УДК 537.533.3, 537.534.3

О пространственно-временно́й аберрации и ее возможных применениях в корпускулярной оптике

А. А. Матышев

Санкт-Петербургский государственный технический университет, С.-Петербург, Россия

Рассмотрена идея пространственно-временно́й аберрации корпускулярно-оптических систем; предложен метод ее расчета, а также обсуждены некоторые возможные применения этой аберрации в корпускулярной оптике.

Осесимметричные линзы на основе переменных электрических полей отличаются от своих статических аналогов возможностью устранения как сферической, так и хроматической аберраций при одновременном соблюдении так называемого фазового условия [1]. Первоначально фазовое условие было сформулировано А. Несслингером [2]. В соответствии с этим условием фокусное расстояние нестационарной линзы не должно в первом приближении зависеть от фазы влета частицы в поле линзы.

При формулировке фазового условия было использовано понятие фокусного расстояния, хотя для случая переменных полей подобная оптическая терминология носит лишь условный характер и нуждается в дополнительном определении. Действительно, рассмотрим траектории заряженных частиц, падающих параллельно оси на линзу с переменным электрическим полем (рис. 1).

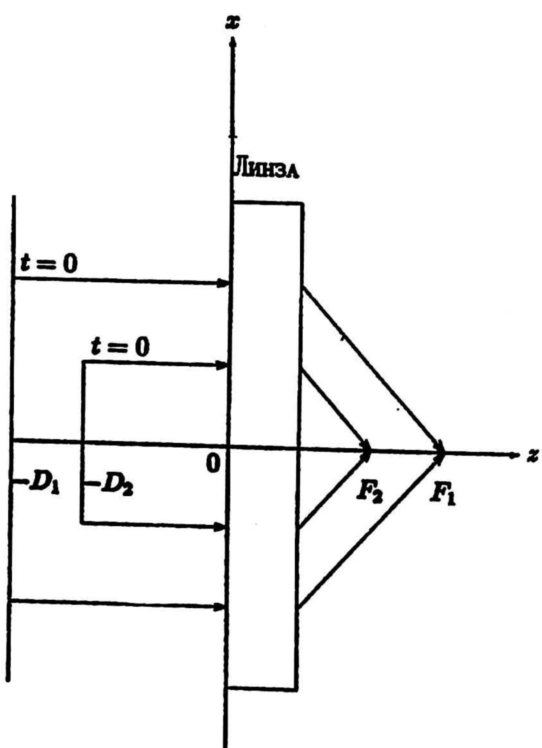

Рис. 1. Траектории заряженных частиц, падающих параллельно оптической оси на линзу с перемнным электрическим полем

Частицы, влетающие в линзу параллельно оптической оси (но стартовавшие в один и тот же момент времени с одинаковой скоростью из разных плоскостей в пространстве предметов), попадают не в единый фокус, а в разные точки оптической оси.

Для статической линзы все траектории проходят через фокус пространства изображения, но в случае нестационарной линзы точка пересечения оси в пространстве изображений будет зависеть от момента влета частиц в поле (фазы). Фаза, в свою очередь, зависит от нескольких факторов: удаленности плоскости источника от линзы, момента старта частиц из плоскости источника и начальной скорости частиц. Поэтому формула Ньютона в случае нестационарных линз для расчета положения изображения не годится, а сам термин «фокусное расстояние» нестационарной линзы не несет в себе никакого традиционного смысла.

Согласно [2], для увеличения пропускания нестационарной линзы должно выполняться фазовое условие в форме

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{D=\mathrm{const}} = 0, \tag{1}$$

где смысл величин становится ясен из рис. 1: D — расстояние от плоскости источника до линзы; t — время прилета частиц на линзу.

Если использовать нестационарную линзу для создания высококачественного изображения при условии ее максимального пропускания, то, как это станет ясно из последующего изложения, оказывается, что выполнения фазового условия Несслингера в форме (1) явно недостаточно. Дело заключается в том, что при создании изображения нужно рассматривать не параллельный оптической оси поток, а стигматичный пучок частиц, исходящих из точки $z = -D$ пространства предметов и сходящийся в точке $z = P$ пространства изображений, вовсе не совпадающей с величиной F на рис. 1.

Очевидно, что для монокинетического потока частиц, фокусируемого переменной линзой, помимо обычных аберраций, добавится дополнительное уширение точки изображения в гауссовой плоскости за счет конечной длительности импульса Δt (времени, в течение которого частицы покидают источник). В общем случае это уширение будет пропорционально Δt, а в линзе с улучшенным качеством изображения и повышенным пропусканием коэффициент пропорциональности Δt должен обратиться в нуль.

Понятие пространственно-временной аберрации было предложено в работе [3] и рассмотрено в [4]. Под пространственно-временной аберрацией понимается уширение изображения (формируемого в гауссовой плоскости) благодаря конечной длительности Δt испускания частиц импульсным источником.

Ниже приводится метод расчета пространственно-временной аберрации (любого порядка по Δt) и обсуждаются возможные применения этой аберрации в корпускулярной оптике.

Рассмотрим произвольную переменную линзу с плоскостью симметрии $x0z$ и оптической осью $0z$ (рис. 2).

Частицы стартуют из точки $z = -D$ на оси линзы в момент времени $t = 0$ и вновь попадают на ось в точке изображения $z = P$. Найдем в первом приближении точку изображения для частиц, стартующих из той же самой точки оси в более поздний момент времени $t = \Delta t > 0$, где Δt — длительность импульса.

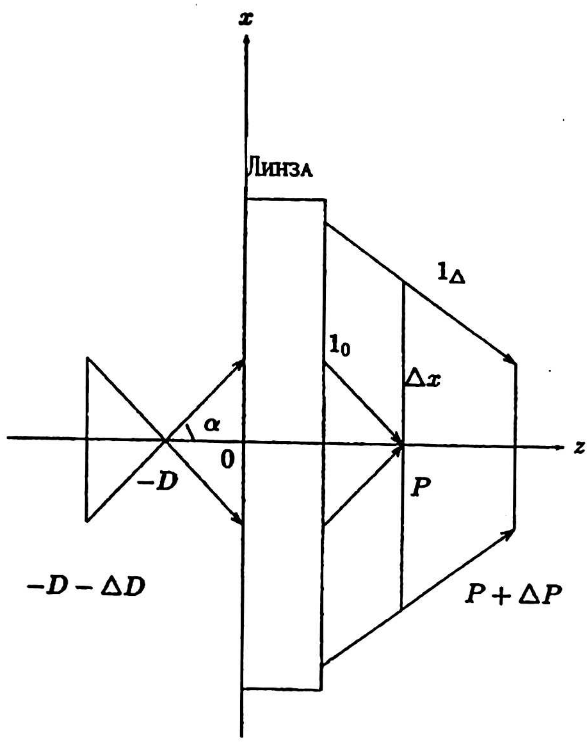

Рис. 2. Произвольная переменная линза с плотностью симметрии x0z и оптической осью 0z:
l_0 – траектория частиц, стартовавших в момент времни $t = 0$;
l_Δ – в момент времнеи $t = \Delta t$

Для "запаздывающих" частиц совершенно корректно можно положить, что они стартовали точно в момент времени $t = 0$, но не из той же точки оси, а из точки с координатами $(-D - \Delta D, x_0)$,

где
$$\Delta D = \upsilon \cos \alpha \Delta t, \tag{2}$$
$$x_0 = -\upsilon \sin \alpha \, \Delta t = -\Delta D \, \mathrm{tg}\alpha, \tag{3}$$
причем α – есть угол наклона вектора начальной скорости υ к оси $0z$.

Пространственно-временная аберрация 1-го порядка (величина Δx на рис. 2) – это уширение изображения в плоскости гауссова изображения, пропорциональное длительности импульса, которое возникает как сумма двух факторов.

Во-первых, плоскость источника в пространстве предметов $z = -(D + \Delta D)$ будет иметь сопряженную плоскость в пространстве изображений, удаленную от гауссовой плоскости на расстояние $\Delta P = -M_l \Delta D$, где M_l – мгновенное продольное увеличение линзы.

Во-вторых, из плоскости пространства предметов "запаздывающие" частицы стартуют не с оси, а из точки, удаленной от нее на расстояние x_0.

Следовательно, в сопряженной плоскости изображение будет расположено в точке $x = -M\Delta D \, \mathrm{tg}\alpha$, где M – мгновенное поперечное увеличение линзы или просто увеличение.

Дополнительно учитывая, что угол наклона частицы β в точке изображения определяется мгновенным угловым увеличением $\Gamma = \mathrm{tg}\beta/\mathrm{tg}\alpha$, можно легко рассчитывать, что плоскость гауссова изображения "запаздывающие" частицы пересекут в точке
$$\Delta x = -M\Delta D \, \mathrm{tg}\alpha + M_l \Delta D \Gamma \mathrm{tg}\alpha. \tag{4}$$

Теперь становится возможным ввести коэффициент пространственно-временной аберрации 1-го порядка [3] как величину

$$\Delta x = Mc_t \Delta D \operatorname{tg}\alpha = Mc_t \upsilon \sin\alpha \Delta t. \tag{5}$$

Такой выбор обеспечивает независимость C_t от начальной скорости частицы и угла вылета α.

Сравнивая (4) и (5), получаем C_t в окончательной форме:

$$C_t = -1 + \frac{\Gamma M_l}{M}. \tag{6}$$

Условие обращения в нуль пространственно-временной аберрации 1-го порядка

$$C_t = 0, \tag{7}$$

очевидно, обеспечивает создание линзой качественного изображения при высоком пропускании и отличается от фазового условия. Несслингера (1). Поэтому естественно считать уравнение (7) обобщением фазового условия на случаи стигматичных потоков частиц.

В случае удовлетворения условия (7) возникает проблема расчета пространственно-временной аберрации второго порядка (и выше). Далее рассмотрим только электрические осесимметричные линзы.

Поскольку основная идея расчета остается неизменной, опять рассмотрим старт "запаздывающих" частиц из точки с координатами, определяемыми уравнениями (2) — (3). Необходимо лишь вести учет более высоких степеней малой величины ΔD, пропорцианальной Δt.

Так, обозначая $\operatorname{tg}\alpha$ через x'_0, с учетом геометрических аберраций 3-го порядка, можно записать координату x пересечения сопряженной (гауссовой) плоскости в виде [5]:

$$x = Mx_0 + A_1 x_0'^3 + 3A_5 x_0 x_0'^2 + (A_3 + 2A_2)x_0^2 x_0' + A_4 x_0^3, \tag{8}$$

где коэффициенты аберраций соответствуют: A_1 — сферической аберрации; A_2 — астигматизму; A_3 — кривизны поля; A_4 — дисторсии и A_5 — коме.

При расчете пространственно-временной аберрации 2-го порядка можно не учитывать дисторсию, так как она повлияет, очевидно, только на пространственно-временную аберрацию 3-го порядка. Сами коэффициенты A_i являются функциями координаты z (для фиксированного момента времени старта частиц $t = 0$), поэтому, зная их величины для точки предмета $z = -D$, легко получить их значения для плоскости $z = -D - \Delta D$ с точностью до величин 2-го порядка по ΔD:

$$\tilde{A}_i = A_i - \frac{\partial A_i}{\partial z}\Delta D + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}(\Delta D)^2. \tag{9}$$

По формуле (9) можно рассчитывать не только изменение аберрационных коэффициентов, но и линейного увеличения M.

Изменение положения сопряженной плоскости ΔP до членов 2-го порядка определяется соотношением:

$$\Delta P = -M_l \Delta D + \frac{\partial M_l}{\partial z}(\Delta D)^2. \tag{10}$$

Наконец, понимая угловое увеличение как отношение тангенсов углов в сопряженных плоскостях при любых точках вылета из плоскости предмета, можно считать, что угловое увеличение есть функция двух переменных — x

и z. Поскольку понадобиться лишь разложение углового увеличения с точностью до линейных по ΔD-членов, можно положить

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma - \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\Delta D - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\Delta D x_0'. \tag{11}$$

Теперь все готово для расчета пространственно-временной аберрации 2-го порядка. Понимая под величинами, помеченными значком "тильда", величины, относящиеся к "запаздывающим частицам", по-прежнему можно искомую аберрацию считать как сумму двух эффектов — смещения сопряженной плоскости и прилета во внеосевую точку в смещенной сопряженной плоскости, что дает

$$\Delta\tilde{x} = x - \Delta P\tilde{\Gamma} x_0'. \tag{12}$$

Подставляя в (12) выражения (8) — (11) и приводя общие члены, получаем выражение для пространственно-временной аберрации с учетом членов до 2-го порядка по величине ΔD:

$$\Delta x = A_1 x_0'^3 + \Delta D x_0'(-M + M_l\Gamma) - \Delta D x_0'^3\left(3A_5 + \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) +$$
$$+(\Delta D)^2\left\{x_0'\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \Gamma\frac{\partial M_l}{\partial z} - M_l\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right) - x_0'^2 M_l \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \right. \tag{13}$$
$$\left. +x_0'^3\left[(A_3 + 2A_2) + 3\frac{\partial A_5}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\alpha z^2}\right]\right\}.$$

Все производные в выражении (13) берутся в точке $(-D, 0)$, что означает обращение в нуль производной углового увеличения по поперечной координате x вследствие симметрии поля.

Формула (13) включает в себя обычную сферическую аберрацию (первый член) и члены, расположенные по степеням малых величин ΔD и x'_0. Второй член есть уже выведенная ранее пространственно-временная аберрация 1-го порядка, затем следуют члены более высоких степеней. Аналогично можно найти и коэффициенты пространственно-временной аберрации любого порядка.

Полученное выражение для пространственно-временной аберрации имеет важное значение для корпускулярной оптики.

В качестве первого направления использования введенного понятия применим его к статическим системам, где, естественно, эта аберрация тождественно равна нулю, так как траектория частиц в статических полях не зависит от времени старта частицы. Следовательно, все коэффициенты степенного ряда (13) по ΔD и x'_0 (за исключением, разумеется, первого) должны порознь обращаться в ноль. Отсюда получается бесконечное число новых тождеств, из которых (13) позволяет выписать первые четыре:

$$M = \Gamma M_l; \tag{14}$$

$$A_5 = -\frac{1}{3}\frac{\partial A_1}{\partial z}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \Gamma\frac{\partial M_l}{\partial z} + M_l\frac{\partial \Gamma}{\partial z}; \tag{16}$$

$$(A_3 + 2A_2) + 3\frac{\partial A_5}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial_2 A_1}{\partial z^2} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (14) с помощью инварианта Гельмгольца — Лагранжа приводится к известному еще из световой оптики соотношению Максвелла [6]. Действительно, для одиночной линзы выполняется соотношение

$$M\,\Gamma = 1,$$

с помощью которого исключается угловое увеличение из (14), давая искомую связь между поперечным и продольным увеличениями одиночной линзы:

$$M_l = M^2.$$

Таким образом, можно сказать, что "физический смысл" соотношения Максвелла раскрывается тем, что оно является следствием существования инварианта Гельмгольца — Лагранжа и тождественного обращения в ноль пространственно-временной аберрации 1-го порядка статических систем.

Уравнение (16) есть следствие уравнения (14), получаемое из последнего однократным дифференцированием.

Соотношения (15) и (17) показывают, что кома, а также комбинация астигматизма и кривизны поля определяют продольным изменением сферической аберрации, так как соотношение (17) с использованием (15) дает

$$(A_3 + 2A_2) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}. \tag{18}$$

Из записи коэффициентов A_i через определенные интегралы [5] усмотреть соотношения (15) и (18) затруднительно.

Полученные тождества можно использовать как тесты при проведении численных расчетов линз. Более того, развитую методику можно применить как к статическим магнитным линзам, так и к реальным аберрациям, а не только к асимптотическим аберрациям одиночных и имерсионных линз, что предполагалось выше. Более того, выше была рассмотрена пространственно-временная аберрация только для точки на оси. Изучение этой аберрации для внеосевых точек также даст ряд новых соотношений.

Вследствие громоздкости общее рассмотрение в настоящей работе не проводится.

Пространственно-временная аберрация играет важную роль для нестационарных линз, у которых, как уже отмечалось выше, сферическая и хроматическая аберрации могут быть устранены. В последнем случае для получения максимального пропускания линзы необходимо не выполнение фазового условия (1), а устранение пространственно-временной аберрации 1-го порядка, т. е. удовлетворение условия (7). В частности, важным классом нестационарных полей являются изотраекторные поля [7], в которых хроматическая аберрация и кома тождественно равны нулю, а сферическая аберрация устранима.

Расчеты показывают, что в изотраекторных системах устранима и пространственно-временная аберрация 1-го порядка.

Другим возможным применением этой аберрации в рамках изотраекторных систем является случай больших ее величин. Если в изотраекторной системе устранена сферическая аберрация, то изображение точечного источника, расположенного на оси, будет представлять собой кружок очень небольшого размера (при любых начальных скоростях, так как хроматическая аберрация тождественно равна нулю) для частиц, стартующих строго в момент времени $t = 0$. Если же пучок диафрагмировать, т. е. фиксировать ненулевой начальный угол влета α, то "запаздывающие" частицы будут прилетать в плоскость гауссова изображения также компактными кружками, расположенными вдоль прямой в зависимости от времени вылета.

Таким образом, может осуществляться изучение быстропротекающих процессов, так как большая пространственно-временная аберрация 1-го порядка при прочих устраненных аберрациях позволяет осуществлять преобразование: время вылета частицы из точечного источника → положение частицы в плоскости гауссова изображения, которое, при необходимости, можно увеличить.

Литература

1. *Scherzer O.*//Optik, 1947. № 2. S. 114.
2. *Nesslinger A.*//Jahrbuch des AEG-Forscch.-Inst. 1939. № 6. S. 83.
3. *Матышев А. А.* О пространственно-временой аберрации в корпускулярной оптике: Матер. конф. "Фундаментальные исследов. в техн. университетах". – СПб.: СПбГТУ, 1997. – 263 с.
4. *Matyshev A. A.* On the generalization of the Nesslingers' phase condition: Abstracts of the 5-th Int.: Conf. on Charged Particle Optics, 1998. Delft. P. 132.
5. *Силадьи М.* Электронная и ионная оптика/Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. С. 640.
6. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики/Пер. с англ. – М.: Наука, 1973.– 720 с.
7. *Матышев А. А.* Изотраекторная корпускулярная оптика. – СПб.: Наука, 2000 (в печати).

On space-time aberration and its possible applications in corpuscular optics

A. A. Matyshev
Saint-Petersburg State Technical University, S.-Petersburg, Russia

The idea of space-time aberration is discussed. Method for calculation of this aberration is offen and some applications of this aberration is discussed.