

УДК 537.533.3, 537.534.3

## Об изотраекторном поперечном дифференциальном инварианте

А. А. Матышев

Санкт-Петербургский государственный технический университет, С.-Петербург, Россия

*Получен поперечный дифференциальный инвариант изотраекторных корпускулярно-оптических систем, аналогичный инварианту Гельмгольца–Лагранжа статических корпускулярно-оптических систем.*

В работе [1] впервые были определены потенциальные поля, в которых траектория движения заряженных частиц не зависят от их начальной кинетической энергии. Под термином “траектория” понимается проекция интегральной кривой  $\{t, x(t), y(t), z(t)\}$  в трехмерное декартово пространство. В работе [2] корпускулярно-оптические системы на базе найденных в [1] полей были названы изотраекторными.

Изотраекторные корпускулярно-оптические системы являются многообещающим объектом для изучения, так как обладают рядом уникальных свойств, среди которых высокое качество пространственной фокусировки импульсных потоков при любых энергетических распределениях составляющих их частиц.

Ниже доказывается теорема о том, что изотраекторные системы характеризуют инвариант, аналогичный инварианту Гельмгольца–Лагранжа статических систем, а различия инвариантов позволяют сделать вывод об отсутствии комы для систем изотраекторных.

**Теорема.** *Если в изотраекторной корпускулярно-оптической системе с плоскостью симметрии ось  $Oz$  – возможная траектория, причем входной границей поля служит плоскость  $z = 0$ , а выходной – плоскость  $z = L$ , то в такой системе существует поперечный инвариант*

$$M\Gamma = \frac{(p_z)_0}{(p_z)_k}, \quad (1)$$

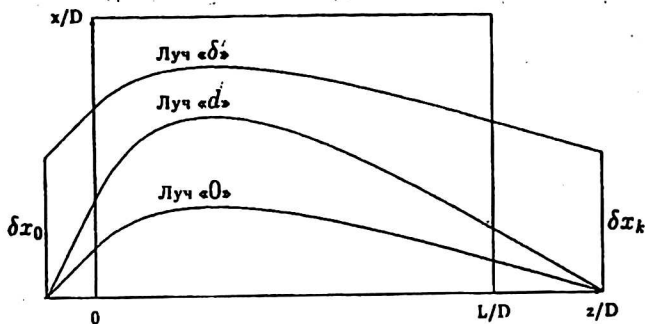
где  $M$  и  $\Gamma$  – линейное и угловое увеличение, соответственно;

$p_z$  – продольный\* импульс частицы, соответствующий плоскости предмета ( $O$ ) и изображения ( $k$ ).

\* В известном инварианте Гельмгольца–Лагранжа для статических систем вместо отношения продольных компонент импульса содержится отношение импульсов частицы.

**Доказательство.** Для нестационарных динамических систем известен интегральный инвариант Пуанкаре–Картана [3] для неодновременных состояний в расширенном  $(2n + 1)$ -мерном фазовом пространстве. Для одновременных состояний интегральный инвариант Пуанкаре–Картана сводится к инварианту Пуанкаре. В дифференциальной форме инвариант Пуанкаре известен как дифференциальный инвариант Лагранжа. Смысл дифференциального инварианта Лагранжа поясним с помощью рисунка.

*Траектории, фигурирующие в доказательстве существования изотраекторного поперечного инварианта (изотраекторное поле сосредоточено между двумя плоскостями  $z = 0$  и  $z = L$ . Старт частиц происходит в момент времени  $t = 0$  из плоскости  $z = D$ )*



Пусть на оси корпускулярно-оптической системы существует пара сопряженных точек, что означает существование бесконечного числа траекторий, проходящих через эти две точки. Рассмотрим произвольную траекторию (луч), проходящую через сопряженные точки (этот луч на рисунке обозначен как луч «0»). Если рассмотреть другую возможную траекторию (луч) в окрестности уже выбранного, то вариация действия

$$W = \int_0^{t_k} L(r, v, t) dt \quad (2)$$

будет в общем случае равна

$$\Delta W = p_k \Delta r_k - p_0 \Delta r_0 - H_k \Delta t_k + H_0 \Delta t_0. \quad (3)$$

Если теперь рассматривать строго одновременные состояния и два перехода от луча «0» к лучам «d» и «δ», отличающихся порядком перехода, то получим дифференциальный инвариант Лагранжа [4]

$$\delta p_0 \delta r_0 - \delta p_k \delta r_k = \delta p_k \delta r_k - \delta p_k \delta r_k. \quad (4)$$

Исходя из инварианта (4), в корпускулярной оптике статических систем получают\* два известных соотношения взаимности [4, 5], частными случаями которых являются условия Аббе и Гершеля.

Итак, логика доказательства соотношений взаимности в корпускулярной оптике должна быть следующей:

1. Наличие изображения в каком-либо поле (т. е. наличие сопряженных точек).

2. Одновременность прохождения лучей через сопряженные точки или плоскости.

3. Применение дифференциального инварианта Лагранжа.

Воспользуемся построенной логической цепочкой для рассмотрения изотраекторных систем, где траектории частиц не зависят от их начальной скорости, в отличие от статических систем, в которых используются монокинетические потоки, так как только для них возможно введение единого показателя преломления.

\* Не останавливаясь на анализе одновременности состояний.

Допустим, что изотраекторная система создает две сопряженные точки на оси (доказательство существования изотраекторных систем с сопряженными точками приведено в [6]), так что п. 1 удовлетворяется.

Будет удовлетворен п. 2, если начальные продольные импульсы частиц определенного сорта имеют одинаковую величину. Кроме того, можно идеально точно (путем выбора соответствующих скоростей) добиться одновременности прохождения частиц через сопряженные точки.\*

Постоянство начального продольного импульса как условие одновременности означает, что вариация начальных импульсов связана не только с изменением начального угла вылета частицы (при постоянстве модуля импульса в случае статических систем), но и с изменением модуля импульса.

Действительно, условие

$$p_z = p_0 \cos \alpha = \text{const} \tag{5}$$

дает связь между вариациями угла  $\alpha$  и модуля  $p_0$ :

$$dp_0 = p_0 \operatorname{tg} \alpha d\alpha, \tag{6}$$

где  $\alpha$  — угол между вектором начальной скорости частицы и осью  $Oz$  в плоскости  $xOz$ .

Теперь возможно применение дифференциального инварианта Лагранжа для специально выбранных лучей, изображенных на рисунке.

Пусть траектория и смещения лежат исключительно в плоскости  $xOz$ . Пусть переход  $d$  означает переход к лучу, соединяющему те же сопряженные точки, что и «нулевой» луч, что дает  $dr_0 = dr_k = 0$ . Пусть переход  $\delta$  означает переход к лучу, имеющему те же начальные данные движения, за исключением аддитивного сдвига вдоль оси  $Ox$ . Поскольку все три луча пересекают сопряженную плоскость одновременно, то соотношение (4) теперь примет вид:

$$\delta p_0 \delta r_0 = \delta p_k \delta r_k. \tag{7}$$

Поскольку вариация координат осуществляется только вдоль оси  $Ox$ , то вклад в скалярное произведение даст только поперечная компонента импульса  $p_x$  в обеих сопряженных плоскостях. Но вариации начального и конечного импульсов надо производить с учетом связи (6) и аналогичной связи для конечной точки (поскольку конечные продольные компоненты импульсов также одинаковы).

Итак, имеем

$$\begin{aligned} (dp_x)_0 &= d(p_0 \sin \alpha) = dp_0 \sin \alpha + p_0 \cos \alpha = \\ &= p_0 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \cos \alpha \right) = (p_z)_0 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее остается только подставить вариацию (8) в инвариант (7), проинтегрировать по углам и, с учетом определения поперечного линейного увеличения, получить поперечный инвариант изотраекторных систем с прямолинейной осью (1), на чем доказательство теоремы завершается.

*Следствие 1.* Существование поперечного изотраекторного инварианта (1) означает выполнение условия синусов (условия Аббе).

*Доказательство.* Подстановка в поперечный изотраекторный инвариант (1) модулей импульсов вместо их продольных компонент и углового увеличения  $\Gamma = \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha$  дает

$$p_0 \sin \alpha = M p_k \sin \beta. \tag{9}$$

\* В параксиальной области осесимметричных и квадрупольных систем в приближении прямоугольных границ поля (вроде изображенных на рисунке) разброс времен прилета частиц с одинаковым начальным продольным импульсом в плоскость гауссова изображения будет пропорционален квадратам вылета. Однако для полученного ниже поперечного дифференциального инварианта этот квадратичный разброс не играет никакой роли.

О значении удовлетворения условия Аббе в классической световой оптике известно давно. При его удовлетворении отсутствует aberrация, называемая комой [4, 5].

*Следствие 2.* В изотраекторных системах произведение МГ может иметь не только положительный, но и отрицательный знак.

*Доказательство.* В случае отражения назад частица изменит знак продольного импульса на противоположный. В плоскости поворота частицы продольный импульс обращается в ноль и одновременно обращается в бесконечность угловое увеличение.

Примером может служить режим отражения частиц в изотраекторном плоском конденсаторе, явившийся основой нового масс-спектрального метода, аналогичного методу энергоанализа тормозящего типа [7].

### Л и т е р а т у р а

1. Матышев А. А. Об одной обратной задаче корпускулярной оптики: Тез. докл. IX Всес. семинара по методам расчета ЭОС. — Ташкент, 1988. С. 76.
2. Матышев А. А. // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 5. С. 99.
3. Картан Э. Интегральные инварианты/Пер. с франц. — М.: ГТТИ, 1940. С. 216.
4. Стэррок П. Статическая и динамическая электронная оптика. Теория фокусировки в линзах, отклоняющих устройствах и ускорителях/ Пер. с англ. — М.: Иностран. л-ра, 1958. С. 288.
5. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики. В 2-х томах./ Пер. с англ. — М.: Мир, 1993.
6. Матышев А. А. Корпускулярная оптика изотраекторных систем: Дис... докт. физ.-мат. наук. — С.-Петербург, 1997. С. 321.
7. Матышев А. А. // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 1. С. 83.

## On the isotrajectory lateral differential invariant

*A. A. Matyshev*

Saint-Petersburg State Technical University, S.-Petersburg, Russia

*The lateral differential invariant for corpuscular — optical systems similar to the Helmholtz-Lagrange invariant for static corpuscular-optical systems is obtained.*