

УДК 537.533

Разработка программного обеспечения для математического моделирования электронных пушек с катодами произвольной формы

С. В. Андреев, М. А. Монастырский, В. А. Тарасов

Институт общей физики РАН, Москва, Россия

А. Г. Муравьев

Государственное предприятие "Научно-исследовательский институт электронной и ионной оптики", Москва, Россия

Предложен новый подход самосогласованной задачи в электронной пушке с катодом произвольной формы. Основная особенность предложенного подхода в том, что наиболее эффективные численные методы оптики заряженных частиц, точнее, методы конечно-разностных и интегральных уравнений, с одной стороны, и прямой траекторный и аберрационный анализ, с другой стороны, успешно объединены. Рассмотрены и подробно проанализированы некоторые тестовые задачи.

Численное решение самосогласованной траекторно-полевой задачи в области, прилегающей к поверхности эмиттера, является центральной проблемой компьютерного моделирования электронных пушек с криволинейным или острым катодом. В большинстве работ, посвященных компьютерному моделированию электронных пушек, для описания процессов формирования электронного пучка в прикатодной области используются простые аналитические модели (например приближение плоского или сферического диода [1-3]), которые далеко не всегда адекватны реальной практике. Современный уровень развития методов и средств вычислительной физики, в целом, и корпускулярной оптики, в частности, делает вполне реальной постановку вопроса о более точном описании сложных самосогласованных процессов, происходящих вблизи эмиттера.

В работе [4] предложен итерационный алгоритм решения самосогласованной задачи в прикатодной области для электронных пушек с катодом практически произвольной формы, свободный от каких-либо априорных предположений о характере формирования электронного пучка. Для решения самосогласованной задачи применен один из вариантов метода прогонки [5] в сочетании с прямым решением уравнений Лоренца и рассмотрен ряд тестовых задач, иллюстрирующих эффективность предложенного подхода.

В рамках данной работы алгоритм работы [4] объединен с методом интегральных уравнений Фредгольма первого ряда и методом тау-вариаций [6], что позволяет эффективно использовать известные преимущества применяемых подходов для расчета всей пушки в целом. Ниже кратко излагаются особенности модернизированного алгоритма и анализируются результаты решения двух модельных задач, предложенных д-ром Р. Бадека (Dr. R. Vadheka, UK) для тестирования разработанной программы.

Краткое описание алгоритма

Основная особенность реализованного алгоритма состоит в специальном выделении прикатодной области Ξ простой формы (рис. 1), содержащей

внутри себя эмиттер. На каждой итерации отдельно производится расчет поля и траекторий в области Ξ и в остальной части пушки $\Omega \setminus \Xi$. При этом входными данными для решения задачи в области Ξ является распределение потенциала на границе Ξ , которое в свою очередь рассчитывается методом интегральных уравнений в $\Omega \setminus \Xi$. Выходными данными является множество траекторий $M_{\text{тра}}$ на правой границе области Ξ (плоскость $\xi(z_0)$ на рис. 1). Это же множество является входными данными для расчета остальной части пушки $\Omega \setminus \Xi$. Таким образом, решение задачи в области $\Omega \setminus \Xi$ осуществляется при наличии виртуального катода в плоскости $\xi(z_0)$ с функцией распределения частиц, заданной множеством $M_{\text{тра}}$.

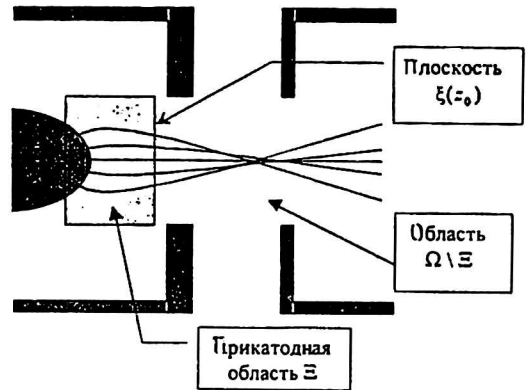


Рис. 1. Общий вид расчетной области

Вычислительные процедуры, реализующие численное решение рассматриваемой самосогласованной задачи, состоят в следующем.

Выделяется прикатодная область Ξ , внутри которой должен находиться только катод. Область Ξ покрывается прямоугольной сеткой с узлами (i, j) , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$. Ось симметрии в остальной части пушки $\Omega \setminus \Xi$ покрывается сеткой (l) , $l = 1, \dots, L$.

На k -й итерации алгоритма рассчитываются электростатический потенциал $U_k^{\text{пп}}(z, r)$ в области Ξ и потенциал $U_k(z)$ вместе с его производными на оси симметрии в области $\Omega \setminus \Xi$. В точках границы области Ξ и на оси симметрии в области $\Omega \setminus \Xi$ потенциал рассчитывается методом интегральных уравнений, а во внутренних точках Ξ — методом попеременной прогонки [5] (на первой итерации плотность пространственного заряда ρ полагается равной нулю). По всем точкам сетки (i, j) в области Ξ на k -й итерации находится минимум потенциала

$$\min U_k^{\text{пп}} = \min_{(i,j) \in \Omega} (U_k^{\text{пп}}(i, j)),$$

и для всех $k \geq 2$ выполняется релаксационное преобразование сеточного потенциала:

$$U_k^{\text{пп}}(i, j) = \lambda_k U_k^{\text{пп}}(i, j) + (1 - \lambda_k) U_{k-1}^{\text{пп}}(i, j),$$

$$U_k(l) = \lambda_k U_k(l) + (1 - \lambda_k) U_{k-1}(l),$$

где λ_k — значение параметра релаксации на k -й итерации, стратегия изменения которого от итерации к итерации изложена в работе [4].

Далее рассчитывается совокупность электронных траекторий в зависимости от положения индивидуальной частицы на эмиттере, ее начальной энергии и двух углов, определяющих ориентацию вектора начальной скорости. В прикатодной области Ξ электронные траектории рассчитываются путем решения уравнений Лоренца с начальными данными на поверхности эмиттера. На правой границе области Ξ (см. рис. 1) запоминается множество траекторий M_{tra} , достигших плоскости $\xi(z_0)$. Далее траектории множества M_{tra} продолжаются в $\Omega \setminus \Xi$ в виде абберрационных разложений в соответствии с методом тау-вариаций, при этом потенциал в $\Omega \setminus \Xi$ рассчитывается методом интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. После этого на заданной сетке рассчитывается плотность пространственного заряда, и осуществляется переход к $(k + 1)$ -й итерации.

Относительная погрешность по полю решения самосогласованной задачи в области Ξ на k -й итерации оценивается по формуле

$$\delta_k = \frac{\Delta_k}{\lambda_k (U_{max,k} - U_{min,k})},$$

где $U_{max,k}$, $U_{min,k}$ — соответственно, максимальное и минимальное значения потенциала в области Ξ на k -й итерации.

Решение тестовых задач

Задача 1. Данная тестовая задача посвящена расчету пушки Пирса, назначение которой состоит в создании параллельного пучка электронов (табл. 1).

Таблица 1

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАЧЕ О ПУШКЕ ПИРСА

Номер итерации k	Плотность тока на поверхности катода j , мкА/мм ²	Значение минимума потенциала U_{min} , В	Координата точки минимума потенциала, мм		Значение параметра релаксации λ	Относительная погрешность расчета поля δ
			z_{min}	r_{min}		
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,618	1,9
1	1,1512	0,0	0,0	0,0	0,618	0,019
2	1,1512	0,0	0,0	0,0	0,618	0,0076
3	1,1512	0,0	0,0	0,0	0,618	0,0031
4	1,1512	0,0	0,0	0,0	0,38	0,00075
5	1,1512	0,0	0,0	0,0	0,236	0,00032
6	1,1512	0,0	0,0	0,0	0,15	0,00016

Полное аналитическое решение данной задачи приведено в монографии [7]. Осевое распределение самосогласованного потенциала в системе СИ имеет вид:

$$U(z) = 5,69 \cdot 10^3 j^{2/3} z^{4/3},$$

где $U(z)$ — потенциал на расстоянии z от катода;
 j — плотность тока в пучке.

Конфигурация пушки Пирса изображена на рис. 2. Расстояние между катодом и анодом d выбрано равным 8 мм. Максимальные размеры расчетной области в осевом и радиальном направлениях составляют, соответственно, 8 и 4 мм, максимальный радиус области эмиссии $R_e = 1$ мм, температура катода $T = 0$ К, потенциал анода $U_a = 10$ В.

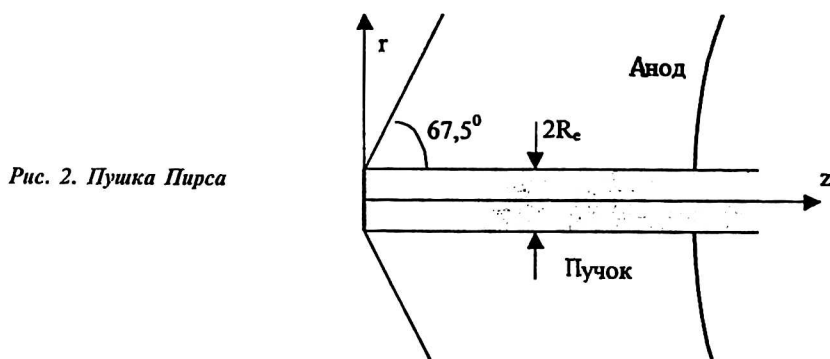


Рис. 2. Пушка Пирса

Разбиение межэлектродного пространства производилось на сетке с числом ячеек, равным 50 по оси z и 40 — по оси r .

Поскольку в данной задаче катод предполагался “холодным” (начальные энергии термоэлектронов равны нулю), для достижения надежной сходимости итерационного процесса оказалось достаточно 2000 траекторий.

Как видно из табл. 1, характеризующей процесс сходимости к самосогласованному решению в рассматриваемой задаче, уже на шестой итерации относительная погрешность по полю оказалась равной $\delta_6 = 0,00016$.

Осевое распределение плотности пространственного заряда представлено на рис. 3. На рис. 4 показана плотность тока по катоду, которая на всех итерациях одинакова и равна $1,1512$ мкА/мм², что в точности соответствует аналитическому решению для заданной конфигурации пушки.

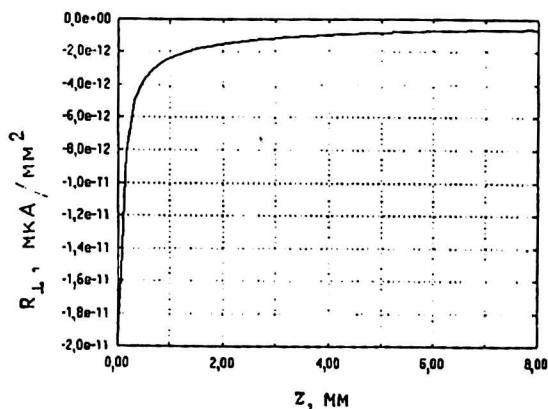


Рис. 3. Осевое распределение плотности пространственного заряда на 7-й итерации в задаче о пушке Пирса

Главным критерием достоверности численного решения в данной задаче является, разумеется, параллельность траекторий электронного пучка в самосогласованном режиме. Из рис. 5 (первая итерация) следует, что без учета пространственного заряда пучок в рассматриваемой пушке оказывается существенно сходящимся. На последней седьмой итерации траектории электронов образуют пучок, практически параллельный оси z (рис. 6).

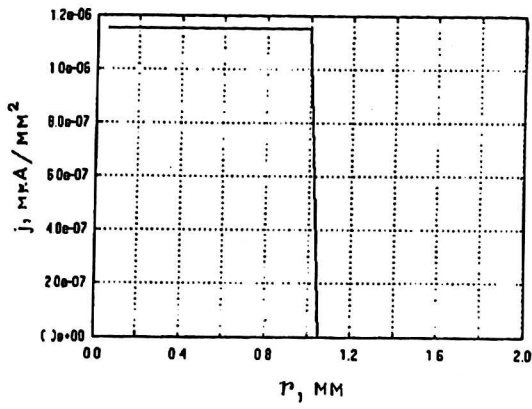


Рис. 4. Распределение плотности тока по катоду в задаче о пушке Пирса

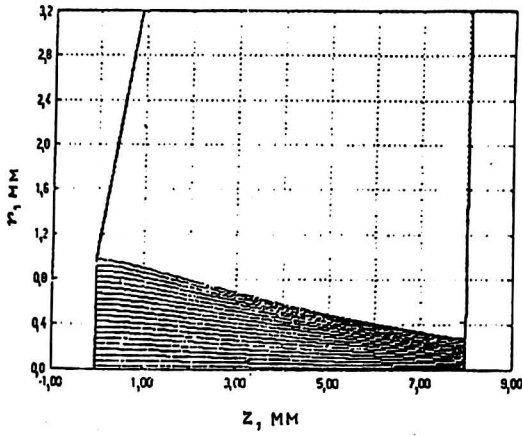


Рис. 5. Электронные траектории в задаче о пушке Пирса на 1-й итерации

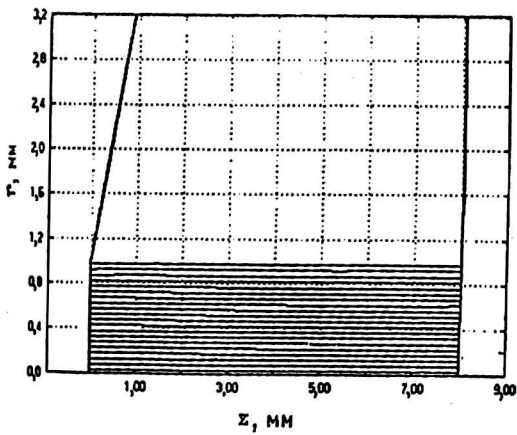
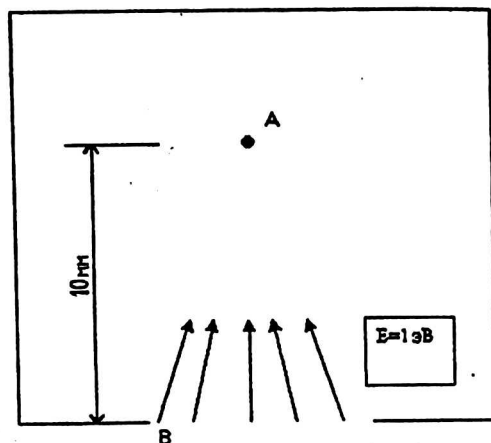


Рис. 6. Электронные траектории в задаче о пушке Пирса на 7-й (последней) итерации

Задача 2. Данная задача иллюстрирует сильную дефокусировку (“распад”) сходящегося моноэнергетического электронного пучка в эквипотенциальном пространстве под влиянием сил пространственного заряда. Рассматривается осесимметричный однородный (электронная плотность на эмиттере постоянна по сечению) пучок электронов с энергией 1 эВ, сходящийся в эквивалентном пространстве в точку A (рис. 7). Начальный радиус пучка $R_0 = 3$ мм, расстояние от эмиттера до точки “виртуальной” сходимости $AB = l = 10$ мм.

Рис. 7. К задаче о сходящемся пучке в эквипотенциальном пространстве



При сделанных предположениях плотность тока на эмиттере зависит от радиальной координаты r и имеет вид

$$j_z(r) = \frac{I_0}{2\pi(l^2 + R_0^2 - l)} \cdot \frac{1}{l^2 + r^2},$$

где I_0 — полный ток пучка на эмиттере, который в приводимых ниже расчетах полагался равным $I_0 = 0,689$ мкА.

Задача решалась в расчетной области, размеры которой в z и r направлениях равны, соответственно, $d = 20$ и $2R = 20$ мм; потенциал “стенок” области равен нулю. Разбиение межэлектродного пространства производилось на сетке с числом ячеек, равным 160 по оси z и 80 — по оси r . Траектории рассчитывались с одинаковым шагом по радиусу, равным 0,1875 мкм, число расчетных траекторий — 16 000.

Табл. 2 характеризует процесс сходимости к самосогласованному решению в рассматриваемой задаче. Очень хорошая сходимость была получена уже на 25-й итерации (относительная погрешность составила 0,00091), далее происходили лишь незначительные осцилляции глубины потенциальной ямы в пятом-шестом знаке. Расчетное значение глубины потенциальной ямы составило 1 В и оказалось равным энергии электронов, что полностью соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи.

На рис. 8, 9 показаны распределения плотности пространственного заряда на 9-й и 15-й итерациях, соответственно. Рис. 10 иллюстрирует плотность пространственного заряда на начальном этапе решения задачи (1-я итерация) и на последней, 50-й итерации, рис. 11 — осевые распределения плотности пространственного заряда на 1-й, 10-й и 50-й итерациях.

На 1-й итерации влияние пространственного заряда отсутствует, и пучок, как это и должно быть, сходится в точке A (см. рис. 7). На 7-й итерации

$U_{\min} < -1$ В, и чем выше потенциальный барьер, тем сильнее его рассеивающее на пучок. При уменьшении глубины потенциальной ямы происходит уменьшение рассеивания электронного пучка. На 15-й итерации $U_{\min} > -1$ В, поэтому довольно значительная часть электронов пролетает вперед, не отклоняясь. На 50-й итерации таких электронов уже практически нет, так как $U_{\min} = -1$ В с высокой точностью. Подавляющая часть электронов рассеивается в виде "фонтана" на потенциальной яме, незначительная часть электронов возвращается назад вдоль оси z .

Таблица 2

**СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ЗАДАЧЕ
О СХОДЯЩЕМСЯ ПУЧКЕ**

Номер итерации k	Плотность тока в центре катода j , мкА/мм ²	Значение минимума потенциала U_{\min} , В	Координаты точки минимума потенциала, мм		Значение параметра релаксации λ	Относительная погрешность расчета поля δ
			z_{\min}	r_{\min}		
1	0,0252	0,0	1,0	0,0	0,618	—
5	0,0252	-0,443	1,075	0,0	0,618	2,24
10	0,0160	-1,139	1,0125	0,0	0,236	0,10
15	0,0252	-0,9982	0,65	0,0	0,090	0,013
20	0,0179	-1,00054	0,625	0,0	0,034	0,0083
25	0,0183	-1,00000	0,6125	0,0	0,0050	0,00091
30	0,0186	-0,99997	0,6125	0,0	0,0012	0,00026
40	0,0187	-0,999978	0,6125	0,0	0,00028	$6,0 \cdot 10^{-5}$
50	0,0187	-0,999977	0,6125	0,0	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-6}$

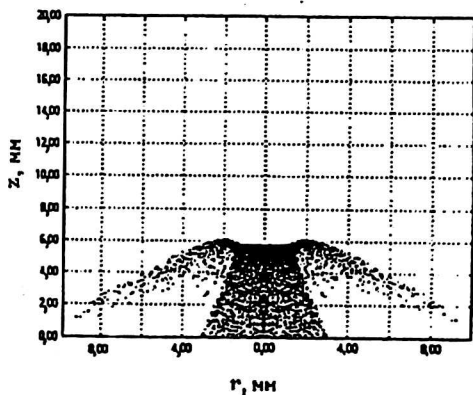


Рис. 8. Распределение плотности пространственного заряда в задаче о сходящемся пучке на 9-й итерации

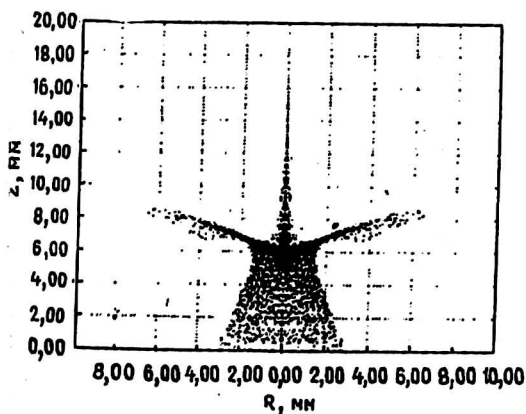


Рис. 9. Распределение плотности пространственного заряда в задаче о сходящемся пучке на 15-й итерации

Рис. 10. Распределение плотности пространственного заряда в задаче о сходящемся пучке на 1-й и 50-й (последней) итерациях

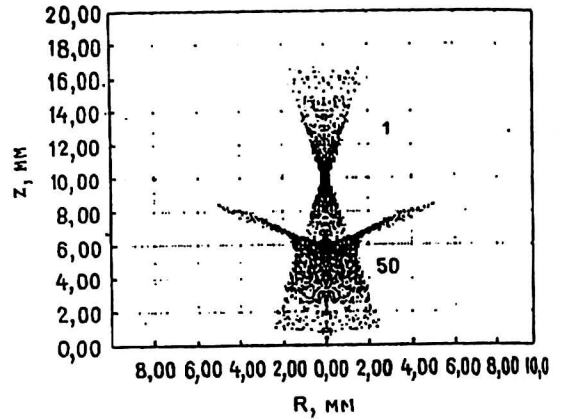
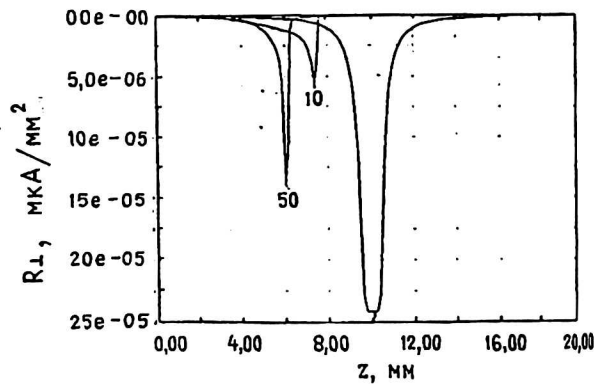
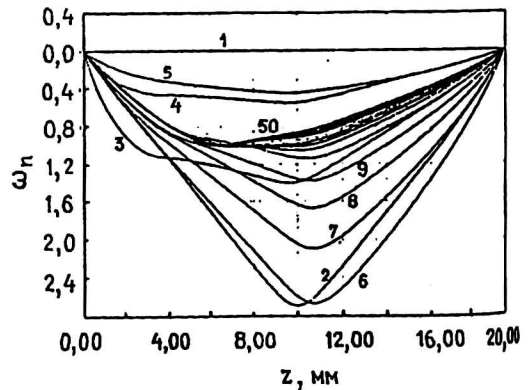


Рис. 11. Осевые распределения плотности пространственного заряда на 1-й, 10-й и 50-й итерациях



На рис.12 приведены расчетные осевые распределения потенциала на различных итерациях, иллюстрирующие сходимость по полю: В других сечениях качественная картина сходимости по полю аналогичная.

Рис. 12. Осевые распределения потенциала на различных итерациях в задаче о сходящемся пучке (1-9 итерации, 50-я итерация)



Выводы

Разработанный алгоритм расчета электронных пушек, основанный на специальном выделении прикатодной области и попеременного итерационного расчета этой области и остальной части пушки, а также построенная на основе алгоритма программа обеспечивают устойчивое решение самосогласованной задачи для электронных пушек с практически произвольной формой

Рис. 10. Распределение плотности пространственного заряда в задаче о сходящемся пучке на 1-й и 50-й (последней) итерациях

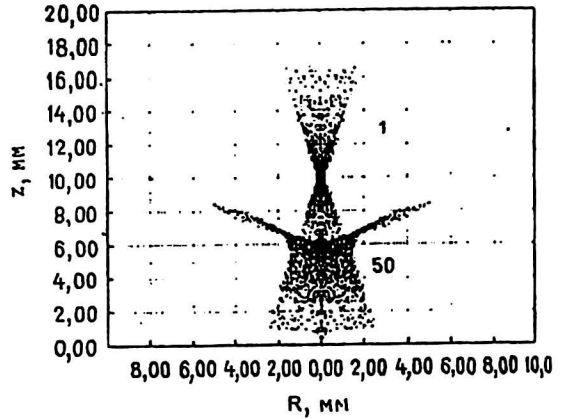
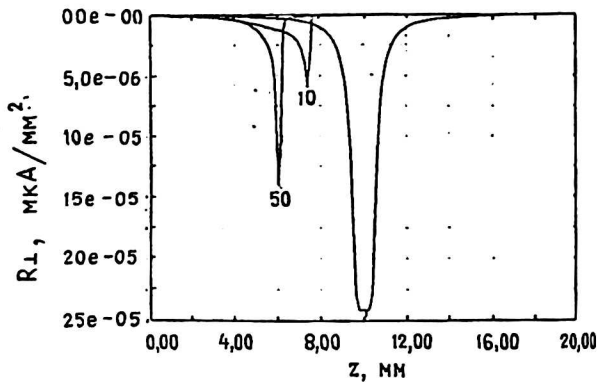
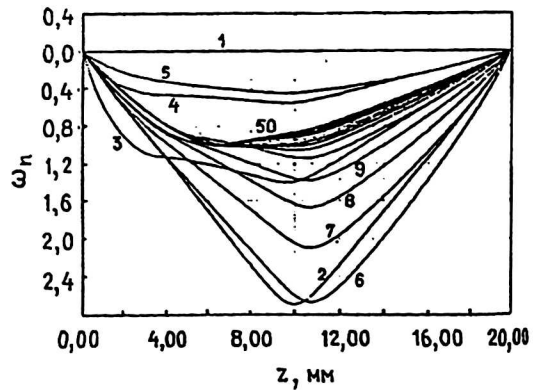


Рис. 11. Осевые распределения плотности пространственного заряда на 1-й, 10-й и 50-й итерациях



На рис.12 приведены расчетные осевые распределения потенциала на различных итерациях, иллюстрирующие сходимость по полю. В других сечениях качественная картина сходимости по полю аналогичная.

Рис. 12. Осевые распределения потенциала на различных итерациях в задаче о сходящемся пучке (1-9 итерации, 50-я итерация)



Выводы

Разработанный алгоритм расчета электронных пушек, основанный на специальном выделении прикатодной области и попеременного итерационного расчета этой области и остальной части пушки, а также построенная на основе алгоритма программа обеспечивают устойчивое решение самосогласованной задачи для электронных пушек с практически произвольной формой

катода. В алгоритме использован синтез двух методов решения уравнения Пуассона: метода прогонки в прикатодной области и метода интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода в остальной части пушки. Использован также синтез двух методов вычисления электронных траекторий: путем решения уравнений Лоренца для траекторий частиц и прикатодной области и продолжения этих траекторий в остальную часть пушки в виде абберационных разложений на основе метода тау-вариаций.

На тестовых задачах показана эффективность разработанного алгоритма и программы.

Л и т е р а т у р а

1. Бурсиан В. Р. // ЖРФХО 51. 1921, 289. I. Langmuir, Phys. Rev. 1923. 21, 419.
2. Добрецов Л. Н., Гомоюнова М. В. Эмиссионная электроника. — М.: Наука, 1966.
3. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики. — М.: Мир, 1993.
4. Монастырский М. А., Муравьев А. Г., Тарасов В. А. Численное решение самосогласованной задачи расчета электронных пушек в прикатодной области методом итераций // Прикладная физика, 1998. № 2. С. 22–33.
5. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.
6. Монастырский М. А. Метод тау-вариаций и некоторые вычислительные проблемы электронной оптики динамических электронно-оптических систем // Прикладная физика. 1996. № 3. С. 7.
7. Пирс Дж. П. Теория и расчет электронных пучков. — М.: Сов. радио, 1956.

The software development for computer modeling of electron guns with arbitrary-shaped cathode

S. V. Andreev, M. A. Monastyrski, V. A. Tarasov
General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

A. G. Murav'ev

State Enterprise, Research Institute for Electron and Ion Optics, Moscow, Russia

A new approach to solve the self-consistent problem in electron gun with arbitrary-shaped cathode is suggested. The main feature of the approach proposed is that the most effective numerical techniques of charged particle optics, namely finite-difference and integral equation methods on the one hand and direct ray-tracing and aberration analysis on the other, are successfully integrated. Some testing problems are considered and analyzed in details.