УДК 551.515

Тепловыделение как механизм самоподдержания закрученного потока в газе

У. Юсупалиев, А. К. Маслов, С. А. Шутеев
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В осесимметричной модели в приближении Буссинеска рассмотрено влияние тепловыделения на увеличение скорости вращения закрученного потока. В линейном приближении показано, что КПД преобразования тепловой энергии в кинетическую энергию вращательного движения пропорционален квадрату частоты вращения закрученного потока и в условиях смерча и плазменного тороидального вихря может составлять несколько процентов.

Несмотря на давнюю историю изучения и практическую важность закрученных потоков, их общие закономерности еще недостаточно подробно изучены. Так, до сих пор окончательно не выяснены физические механизмы зарождения, самоподдержания и распада закрученных потоков [1—6]. Различные подходы, разработанные в теории атмосферных вихрей, теории вихревых промышленных аппаратов [7—8], магнитной гидродинамики [9], оказываются недостаточными для построения полной теоретической модели, позволяющей делать количественные расчеты с необходимой точностью, объясняющей результаты натурных измерений и учитывающей многокомпонентность сред, сложность, трехмерность процессов, существенных для зарождения, развития, самоподдержания и распада вихревых образований, нелинейность уравнений, описывающих эти процессы. Проводимые по программе "Сторм фьюри" эксперименты по уменьшению разрушительной силы тропических циклонов показали, что современный уровень науки и техники позволяет воздействовать на циклоны, но такое воздействие может вызвать климатические катастрофы.

Общепризнано, что принципиальным источником энергии атмосферных вихрей различных пространственных масштабов является скрытая теплота, выделяющаяся в результате конденсации атмосферной влаги [10—13]. Однако дискуссия о конкретных физических процессах, переводящих энергию фазового перехода в кинетическую энергию закрученного потока, далека от завершения [1—4]. Одним из ключевых вопросов, например теории тропических циклонов, является вопрос о том, как энергия мелкомасштабного процесса конвекции кучевых облаков передается мезомасштабному атмосферному вихрю.

В работе [5] показано, что механизм турбулентного перемешивания может ограничить скорость нарастания более неустойчивых мелкомасштабных процессов, что дает возможность сосуществования в одном вихревом образовании процессов разных пространственных и временных масштабов. Однако в [5] пренебрегалось тепловыделением и рассматривались только стоки энергии, а не механизмы ее перехода в другие виды. Необходимость комплексного рассмотрения разномасштабных явлений для понимания физических процессов в вихре подчеркнута в работе [6].

В работах [14—15] были исследованы особенности конвекции во вращающейся жидкости. Было отмечено, что в случае достаточно быстрого вращения осесимметричная конвекция поперек вихревых линий подавлена силой Кориолиса. В [16] обосновано использование приближение Буссинеска для тепловыделяющих жидкостей. В [17] рассмотрены пространственные масштабы, для которых корректно приближение Буссинеска в жидкостях и газах.

В данной статье на примере линейной осесимметричной модели в приближении Буссинеска сделана попытка показать, что тепловыделение в газовом вихре способно порождать крупномасштабное азимутальное движение, увеличивая полную циркуляцию потока. Предложенная модель должна хорошо описывать процессы в смерче [18] и тонком плазменном тороидальном вихре [19—20], в котором тепловыделение происходит в результате процессов рекомбинации и агрегации молекул.

Ниже рассмотрим плоскую осесимметричную задачу: пусть в неограниченном пространстве существует однородный вдоль оси Oz закрученный поток с заданной циркуляцией на бесконечности Г. Динамика газа в этом потоке описывается системой уравнений, состоящей из уравнений Навье-Стокса, теплопроводности и неразрывности [21]:

$$\rho\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -\nabla p + \eta\nabla\mathrm{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\nabla\mathrm{div}\mathrm{v};$$

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{div}(\chi\nabla T) + \frac{1}{c_p}\left(\frac{Q(\mathbf{r}, t)}{\rho} + \frac{\nu}{2}S_k^i\, S_i^k\right); \qquad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\mathrm{v} = 0.$$

Здесь $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\mathrm{v}\nabla)$ — субстанциональная производная;

$Q(\mathbf{r}, t)$ — объемная плотность источников тепла;

S_k^i — тензор скоростей деформации

$$S_k^i = \left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \chi_k} + \frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial \chi_i}\right).$$

Остальные обозначения — см. в работе [21]. Коэффициент температуропроводности χ и динамическую вязкость $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ будем далее полагать постоянными.

Выберем начало отсчета полярной системы координат (r, φ) в центре потока и предположим, что в течение достаточно большого времени до момента $t = 0$ механизм тепловыделения был незадействован. Дополним систему (1) естественными граничными условиями:

$$\mathrm{v}(0) = 0, \ \lim_{R\to\infty} \oint_{r=R} (\mathrm{v}, dl) = \Gamma;$$

$$T(0) < \infty, \ \lim_{r\to\infty} T(r) = T_\infty; \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \ \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho_\infty$$

и уравнением Менделеева-Клапейрона в форме $p = \rho T$ (температура здесь измеряется в $м^2/с^2$).

Найдем стационарную точку задачи (1)—(2). С учетом осесимметричности задачи и граничных условий (2) из уравнения неразрывности приходим к выводу, что $v_r = 0$. Следовательно, главные члены тензора скоростей деформации обратятся в ноль, а побочные примут вид [22]

$$S_\varphi^r = S_r^\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right).$$

Таким образом, стационарное решение (1), соответствующее граничным условиям (2), имеет вид:

$$v_r = 0$$

$$v_\varphi = v_0 = \begin{cases} \dfrac{\Gamma r}{2\pi a^2} = \Omega r, & r \le a, \\[2ex] \dfrac{\Gamma}{2\pi r} = \dfrac{\Omega a^2}{r}, & r \ge a, \end{cases}$$

$$T = T_0 = \begin{cases} T_\infty - \dfrac{\nu\Omega^2 a^2}{4\chi c_p}, & r \le a, \\[2ex] T_\infty - \dfrac{\nu\Omega^2 a^4}{4\chi c_p r^2}, & r \ge a, \end{cases} \tag{3}$$

$$\rho = \rho_0 = \begin{cases} \rho_\infty \exp\left(-\dfrac{\Omega^2}{2T_0}(2a^2 - r^2)\right), & r \le a, \\[2ex] \rho_\infty \exp\left(-\dfrac{\Omega^2 a^4}{2T_0 r^2}\right), & r \ge a, \end{cases}$$

где $\Omega = \dfrac{\Gamma}{2\pi a^2}$ — угловая скорость вращения ядра вихря. Величина a в данной постановке остается неопределенной. Об определении величины a см., например в [7]. Так как при температуре на бесконечности ~ 300 K, a ~ 100 м, $\Omega \sim 1$ $с^{-1}$ (условия, возможные для смерча [18])

$$\frac{\nu\Omega^2 a^2}{4\chi c_p T_\infty} \sim 10^{-2},$$

при определении ρ_0 полагалось, что $T_0 \equiv T_\infty$.

Пусть на фоне решения (3) в потоке возникает однородное по углу φ возмущение, связанное с действием в ограниченной области $r_1 < r < r_2$ источников тепла объемной плотностью $T_0\rho_0 c_p f(r)$. Динамику возмущения будем описывать в приближении Буссинеска [23] (т. е. мы пренебрегаем изменением плотности всюду, кроме тех случаев, когда они связаны с возмущением температуры). Из (3) видно, что приближение Буссинеска будет корректно при выполнении условия

$$\frac{\Omega^2 a^2}{T_0} << 1.$$

Действительно, при выбранных параметрах для смерча или при $\Omega \sim 6\cdot10^3$ с$^{-1}$, $T \sim 1$ эВ, $a \sim 0{,}1$ м (характерные параметры для внутренней области плазменного тороидального вихря [19]) $\frac{\Omega^2 a^2}{T_0} \sim 0{,}1$, т. е. условия, реализуемые в смерче и плазменном тороидальном вихре, находятся на грани применимости приближения Буссинеска.

В системе отсчета, вращающейся вместе с ядром вихря, из (1) получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla V) = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta V - \frac{v_0^2}{r}\theta e_r - 2\Omega[e_z V]; \tag{4}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (V\nabla)\theta = \chi\Delta\theta + f(r) + F_1[V]; \tag{5}$$

$$\operatorname{div} V = 0,$$

здесь V и P — возмущения скорости и давления; $F_l[V]$ — диссипативный член [22]; θ — относительное возмущение температуры: $\theta = (T-T_0)/T_0$, e_r и e_z — единичные векторы, направленные вдоль осей r и z, соответственно. Третий и четвертый члены в правой части (4) описывают, соответственно, силу плавучести и силу Кориолиса. При записи члена, описывающего плавучесть, учтено, что для идеального газа коэффициент температурного объемного расширения при постоянном давлении $-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}$. Будем полагать, что кинетическая энергия конвективных потоков мала в сравнении с полной энтальпией газа [24], и на этом основании пренебрегаем членом, содержащим градиент давления. Начальные и граничные условия, естественно, выбраны в виде

$$V\big|_{t=0} = V\big|_{r=0} = V\big|_{r=\infty} = 0; \tag{6}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta\big|_{r=0} = \theta\big|_{r=\infty} = 0. \tag{7}$$

Пренебрежем в (4) и (5) членами, нелинейными по V и θ. Уравнение (5) описывает установление стационарного профиля температуры за время порядка $\tau \sim (r_2-r_1)^2/\chi$. Если $r_2-r_1 \sim 1$ м, то в воздухе $\tau \sim 10^5$ с. Следовательно, если мы рассматриваем локальный процесс с характерными временами не более нескольких часов, с учетом начальных условий (7), уравнение (5) описывает почти линейный рост температуры, даже если мы пренебрежем не только температуропроводностью, но и диссипативным членом:

$$\theta \approx t f(r).$$

С другой стороны, для газов $\nu \approx \chi$ (в плазменном тороидальном вихре при степени ионизации не выше 10^{-2} мы пренебрегаем влиянием ионизации на параметры среды), а так как мы пренебрегли нелинейными членами в (4) и (5), то пространственный спектр скорости определяется пространственным спектром $f(r)$, и, следовательно, мы можем пренебречь в (4) вязким членом в сравнении, например, с силой Кориолиса, если $\Omega >> \frac{1}{\tau}$. С учетом того, что мы в (4) пренебрегли изменением давления, инерционным и вязким членами, имеем

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} - 2\Omega V_\varphi = -\frac{\nu_0^2}{r} t f(r),$$
$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + 2\Omega V_r = 0. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$h(r) = -\frac{\nu_0^2}{r} f(r). \tag{9}$$

Решая (8) с учетом начальных условий (6) и соотношения (9), получаем

$$V_r = \frac{h}{4\Omega^2}\left(1 - \cos(2\Omega t)\right),$$
$$V_\varphi = \frac{h}{4\Omega^2}\left(\sin(2\Omega t) - 2\Omega t\right), \tag{10}$$

или, усредняя (10) по периоду вращения, получим:

$$\langle V_r \rangle = \frac{h}{4\Omega^2},$$
$$\langle V_\varphi \rangle = -\frac{ht}{2\Omega}.$$

Оценим по порядку величины эффективность преобразования тепловой энергии в кинетическую энергию азимутального движения $\frac{\Delta K}{\Delta Q}$. В линейном по возмущенной скорости приближении

$$\frac{\Delta K}{\Delta Q} = \frac{\int \rho_0 \nu_0 V_\varphi r dr}{c_p T_0 t \int \rho_0 f(r) r dr} = \frac{\int \rho_0 \frac{\nu_0^3}{r} f(r) r dr}{2\Omega c_p T_0 \int \rho_0 f(r) r dr}.$$

Считая, что $r_2 < a$, имеем

$$\frac{\Delta K}{\Delta Q} \approx \frac{Q^2 (r_2 - r_1)^2}{c_p T_0}. \tag{11}$$

Для выбранных параметров эта величина превышает 3 % и будет сильно расти с ростом пространственного масштаба или частоты вращения.

Таким образом, на примере осесимметричной задачи в приближении Буссинеска рассмотрен механизм преобразования скрытой теплоты в кинетическую энергию закрученного потока и показано, что в условиях корректности выбранного приближения КПД этого преобразования может составлять несколько процентов. Однако формула (11) позволяет думать, что при больших пространственных масштабах (при которых наши выкладки теряют строгость) этот КПД может достигать и больших значений.

Литература

1. Интенсивные атмосферные вихри. – М.: Мир, 1985. – 368 с.
2. *Казенцев Н. В.* Теория атмосферных вихрей и ее применение для задач прогноза. — Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 115 с.
3. *Хаин А. П.* Математическое моделирование тропических циклонов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 247 с.
4. Can eddy fluxes serve as a catalyst for hurricane and typhoon formation/*Challa M., Preffer B. L., Zhao Q., Chang S. W.*// J. Atmos. Sci, 1998. V. 55. № 20. P. 2201—2219.
5. *Kuo H. L.* On the controlling influences of eddy diffusion on thermal convection.// Ibid. 1962. V. 19. № 3. P. 236—243.
6. *Ооямa К. В.* Об основных проблемах теории и моделироания тропических циклонов// Интенсивные атмосферные вихри. – М.: Мир, 1985. С. 38—47.
7. *Меркулов А. П.* Энергетика и необратимость вихревого эффекта// Вихревой эффект и его применение в технике. – Куйбышев, 1981. С. 5—12.
8. Вихревые аппараты/ *Суслов А. Д., Иванов С. В., Мурашкин А. В., Чижиков Ю. В.* — М.: Машиностроение, 1985. — 256 с.
9. *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. — М.: Мир, 1980. — 344 с.
10. *Riehl H.* A model for hurricane formation// J. Appl. Phys., 1950. V. 21. P. 917—925.
11. *Kleinschmidt E.* Grundlagen einer theorie der tropischen zyklonen// Arch. Meteor. Geophys. Bioclimatol, 1951. V. A4. P. 53—72.
12. *Emanuel K. A.* An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part I: Steady state-maitenance// J. Atmos. Sci. 1986. V. 43. № 6. P. 585—604.
13. *Писиченко Е. А.* Роль фазовых переходов влаги в процессе образования смерчей// Изв. РАН. Сер. Физика атмосферы и океана, 1993. Т. 29. № 6. С. 793—798.
14. *Hide R.* Theory of axisimmetric thermal convection in a rotating fluid annulus// The physics of fluids. 1967. V. 10. №. 1. P. 56—68.
15. *Hide R., Mason P. J.* Sloping convection in a rotating fluid// Advances in Physics, 1975. V. 24. № 1. P. 47—100.
16. *Герцуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
17. *Голицын Г. С.* Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 57 с.
18. *Наливкин Д. В.* Смерчи. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
19. *Юсупалиев У.* Импульсное истечение плотной плазмы в затопленную среду.: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1988. — 168 с.
20. *Юсупалиев У.* и др. Плазменный тороидальный вихрь в воздухе// Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26. № 4. С. 639—643.
21. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теоретическая физика: Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
22. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
23. *Джозеф Д. Д.* Устойчивость движений жидкости. – М.: Мир, 1981. – 640 с.
24. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.

Release of latent heat as a mechanism of the self-maintenance of gas vortex flow

U. Yusupaliyev, A. K. Maslov, S. A. Shuteyev
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Axisimmetric gas vortex flow is considered. Release of latent heat influence on the vorticity of flow is investigated in conditions in which Boussinesq approximation is valid. It is shown that in linear approach ratio of increase of kinetic energy of azimuthal motion to released latent heat is proportional to square of flow vorticity. The ratio may make up some per cent for tornado and plasma toroidal vortex.