{ст}$ до максимума $H'(t'_m) = 1$. В это время скорость приращения энтропии резко падает до нуля. Повторное прохождение точки бифуркации в случае, показанном на рис. 2, б, или первое прохождение этой точки в случае, показанном на рис. 2, а и 3, происходит в момент времени t'_m, определяемый формулой (9). При этом диссипативная система характеризуется наибольшей разупорядоченностью, когда случайные флуктуации проявляются на макроскопическом уровне. Такое поведение системы вблизи критической точки, являющейся стохастическим аналогом бифуркации, напоминает турбулентность [5].

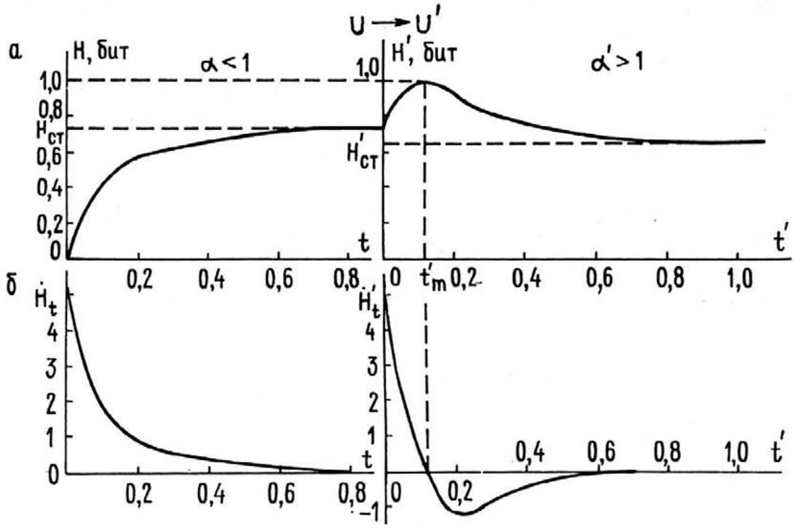

Рис. 3. Изменение информационной энтропии H (а) и скорости ее приращения $\dot{H}_t$ (б) во времени при ужесточении режима нагружения ЛДЗ ($\alpha < 1$, $\alpha' > 1$)

При прохождении критической точки ЛДЗ либо приспосабливается к новым условиям нагружения, что проявляется в самоорганизации новых диссипативных дислокационных структур (клубковой, ячеистой, вытянутой полосовой, квазиаморфной и др.), соответствующих измененной нагрузке [4], либо разрушается. В первом случае структуризация системы отражается в том, что скорость изменения энтропии приобретает отрицательное значение, проходит минимум и, оставаясь отрицательной, стремится к нулю. Переходный процесс входит в стационарное состояние с новым стационарным уровнем информационной энтропии $H_{ст}$, соответствующим условиям U':

$$H'_{ст} = (1/\ln 2)\ \ln \left[(1+\alpha')/(\alpha')^{\frac{\alpha'}{1+\alpha'}}\right].$$

Такой отклик локальной диссипативной зоны конструкции на изменение условий эксплуатации соответствует представлениям синергетики о качественных процессах самоорганизации неравновесных диссипативных систем [4, 5]. Полученные аналитические и графические зависимости позволили выявить количественные соотношения, характеризующие кинетику изменения во времени энтропии и скорости ее приращения, которые отражают эволюцию технической системы в процессе сложного нагружения при работе материала в упруго-пластической области.

Литература

1. *Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С.* Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990. — 272 с.
2. Физический энциклопедический словарь/ Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. энциклопедия, 1983. — 928 с.
3. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем: Эволюционное представление. — М.: Мир, 1989. — 488 с.
4. *Иванова В. С.* Синергетика: Прочность и разрушение металлических материалов. — М.: Наука, 1992. — 160 с.
5. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного: Введение. — М.: Мир, 1990. — 344 с.

SYNERGETICS APPROACH TO ANALYSIS OF ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS OF BEARING STRUCTURES

R. I. Zainietdinov, S. N. Kiselyov

Moscow State University of Railway Communications, Moscow, Russia

The model of active bistable element, applicable in synergetics, is used to describe the process of elasto-plastic deformation of bearing all-metal structures. Stationary and transient processes are investigated in the local dissipative zone of the stress concentration on the basis of the theory of random Markov processes and information entropy criterion. The article involves the analytical and graphic dependences describing kinetics of the temporal change of information entropy and its production rate for different load conditions of the local zone determinative of reaction of structure to external and internal conditions.