

УДК 621.382

## Электромагнитные волны в плазменных волноводах. Часть II\*

М. В. Кузелев, Р. В. Романов, А. А. Рухадзе  
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

*Настоящий обзор посвящен детальному описанию спектров электромагнитных волн в волноводах, заполненных плазмой. Рассмотрены как объемные, так и поверхностные волны. Поверхностные волны существуют только в волноводах, частично заполненных плазмой. Особое внимание уделено медленным волнам, их пространственной структуре, их фазовым и групповым скоростям. Такие волны возбуждаются в плазменных волноводах прямолинейными релятивистскими электронными пучками вследствие вынужденного черенковского излучения или взаимодействия таких волн с ленгмюровскими колебаниями пучка. Именно поэтому в последнем разделе статьи рассмотрены волны в электронном пучке.*

### 6. Волновод со сплошным плазменным заполнением ( $r_1 = 0$ , $r_2 = R$ )

Рассмотрим общий непотенциальный случай при произвольном внешнем магнитном поле. Начнем с волновода со сплошным плазменным заполнением. При  $r_1 = 0$ , используя требование ограниченности полей на оси волновода, из общего решения уравнений Максвелла (1.14 — см. ч. I) получаем следующие более простые выражения

$$\begin{aligned} E_z &= AJ_1(k_1 r) + CJ_1(k_2 r), \\ B_z &= A\beta_1 J_1(k_1 r) + C\beta_2 J_1(k_2 r). \end{aligned} \quad (6.1)$$

\* Часть I данной статьи опубликована в журнале "Прикладная физика" № 2 за 2001 г. В части II нумерация рисунков и формул продолжается.

Для исключения постоянных  $A$  и  $C$  используем граничные условия на металлической стенке волновода:  $E_z(R) = E_\varphi(R) = 0$ , где  $E_\varphi$  дается вторым выражением (1.8,а — см. ч. I). В результате получим дисперсионное уравнение для спектров колебаний волновода, полностью заполненного однородной магнитоактивной плазмой:

$$J_1(k_1 R) J_1'(k_2 R) k_2 \left( \frac{\omega}{k_z c} g - i \beta_2 \frac{\chi^2}{k_z^2} \right) - J_1(k_2 R) J_1'(k_1 R) k_1 \left( \frac{\omega}{k_z c} g - i \beta_1 \frac{\chi^2}{k_z^2} \right) + i \frac{l}{R} J_1(k_1 R) J_1(k_2 R) \frac{\omega^2}{k_z^2 c^2} g (\beta_2 - \beta_1) = 0, \quad (6.2)$$

где  $\beta_{1,2}$  определены в (1.15, — см. ч. I). Штрих в (6.2) означает дифференцирование по всему аргументу.

Уравнение (6.2) очень сложное и в общем случае решается только численно. Аналитические же его решения для предельных случаев  $\Omega_e \rightarrow \infty$  и  $\Omega_e = 0$  были рассмотрены ранее. Чтобы продолжить серию рисунков, начатую рис. 3 (сплошное плазменное заполнение,  $R = 2$  см,  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с,  $\Omega_e \rightarrow \infty$ ), приведем рис. 7 (ссылка на рис. 1—6 дана в ч. I), на котором показаны дисперсионные кривые волновода с теми же параметрами, но без внешнего магнитного поля. Кривые эти определяются формулами (4.4 — см. ч. I). Сплошные линии относятся к волнам  $E$ -типа, а пунктирные — к волнам  $H$ -типа. Плазменная волна  $\omega = \omega_p$  на рис. 7 не показана.

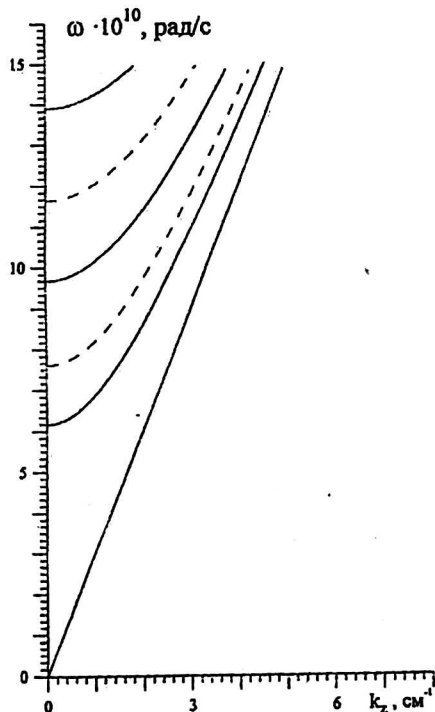


Рис. 7. Дисперсионные кривые симметричных волн плазменного волновода со сплошным заполнением без внешнего магнитного поля при  $R = 2$  см и  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с

При произвольном значении внешнего магнитного поля уравнение (6.2) решается аналитически еще и в пределе  $k_z \rightarrow 0$ , что позволяет определить частоты отсечки плазменного волновода в конечном магнитном поле. Для этих частот из (6.2) получаются два уравнения:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\mu'_{ls}}{R^2} c^2 \tag{6.3}$$

и

$$\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^2 - \omega^2 \Omega_e^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \Omega_e^2} = \frac{\mu'_{ls}}{R^2} c^2 \equiv \omega_0^2,$$

где  $\mu'_{ls}$  — корень производной функции Бесселя.

Первое соотношение (6.3) не зависит от магнитного поля. Оно определяет частоты отсечки волн *E*-типа, рассмотренные нами при  $\Omega_e \rightarrow \infty$  (рис. 1.3, — см. ч. I) и  $\Omega_e = 0$  (см. рис. 7). Второе уравнение (6.3) определяет частоты отсечки волн *H*-типа ( $\omega_0 = \omega_0(s)$  — частота отсечки волны *H*-типа в вакуумном волноводе) и тех волн, у которых при  $\Omega_e = 0$  спектр имеет вид  $\omega = \omega_p$ .

Решение второго уравнения (6.3) удобно представить для приведенных частот, вводя  $\omega^{np} = \omega/\omega_0$ ,  $\omega_p^{np} = \omega_p/\omega_0$  и  $\Omega_e^{np} = \Omega_e/\omega_0$ . В приведенном виде

решение явно не зависит от номера моды *s*. Для каждого *s*, т. е. для каждой радиальной моды имеются две частоты отсечки. На рис. 8 при фиксированной плазменной частоте представлены зависимости частот отсечки от электронной циклотронной частоты. Рис. 8, *a* относится к тем радиальным модам, для которых  $\omega_p < \omega_p(s)$  — высокие моды (конкретно на рисунке  $\omega_p^{np} = 0,5$ ). Видно, что с ростом  $\Omega_e$  нижняя частота отсечки возрастает от  $\omega_p$

до  $\omega_0(s)$  — кривая 2. Повышается и верхняя частота отсечки от  $\sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2(s)}$  до верхнегибридной частоты. Рис. 8, *б* относится к тем радиальным модам, для которых  $\omega_p > \omega_0(s)$  — низкие моды (конкретно, на рис.  $\omega_p^{np} = 2$ ). Видно, что с ростом  $\Omega_e$  нижняя частота отсечки убывает от  $\omega_p$  до  $\omega_0(s)$  — см. кривую 2.

Верхняя же частота отсечки возрастает от  $\sqrt{\omega_p^2 + \omega_0^2(s)}$  до  $\Omega_e$ .

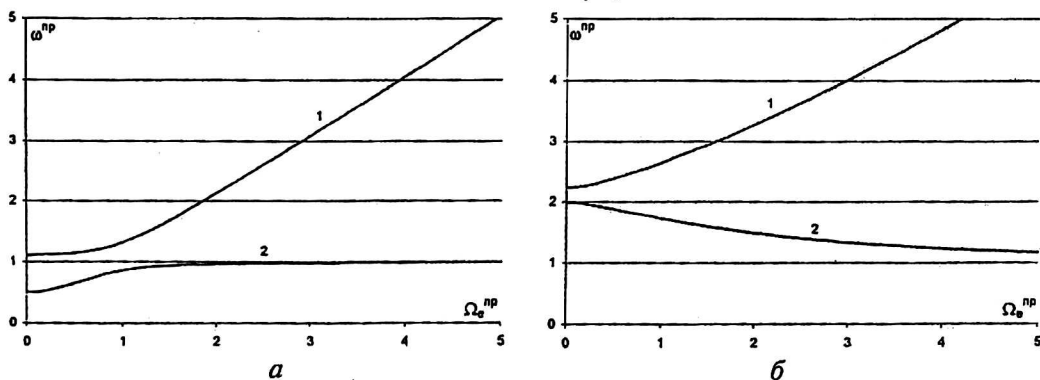


Рис. 8. Частоты отсечки симметричных мод плазменного волновода со сплошным заполнением при  $\omega_p^{np} = 0,5$  — (а) и при  $\omega_p^{np} = 2$  — (б)

Прежде чем перейти к рассмотрению спектров в конечном внешнем магнитном поле, для общего случая укажем область плоскости  $(k_z, \omega)$ , где не может проходить ни одна из дисперсионных кривых волн в волноводе со сплошным плазменным заполнением. Из формул (1.14 — см. ч. I) видно, что структура полей определяется величинами (1.13 — см. ч. I)  $k_{1,2}$ . Если квадрат

хотя бы одной из этих величин в какой-либо части плоскости  $(k_z, \omega)$  положителен, то там могут находиться дисперсионные кривые объемных волн. Если же в какой-то части плоскости  $k_z, \omega$  и  $k_1^2$  и  $k_2^2$  одновременно меньше нуля или комплексны, то дисперсионных кривых там нет. Действительно, в общем решении (1.14 — см. ч. I) вместо обычных функций Бесселя появляются модифицированные функции, описывающие структуру поверхностных волн, которых в волноводе со сплошным заполнением быть не может. Из (1.13 — см. ч. I) следует, что  $k_1^2$  и  $k_2^2$  комплексны внутри области, граница которой определяется формулами

$$\omega_{1,2}^2 = k_z^2 c^2 \frac{\Omega_e^2 + 2\omega_p^2 \pm 2\left(\omega_p^4 + \Omega_e^2 \omega_p^2 - \Omega_e^2 k_z^2 c^2\right)^{1/2}}{\Omega_e^2 + 4k_z^2 c^2}. \quad (6.4)$$

Соотношение (6.4) определяет на плоскости  $(k_z, \omega)$  замкнутую область петлеобразной формы. Верхняя точка области имеет координаты

$$k_z = \frac{\omega_p}{c}, \quad \omega = \omega_p, \quad (6.5)$$

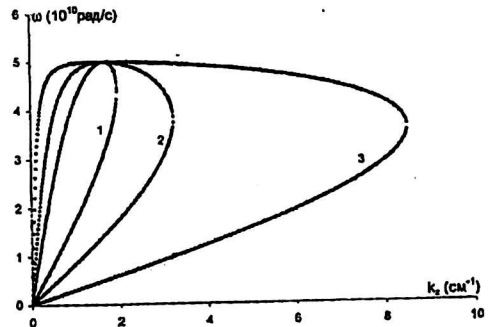
а максимальное  $k_z$ , до которого простирается эта область, дается соотношением

$$k_{z \max} = \frac{\omega_p}{c} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\Omega_e^2}\right)^{1/2}. \quad (6.6)$$

При  $\Omega_e \rightarrow \infty$  рассматриваемая область вырождается в отрезок прямой  $\omega = k_z c$ , а при  $\Omega_e = 0$  она превращается в полосу от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_p$ . На рис. 9 изображены три петлеобразные области для одной и той же плазменной частоты  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с и разных циклотронных частот. Видно расширение области с уменьшением  $\Omega_e$ . Для  $\omega$  и  $k_z$ , расположенных внутри петлеобразных областей, дисперсионное уравнение (6.2) решений не имеет. Таким образом, формулы (6.4) определяют границу области непрозрачности плазмы в волноводе. Подчеркнем, что это относится только к случаю сплошного заполнения волновода плазмой. При частичном плазменном заполнении появляются поверхностные волны, для которых рассмотренная область несущественна.

**Рис. 9. Области непрозрачности волновода со сплошным однородным плазменным заполнением при  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с и различных  $\Omega_e$ :**

- 1 —  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с;  
2 —  $\Omega_e = 3 \cdot 10^{10}$  рад/с; 3 —  $\Omega_e = 1 \cdot 10^{10}$  рад/с



Исчерпывающий анализ, причем только численный, общего дисперсионного уравнения (6.2) весьма затруднителен. Требуется вариация параметров  $\omega_p, \Omega_e$  и  $c/R$ , между которыми возможны шесть различных соотношений. Ситуация осложняется еще и тем, что в конечных частотных интервалах ( $0 < \omega < \min(\omega_p, \Omega_e)$ ,  $\max(\omega_p, \Omega_e) < \omega < \omega_h$ ) сосредоточено бесконечное число радиальных мод. Поэтому решений общего дисперсионного уравнения коснемся

очень кратко. Продолжим серию, начатую рис. 3 и 7 ( $R = 2$  см,  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с) на случай конечных значений  $\Omega_e$ . На рис. 10 представлен случай  $\Omega_e = 3 \cdot 10^{10}$  рад/с, т. е.  $\Omega_e < \omega_p$ . Видно, что новым, по сравнению с рис. 6 (см. ч. I) является появление электромагнитных волн, выходящих при больших  $k_z$  на линию  $\omega = k_z c$ . Рис. 11 соответствует более сильному внешнему магнитному полю  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с, что больше  $\omega_p$ . Здесь картина оказывается более сложной. Поскольку верхняя гибридная частота стала выше частот отсечки электромагнитных волн с низшими радиальными числами  $s$ , то моды верхней группы с рис. 6 (см. ч. I) начали взаимодействовать с этими электромагнитными волнами. Вместо пересечения дисперсионных кривых, которого быть не может, произошло перезамыкание дисперсионных кривых волн одного типа на дисперсионные кривые волн другого типа.

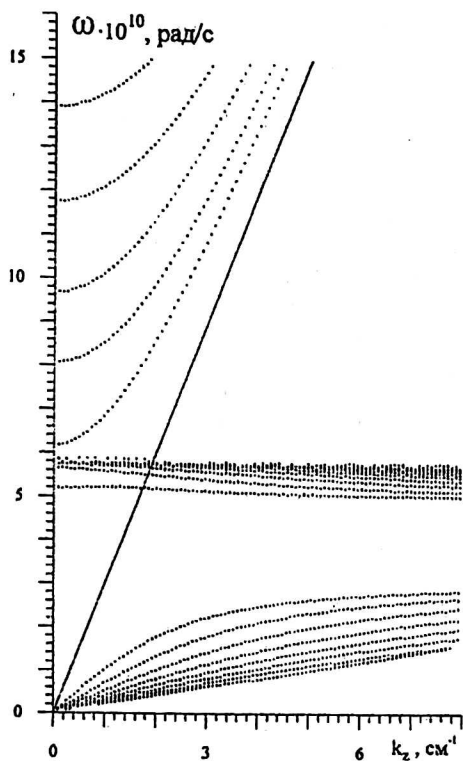


Рис. 10. Дисперсионные кривые симметричных волн плазменного волновода со сплошным заполнением при  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $\Omega_e = 3 \cdot 10^{10}$  рад/с

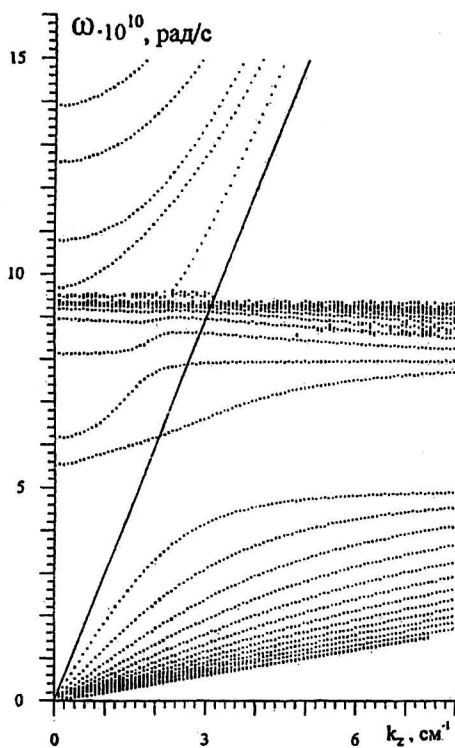


Рис. 11. Дисперсионные кривые симметричных волн плазменного волновода со сплошным заполнением при  $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с

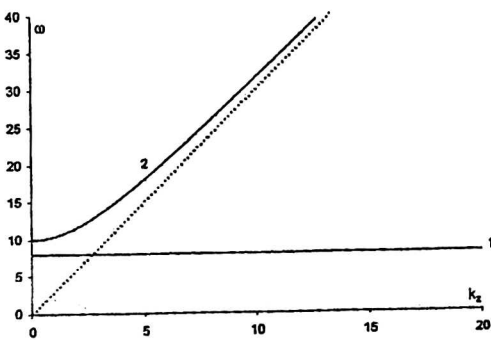
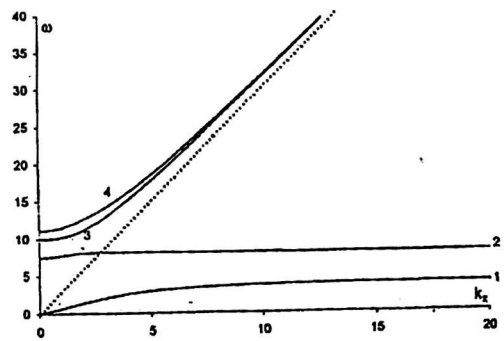
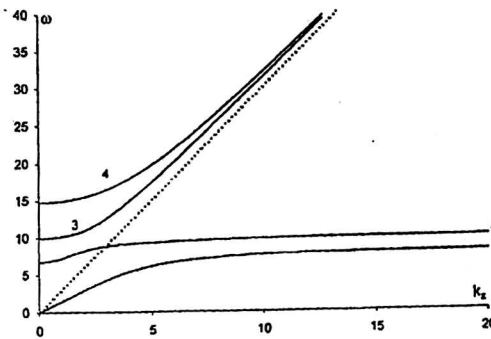
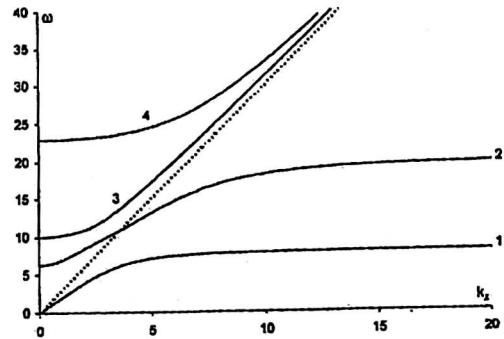
Сложность анализа (в том числе и компьютерного) дисперсионных кривых реального плазменного волновода обусловлена большим числом радиальных мод. Однако для каждого номера  $s$  существуют только четыре типа волн. Одна волна имеет нулевую частоту отсечки, другая — частоту отсечки, определяемую первым соотношением (6.3), еще две волны имеют частоты отсечки, определяемые из второго уравнения (6.3). Чтобы разобраться с этими четырьмя типами волн в чистом виде, рассмотрим модельный волновод — плазму между двумя безграничными металлическими плоскостями, или безграничную плазму, в которой распространяются волны под углом к внешнему магнитному полю. Зафиксируем поперечную компоненту волнового век-

тора  $k_1$  и введем частоту отсечки вакуумных волн  $\omega_0 = k_1 c$ . В случае волновода, образованного плоскостями  $k_1 = \pi s/L$ , где  $L$  — расстояние между плоскостями, а  $s$  зафиксируем какое-либо одно. Заметим, что в рассматриваемом модельном случае частоты отсечки вакуумных волн  $E$ - и  $H$ -типов совпадают; в цилиндрической геометрии они разные, поскольку различны корни  $\mu_{ls}$  и  $\mu'_{ls}$ . Модельное дисперсионное уравнение следует из (1.11 и 1.12 — см. ч. I) и имеет вид

$$\varepsilon_{\perp} \omega_0^4 + \left\{ \chi^2 c^2 (\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}) + g^2 \omega^2 \right\} \omega_0^2 + \varepsilon_{\parallel} \xi c^4 = 0. \quad (6.7)$$

Положим  $\omega_0 = 6 \cdot 10^{10}$  рад/с, что примерно соответствует частоте отсечки основной  $H$ -волны волновода с поперечным размером в 2 см, и рассмотрим решения уравнения (6.7) для разных плазменных и циклотронных частот.

На рис. 12, *a* представлены дисперсионные кривые для случая  $\Omega_e = 0$  и  $\omega_p = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с. Пунктиром на рис. 12, *a* проведена линия  $\omega = k_2 c$ . Видны только две ветви колебаний. На самом деле их четыре. Просто две кривые для высокочастотных волн  $E$ - и  $H$ -типов слились в одну (кривая 2), а одна — слилась с прямой  $\omega = 0$ . На рис. 12, *б* при той же плазменной частоте циклотронная частота  $\Omega_e$  увеличена до  $4 \cdot 10^{10}$  рад/с. Видны уже все четыре ветви колебаний. Кривая 3 описывает высокочастотную волну  $E$ -типа. Ее частота отсечки определяется первым соотношением (6.3). Кривая 4 описывает высокочастотную волну  $H$ -типа. Частота ее отсечки дается большим корнем второго уравнения (6.3). Частота же отсечки для кривой 2 дается меньшим корнем того же уравнения (см. рис. 8, *б*). Соответствующую этой кривой волну (при  $\Omega_e < \omega_p$ ) можно отнести к высокочастотной ленгмюровской волне (следует отличать от высокочастотной волны  $E$ -типа), поскольку при больших  $k_2$  частота ее выходит на  $\omega_p$ . И наконец, кривая 1 описывает спектр низкочастотной ленгмюровской волны. Ее частота при  $\Omega_e < \omega_p$  асимптотически выходит на  $\Omega_e$ .

*a**б**в*

2

Рис. 12 (начало)

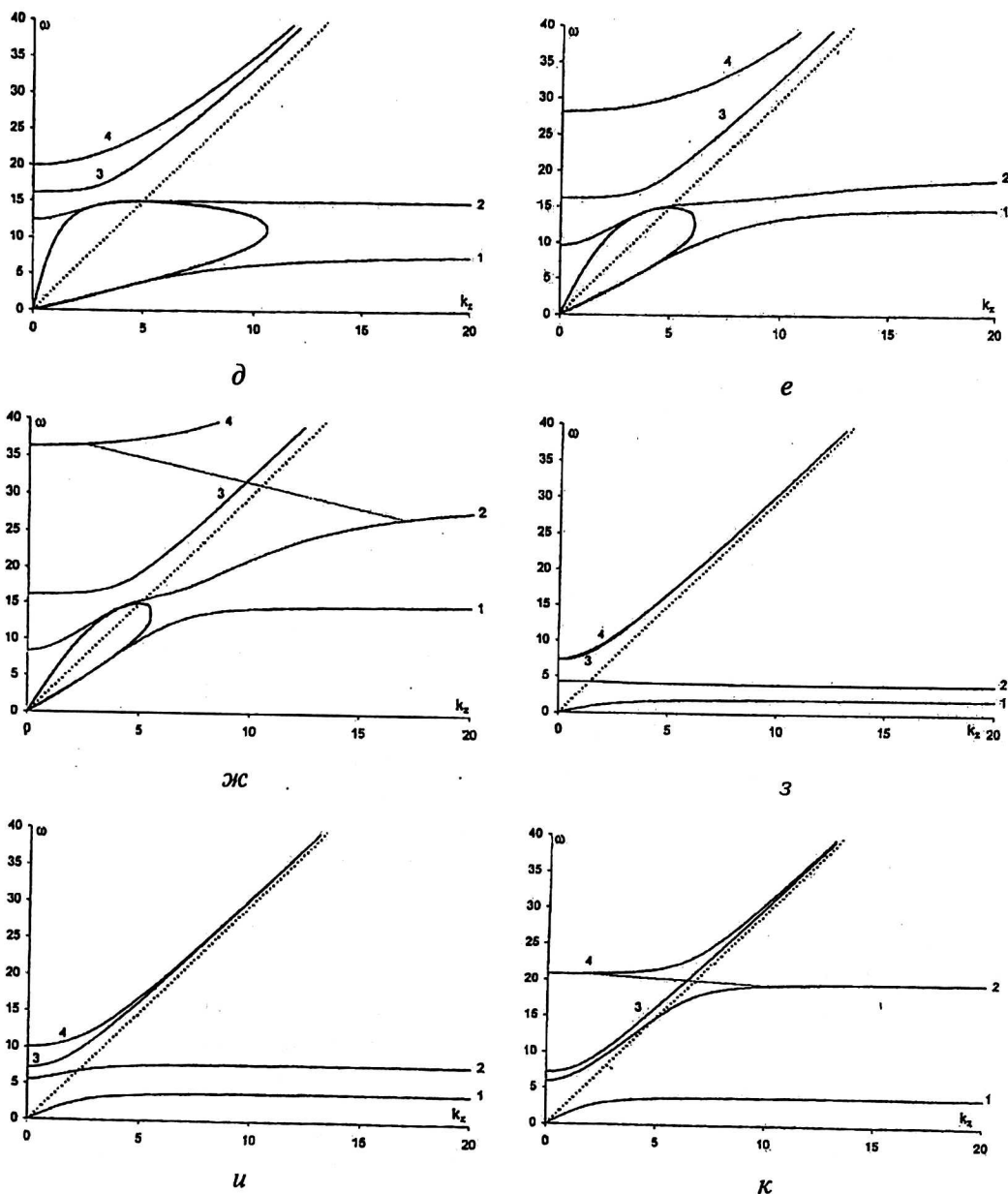


Рис. 12. Дисперсионные кривые волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, в однородной магнитоактивной плазме:

	$\omega_p \cdot 10^{10}$ , рад/с	$\omega_p^{np}$	$\Omega_e \cdot 10^{10}$ , рад/с	$\Omega_e^{np}$	$\omega_h \cdot 10^{10}$ , рад/с
12, а	8	1,33	0	0	8
12, б	8	1,33	4	0,67	8,94
12, в	8	1,33	10	1,67	12,8
12, г	8	1,33	20	3,33	21,5
12, д	15	2,5	8	1,33	17
12, е	15	2,5	20	3,33	25
12, ж	15	2,5	30	5	33,5
12, з	4	0,67	2	0,33	4,47
12, и	4	0,67	8	1,33	8,94
12, к	4	0,67	20	3,33	20,4

На рис. 12, *в* при прежнем значении  $\omega_p = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с циклотронная частота увеличена до  $10 \cdot 10^{10}$  рад/с. Общая картина в целом сохранилась. Кривые 3 и 4 по-прежнему описывают высокочастотные ветви волн *E*- и *H*-типов, соответственно. Частота отсечки волны *E*-типа от магнитного поля не зависит, а у волны *H*-типа она растет с ростом  $\Omega_e$ , что видно и из рис. 8. Кривую 2 с рис. 12, *в* теперь вероятно более целесообразно отнести к разряду циклотронных волн, а не ленгмюровских. Действительно, при  $\Omega_e > \omega_p$  частота ее при больших  $k_z$  выходит на  $\Omega_e$ . Кривая 1 по-прежнему описывает низкочастотную ленгмюровскую волну, но при  $\Omega_e > \omega_p$  частота асимптотически выходит на  $\omega_p$ .

На рис. 12, *г* при значении  $\omega_p = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с циклотронная частота еще увеличена до  $20 \cdot 10^{10}$  рад/с. Качественных изменений по сравнению с рис. 12, *в* не произошло. Однако классификацию дисперсионных кривых целесообразно снова уточнить. Кривая 3 по-прежнему описывает высокочастотную волну *E*-типа. Не изменились тип и волны описываемой дисперсионной кривой 1 — низкочастотной ленгмюровской волны. А вот ветви 2 и 4 имеют смешанный тип. Так, частота отсечки у ветви 2 приблизилась к частоте отсечки вакуумного волновода  $\omega_0 = 6 \cdot 10^{10}$  рад/с. Поэтому при малых  $k_z$  волну, описываемую этой веткой, целесообразно отнести к высокочастотной *H*-волне, а при больших  $k_z$  ее следует относить к циклотронной волне. Противоположная ситуация имеет место для ветви 4. При малых  $k_z$  ее частота близка к верхнегибридной, поэтому волну следует классифицировать как циклотронную. При больших же  $k_z$  волна переходит в высокочастотную моду *H*-типа.

На рис. 12, *д*, *е*, *ж* изображены спектры для случаев плотной плазмы  $\omega_p = 15 \cdot 10^{10}$  рад/с и разных магнитных полей: слабого  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с, среднего  $\Omega_e = 20 \cdot 10^{10}$  рад/с и сильного  $\Omega_e = 30 \cdot 10^{10}$  рад/с.

Качественно картина не изменилась по сравнению с рассмотренной выше. На рисунках показаны еще и области непрозрачности плазмы (6.4). Видно, как они вытесняют и деформируют дисперсионные кривые. Отметим еще одно существенное обстоятельство. Ни на одном из рисунков — от 12, *а* до 12, *ж* — не видно дисперсионных кривых волн с аномальной дисперсией, у которых групповая скорость противоположна фазовой. По крайней мере, если такая дисперсия где-то и есть (при больших  $k_z$ ), то она не столь явная, как, например, на рис. 6 (см. ч. I).

Таким образом, учет непотенциальных эффектов приводит к исчезновению волн с аномальной дисперсией. В потенциальном приближении при  $\Omega_e > \omega_p$  эти волны описываются формулами (5.7, б — см. ч. I). Исчезновение волн с аномальной дисперсией связано с взаимодействием в области световых фазовых скоростей между циклотронными волнами и электромагнитными волнами *H*-типа. На рис. 12, *ж* проведена линия между ветками 4 и 2, которая была бы в потенциальном приближении частью дисперсионной кривой и описывала бы аномальную дисперсию. Сказанное об аномальной дисперсии справедливо лишь применительно к объемным волнам и случаю  $\Omega_e > \omega_p$ .

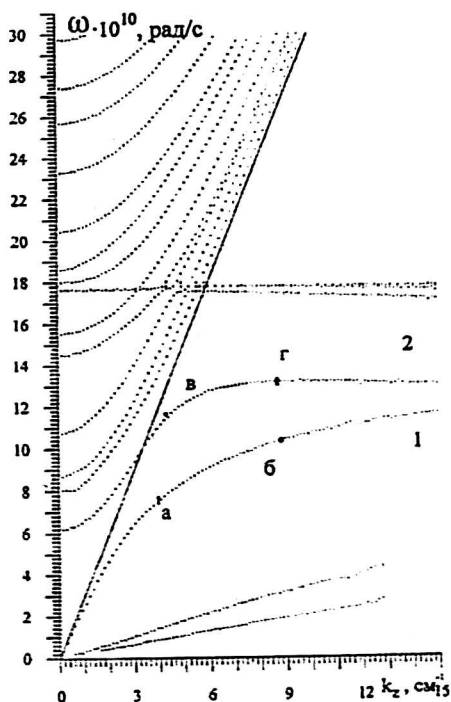
Рис. 12, *з*, *и*, *к* относятся к случаю редкой плазмы, поскольку на них  $\omega_p = 4 \cdot 10^{10}$  рад/с. На рис. 12, *з*  $\Omega_e = 2 \cdot 10^{10}$  рад/с. Новым, по сравнению, например, с рис. 12, *б*, является легкий отрицательный наклон у дисперсионной кривой 2. Следовательно, соответствующая ей высокочастотная ленгмюровская волна имеет аномальную дисперсию. Случай  $0 < \Omega_e < \omega_p < \omega_0$  — один из немногих, когда надежно фиксируется незначительная аномальная дисперсия объемной волны. При увеличении циклотронной частоты до  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с аномальная дисперсия пропадает, что видно из рис. 12, *и*. Кривые на рис. 12, *к* соответствуют  $\Omega_e = 20 \cdot 10^{10}$  рад/с. На рис. 12, *к* последовательно и четко, как на рис. 12, *г* или 12, *ж*, прослеживаются все четыре типа волн: кривая 1 — низкочастотная ленгмюровская волна; 2 — на начальном участке — высокочастотная волна *H*-типа, на конечном — циклотронная волна; 3 — высокочастотная волна *E*-типа; 4 — на начальном участке — циклотронная волна, на конечном — высокочастотная волна *H*-типа. На рис. 12, *к* кривые 4 и 3 соединены условной линией: так выглядела бы дисперсионная кривая соответствующей волны в потенциальном приближении. На самом деле этого нет, т. е. аномальная дисперсия отсутствует.

## 7. Численное исследование общего дисперсионного уравнения для спектров электромагнитных волн в плазменном волноводе

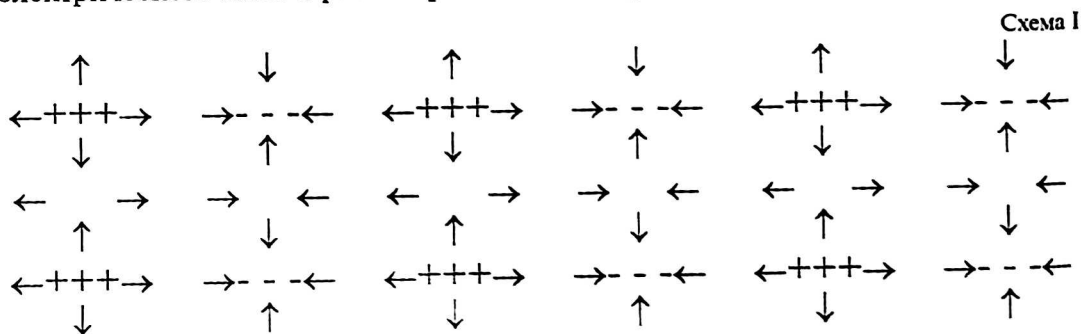
В качестве примера приведем результаты численного анализа спектров и структур полей в волноводе с тонкой трубчатой плазмой при следующих параметрах: радиус волновода  $R = 2$  см, внутренний радиус плазмы  $r_1 = 0,9$  см, внешний радиус плазмы  $r_2 = 1,1$  см, ленгмюровская частота плазмы  $\omega_p = 16 \cdot 10^{10}$  рад/с. Плазменный волновод с такими параметрами тщательно исследовался в ряде последних экспериментальных и теоретических работ по плазменной СВЧ-электронике. Будем рассматривать два значения циклотронной частоты: низкую —  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с  $< \omega_p$  и высокую —  $\Omega_e = 20 \cdot 10^{10}$  рад/с  $> \omega_p$ .

Рис. 13 соответствует случаю  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с. Поскольку циклотронная частота меньше плазменной, а плазма трубчатая, то возможно существование двух поверхностных волн, показанных на рис. 6, *д*, *е* (см. ч. I) для потенциального приближения. Для поверхностных волн важную роль играет частота  $\omega_h/\sqrt{2}$ . В рассматриваемом случае  $\omega_h/\sqrt{2} = 12,7 \cdot 10^{10}$  рад/с. На рис. 13 действительно присутствуют дисперсионные кривые поверхностных волн — кривые 1 и 2. Однако кривая 2 несколько отличается от соответствующих кривых потенциального приближения с рис. 6, *е*, *ж* (см. ч. I) и начинается не от верхней гибридной частоты, а примерно от частоты отсечки волны  $H_{0,1}$ . Это обусловлено упоминавшимся ранее взаимодействием с электромагнитными волнами, которое перезамыкает дисперсионные кривые. При больших же  $k_z$  ход кривой 2 обычен — она стремится к  $\omega_h/\sqrt{2}$  сверху с незначительным признаком аномальной дисперсии.

Рис. 13. Общие дисперсионные кривые волновода с трубчатой плазмой при  $R = 2$  см,  $r_1 = 0,9$  см,  $r_2 = 1,1$  см,  $\omega_p = 16 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с; 1, 2 — дисперсионные кривые поверхностных волн



Вид дисперсионной кривой 1 другой поверхностной волны никаких особенностей не имеет. Эта волна играет значительную роль в реализации ряда программ по плазменной СВЧ-электронике. Структура компонент электромагнитного поля этой волны для точек «а» и «б» дисперсионной кривой 1 представлена на рис. 14, а, б. Структура типична для поверхностной волны как вне, так и внутри объема плазмы. По сравнению с рис. 14, а, поле на рис. 14, б сильнее прижато к границам плазменной трубки, что обусловлено укорочением длины волны при переходе вдоль дисперсионной кривой от точки «а» к точке «б». Компонента  $E_r$  особенно на рис. 14, б, свидетельствует, что распределение электрических зарядов на границах плазмы имеет синфазную структуру — против положительного заряда находится положительный, а против отрицательного — отрицательный заряд. По терминологии теории потенциала при возбуждении в плазме рассматриваемой поверхностной волны плазма проявляет себя как простой слой. На схеме I представлены распределение зарядов на границах плазмы и направления силовых линий электрического поля в рассматриваемой поверхностной волне.



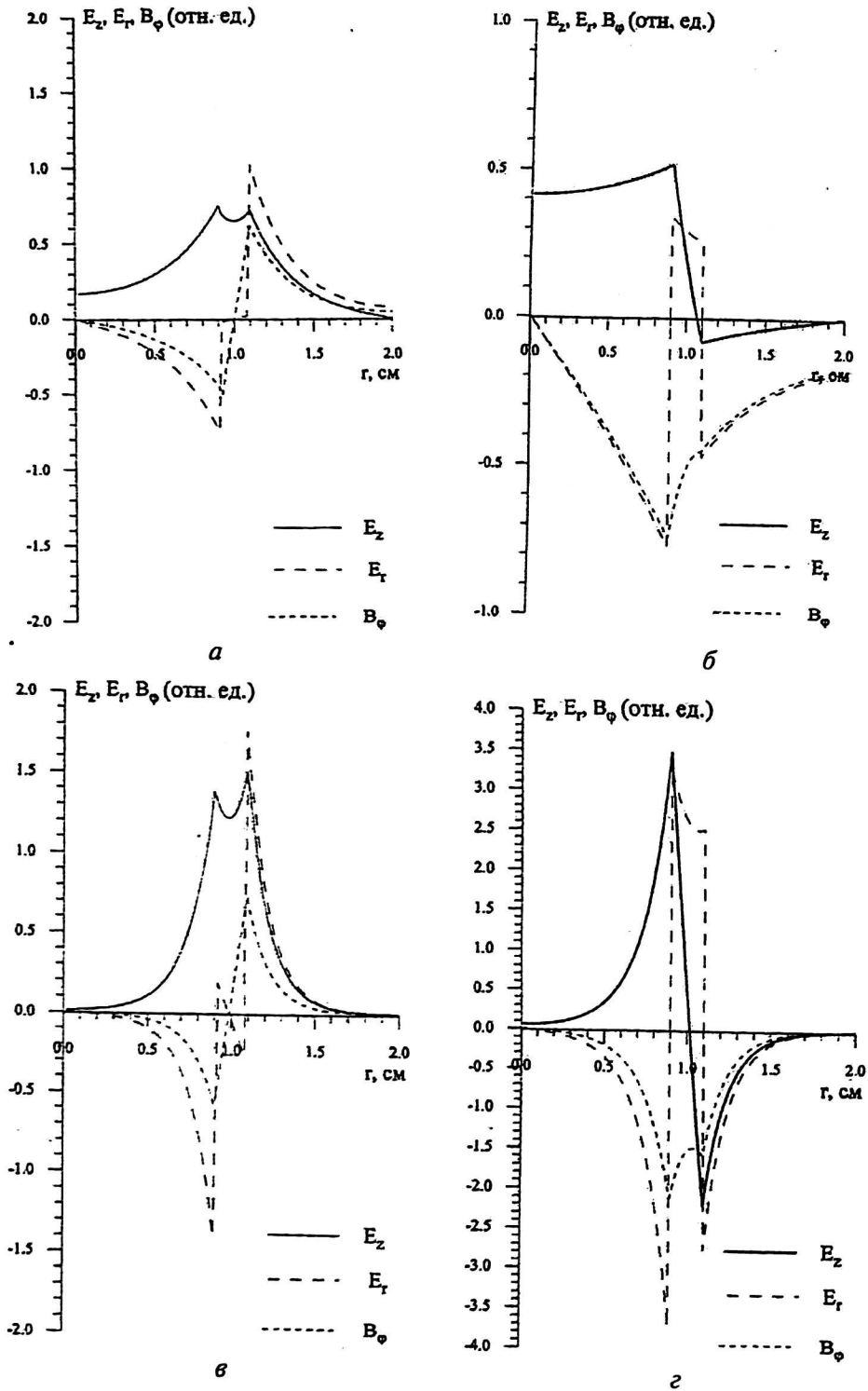


Рис. 14. Структура компонент электромагнитного поля в волноводе с трубчатой плазмой при  $R = 2$  см,  $r_1 = 0,9$  см,  $r_2 = 1,1$  см,  $\omega_p = 16 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $\Omega_e = 8 \cdot 10^{10}$  рад/с: а — точка «а» дисперсионной кривой 1; б — точка «б» дисперсионной кривой 1; в — точка «в» дисперсионной кривой 2; г — точка «г» дисперсионной кривой 2

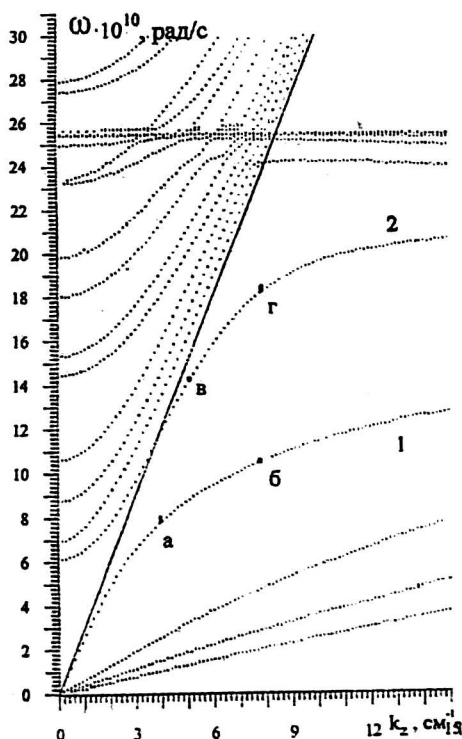
На рис. 14, в, г представлены структуры полей для точек «в» и «г» второй поверхностной волны, описываемой дисперсионной кривой 2 (см. рис. 13). Компонента  $E_r$  на этих рисунках свидетельствует о том, что распределение электрических зарядов на границах плазмы имеет противофазную структуру — против положительного заряда находится отрицательный, а против отрицательного — положительный заряд. По терминологии теории потенциала, при возбуждении в плазме рассматриваемой поверхностной волны плазма проявляет себя как двойной слой. На схеме II представлены распределение зарядов на границах плазмы и направления силовых линий электрического поля в рассматриваемой поверхностной волне.



На рис. 13 имеются и дисперсионные кривые, соответствующие другим волнам: низкочастотным плазменным; циклотронным, переходящим в высокочастотные плазменные; высокочастотным волнам  $E$ - и  $H$ -типов.

Рис. 15 соответствует случаю  $\Omega_e = 20 \cdot 10^{10}$  рад/с  $> \omega_p$ , а его потенциальным аналогом является рис. 6, ж (см. ч. I). Поверхностные волны, выходящие на  $\omega_h/\sqrt{2}$ , исчезли. Других существенных особенностей на рис. 15 не наблюдается. Остановимся только на идентификации волн. Дисперсионная кривая 2 начинается от частоты отсечки вакуумной волны  $H_{01}$ , которая здесь является обычной высокочастотной волной  $H$ -типа. С ростом  $k_z$  эта кривая переходит

Рис. 15. Общие дисперсионные кривые волновода с трубчатой плазмой при  $R = 2$  см,  $r_1 = 0,9$  см,  $r_2 = 1,1$  см,  $\omega_p = 16 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $\Omega_e = 20 \cdot 10^{10}$  рад/с



в дисперсионную кривую циклотронной волны с частотой, стремящейся к  $\Omega_e$ . Кривая 1 является дисперсионной кривой основной низкочастотной плазменной волны. При больших  $k_z$  она выходит на  $\omega_p$ . Структура компонент поля этой волны для точек «а» и «б» дисперсионной кривой 1 представлена на рис. 16, а, б, и, соответственно, кривой 2 для точек «в» и «г» — на рис. 16, в, г. Казалось бы отличие от структур, представленных на рис. 14, не очень значительное. Тем не менее, на рис. 16 изображены поля волн, являющихся внутри плазменной трубки объемными. Особенно хорошо это видно на рис. 16, а, б из структуры компоненты  $E_z$ , а на рис. 16, в, г — из структуры компоненты  $E_r$ .

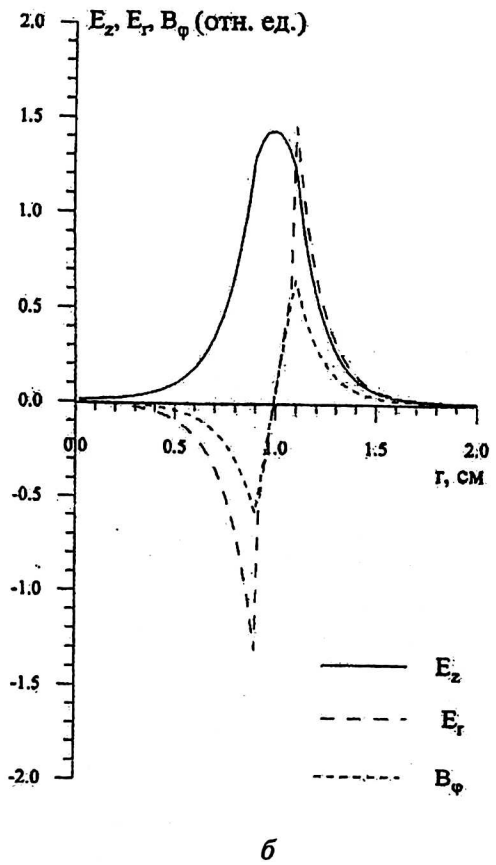
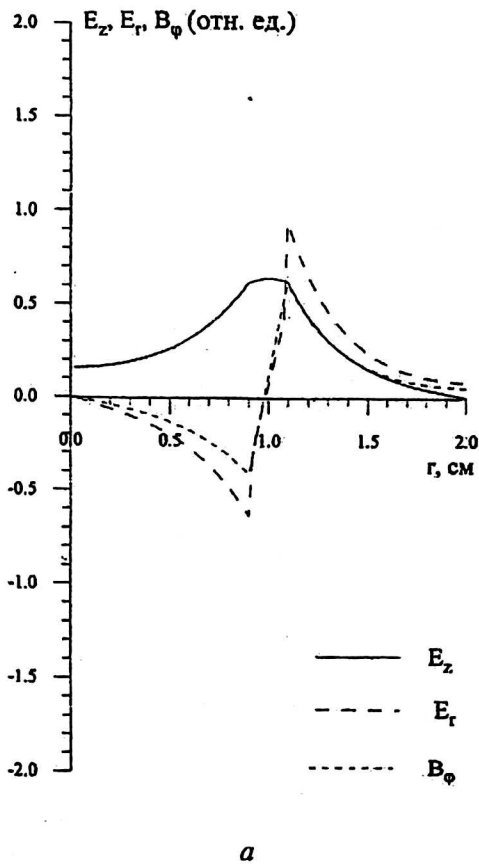


Рис. 16 (начало)

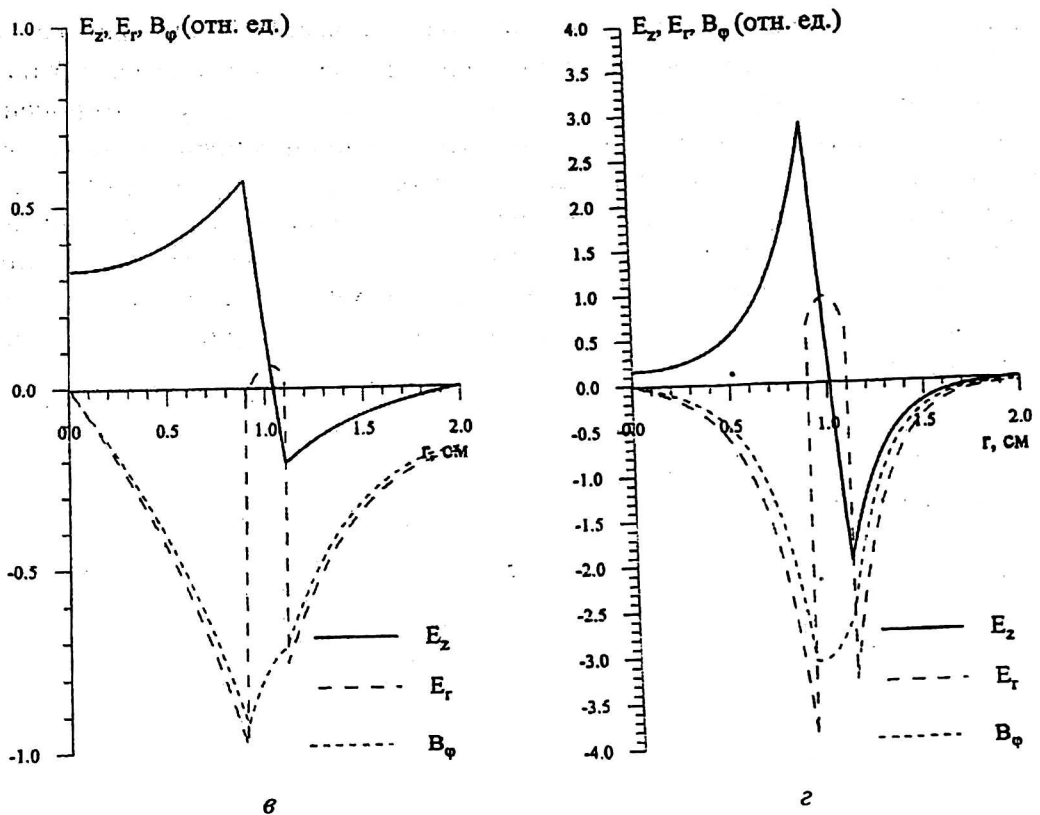


Рис. 16. Структура компонент электромагнитного поля в волноводе с трубчатой плазмой при  $R = 2$  см,  $r_1 = 0,9$  см,  $r_2 = 1,1$  см,  $\omega_p = 16 \cdot 10^{10}$  рад/с и  $\Omega_e = 20 \cdot 10^{10}$  рад/с:  $a$  — точка «а» дисперсионной кривой 1;  $b$  — точка «б» дисперсионной кривой 1;  $v$  — точка «в» дисперсионной кривой 2;  $z$  — точка «z» дисперсионной кривой 2

## 8. Плазменные волноводы с произвольной формой поперечного сечения в бесконечно сильном внешнем магнитном поле

В предыдущих разделах рассматривались электромагнитные волны в волноводах кругового поперечного сечения и с плазменным заполнением, имеющим строгую осевую симметрию. Естественно, что исследование более общего случая сопряжено со значительными математическими трудностями. Исключением является случай бесконечно сильного внешнего магнитного поля, рассмотренный ранее в разделах 2 и 3 (см. ч. I) для волноводов кругового поперечного сечения. Сейчас мы рассмотрим волноводы с произвольными формой поперечного сечения и плазменным заполнением, но в бесконечно сильном магнитном поле. Рассмотрение имеет как методический интерес, так и важно для построения соответствующих нелинейных моделей.

Так как в бесконечно сильном внешнем магнитном поле поперечное движение электронов плазмы запрещено, то уравнения холодной гидродинамики (1.1 — см. ч. I) для них запишутся в виде:

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{e}{m} E_z, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n V_z) = 0,$$

где  $n$  — плотность электронов, зависящая в общем случае от координат в поперечном сечении волновода  $\vec{r}_\perp = \{x, y\}$ ;

$V_z$  — продольная компонента гидродинамической скорости;

$E_z$  — продольная составляющая напряженности электрического поля в волноводе.

В невозмущенном состоянии, когда заряд электронов плазмы нейтрализован положительным зарядом неподвижных ионов, можно положить:

$$E_z = 0; \quad V_z = 0; \quad n = n_{0e} P_p(\vec{r}_\perp), \quad (8.2)$$

где  $n_{0e}$  — константа, определяющая невозмущенную плотность электронов плазмы, а функция  $P_p(\vec{r}_\perp)$  задает профиль поперечного распределения плазмы в волноводе.

Эту функцию, как и константу  $n_{0e}$ , считаем известной. Из (8.1) и (8.2) следует, что в линейном приближении возмущение плотности электронного тока в плазме определяется выражением

$$j_{pz} = en_{0e} V_z P_p(\vec{r}_\perp) \equiv j_p P_p(\vec{r}_\perp), \quad (8.3)$$

а функция  $j_p$  удовлетворяет, как видно из (8.1), уравнению

$$\frac{\partial j_p}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_z. \quad (8.4)$$

Здесь  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{0e} / m}$  — ленгмюровская частота электронов плазмы.

Заметим, что когда рассматривались кусочно-постоянные профили плазменного заполнения, величины  $\omega_p$  и  $n_{0e}$  были определены однозначно. В общем же случае имеет смысл только произведение  $n_{0e} P_p(\vec{r}_\perp)$ .

Уравнение (8.4) и соотношение (8.3) дополняются уравнениями для компонент волн  $E$ -типа, которые только и взаимодействуют с полностью замагниченной плазмой. Для описания волн  $E$ -типа удобно ввести поляризационный потенциал  $\psi$ , выразив через него все отличные от нуля компоненты электромагнитного поля по формулам:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, & B_x &= \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t}, & E_y &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \\ B_y &= \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}, & E_z &= \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Сам потенциал  $\psi$ , как это следует из уравнений Максвелла, удовлетворяет следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = -4\pi j_{pz}. \quad (8.6)$$

Здесь  $\Delta_\perp = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  — поперечная часть оператора Лапласа.

Волновое уравнение (8.6) дополняется условием  $E_z = 0$  на боковой металлической стенке волновода, что, как видно из соотношения (8.5), сводится к следующему:  $\psi|_{\Sigma=0} = 0$ , где  $\Sigma = 0$  — уравнение металлической боковой поверхности волновода.

Уравнения (8.4) и (8.6) являются основой для исследования свойств плазменных волн в волноводе с произвольной формой поперечного сечения и

обобщением уравнения (3.1 — см. ч. I) и соотношений (3.2 — см. ч. I), полученным для цилиндрической геометрии.

Положим

$$\{j_p, \psi\} = \{\tilde{j}_p(\bar{r}_\perp), \tilde{\psi}(\bar{r}_\perp)\} \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (8.7)$$

где  $\tilde{j}_p, \tilde{\psi}$  — функции только от поперечной координаты  $\bar{r}_\perp$ .

Обозначим собственные функции поперечного сечения пустого волновода через  $\varphi_n(\bar{r}_\perp)$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , а через  $k_{\perp n}^2$  — соответствующие собственные значения, т. е.

$$\begin{cases} \Delta_\perp \varphi_n = -k_{\perp n}^2 \varphi_n, \\ \varphi_n|_{\Sigma=0} = 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Считаем, что решения задачи (8.8) известны. В случае волновода кругового сечения  $\bar{r}_\perp = \{r, \phi\}$  — цилиндрические координаты,  $\varphi_n = J_l(k_{\perp n} r)$ , где  $J_l$  — функция Бесселя  $l$ -того порядка,  $k_{\perp n} = \mu_{l,n}/R$ ,  $\mu_{l,n}$  — корень функции Бесселя;  $l$  — азимутальное волновое число, а  $R$  — радиус волновода.

Разложим  $\tilde{\psi}$  в ряд по собственным функциям  $\varphi_n$ , выразим коэффициенты разложения из уравнения (8.6) и подставим их в (8.4). В результате получим следующее однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода для  $\tilde{j}_p$ :

$$\begin{aligned} \omega^2 \tilde{j}_p(\bar{r}_\perp) &= \omega_p^2 \iint_{S_w} K_p(\bar{r}_\perp, \bar{r}_\perp^*) \tilde{j}_p(\bar{r}_\perp^*) d\bar{r}_\perp^*, \\ K_p(\bar{r}_\perp, \bar{r}_\perp^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^2}{k_{\perp n}^2 + \chi^2} \frac{P_p(\bar{r}_\perp^*) \varphi_n(\bar{r}_\perp^*) \varphi_n(\bar{r}_\perp)}{\|\varphi_n\|^2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь  $\chi^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$ ,  $S_w$  — площадь поперечного сечения волновода, а  $\|\varphi_n\|$  — норма собственной функции.

Условие разрешимости интегрального уравнения (8.9) и есть дисперсионное уравнение для определения спектров частот плазменных волн в полностью замагниченном плазменном волноводе, полученное в самом общем, но неявном виде.

Рассмотрим для иллюстрации применения интегрального уравнения частные случаи: однородную в поперечном сечении волновода плазму и бесконечно тонкую (игольчатую) плазму.

Если плазма однородна в поперечном сечении волновода, то  $P_p(\bar{r}_\perp) \equiv 1$ .

Полагая при этом  $\tilde{j}_p(\bar{r}_\perp) = \text{const} \varphi_n(\bar{r}_\perp)$ , получим из (8.9) бесконечное множество алгебраических уравнений

$$\omega^2 = \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp n}^2 + \chi^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

В случае волновода кругового поперечного сечения уравнения (8.10) переходят в полученные ранее уравнения (2.6 — см. ч. I), поскольку в этом случае  $k_{\perp n} = \mu_{l,n}/R$ .

Для случая бесконечно тонкой (игольчатой) плазмы поперечный профиль плотности имеет вид  $P_p(\bar{r}_\perp) = S_p \delta(\bar{r}_\perp - \bar{r}_p)$ , где  $S_p$  — площадь поперечного

сечения плазмы, а  $\bar{r}_p$  — определяет ее среднее положение в поперечном сечении волновода. В этом случае (8.9) сводится к трансцендентному уравнению

$$\omega^2 = \omega_p^2 \frac{\chi^2}{k_{\perp p}^2}, \quad \text{где } k_{\perp p}^2 = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_p}{k_{\perp n}^2 + \chi^2} \frac{\varphi_n^2(\bar{r}_p)}{\|\varphi_n\|^2} \right]^{-1}, \quad (8.11)$$

определяющему при  $\omega < k_z c$  спектры частот поверхностных плазменных волн. Величина  $k_{\perp p}$  из (8.11) имеет смысл поперечного волнового числа поверхностных волн. Отметим, что при  $\omega > k_z c$  уравнение (8.11) определяет спектры объемных волн, отличающиеся от спектров волн вакуумного волновода только количественной плазменной поправкой.

Покажем, что в волноводе кругового поперечного сечения радиус  $R$  (8.11) переходит в уравнение (3.5 — см. ч. I). Действительно, в таком волноводе тонкая плазма представляет собой трубку толщиной  $\Delta_p$  и средним радиусом  $r_p < R$ , причем  $\Delta_p \ll r_p$  и  $S_p = 2\pi\Delta_p r_p$ . Собственные же функции и собственные значения определяются формулами  $\varphi_n = J_l(k_{\perp n} r)$ ,  $k_{\perp n} = \mu_{l,n}/R$ . При этом из (8.11) имеем

$$k_{\perp p}^2 = \left\{ 2r_p \Delta_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_l^2(\mu_{l,n} r_p / R)}{(\mu_{l,n}^2 + \chi^2 R^2) J_{l+1}^2(\mu_{l,n})} \right\}^{-1}. \quad (8.12)$$

Для вычисления возникшей бесконечной суммы следует использовать формулу Кнезера-Зоммерфельда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \mu_{l,n}^2} \frac{J_l(\mu_{l,n} x_1) J_l(\mu_{l,n} x_2)}{J_{l+1}^2(\mu_{l,n})} = \frac{\pi}{4} J_l(z x_1) J_l(z x_2) \left[ \frac{Y_l(z x_2)}{J_l(z x_2)} - \frac{Y_l(z)}{J_l(z)} \right]. \quad (8.13)$$

Формула (8.13) для определенности записана для  $x_1 \leq x_2$ . Полагая в (8.12)  $x_1 = x_2 = r_p/R$ ,  $z = i\chi R$  и учитывая связь между обычными и модифицированными функциями Бесселя, сведем (8.12) к виду

$$k_{\perp p}^2 = \left\{ r_p \Delta_p I_l^2(\chi r_p) \left[ \frac{K_l(\chi r_p)}{I_l(\chi r_p)} - \frac{K_l(\chi R)}{I_l(\chi R)} \right] \right\}^{-1}. \quad (8.14)$$

Дисперсионное уравнение из (8.11) и соотношение (8.14) переходят в полученное другим способом (путем сшивки полей) дисперсионное уравнение (3.5 — см. ч. I).

Задача определения спектров произвольных плазменных волноводов в бесконечно сильном внешнем магнитном поле вместо однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (8.9) может быть сведена и к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений. Запишем снова уравнения (8.6) и (8.4) (с учетом (8.3))

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = -4\pi P_p(\bar{r}_{\perp}) j_p, \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial j_p}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_z,$$

где  $E_z$  выражается через потенциал  $\psi$  с помощью последней формулы (8.5). Используя уравнение непрерывности для электронной компоненты плазмы, преобразуем (8.15) к следующему эквивалентному виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 4\pi P_p(\bar{r}_{\perp}) \rho, \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

где  $\rho$  — функция, определяемая соотношением  $\rho_p = P_p(\bar{r}_{\perp}) \rho$ , а  $\rho_p$  — возмущение плотности заряда плазмы, удовлетворяющее вместе с  $j_{pz}$  уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \frac{\partial j_{pz}}{\partial z} = 0. \quad (8.17)$$

Полезной может быть и следующая смешанная форма записи уравнений (8.16)

$$\Delta_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi P_p(\bar{r}_{\perp}) \rho, \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Представим решение уравнений (8.18) в виде

$$\psi = \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(\bar{r}_{\perp}) \right) \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (8.19)$$

$$\rho = \left( \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(\bar{r}_{\perp}) \right) \exp(-i\omega t + ik_z z),$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — постоянные.

Подставляя (8.19) в (8.18) и учитывая ортогональность функций  $\varphi_n$ , получим следующую систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$B_n = -\frac{1}{4\pi} \chi^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (ik_z A_n), \quad (8.20)$$

$$k_{\perp n}^2 (ik_z A_n) = 4\pi \frac{\omega_p^2}{\omega^2} B_n - 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{m,n} B_m,$$

где

$$\phi_{m,n} = \|\varphi_n\|^{-2} \int_{S_w} \varphi_n(\bar{r}_{\perp}) \varphi_m(\bar{r}_{\perp}) P_p(\bar{r}_{\perp}) d\bar{r}_{\perp}. \quad (8.21)$$

Исключая из (8.20) коэффициенты  $A_n$ , сведем систему к виду

$$\left[ k_{\perp n}^2 + \chi^2 \left( 1 - \phi_{n,n} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] B_n - \chi^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{m \neq n} \phi_{m,n} B_m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.22)$$

Равенство нулю определителя (бесконечного) системы (8.22) и является искомым дисперсионным соотношением. Дисперсионным уравнением в форме такого определителя удобно пользоваться, если изменение профиля

плазмы  $P_p(\vec{r}_\perp)$  не очень резкое. При этом порядок определителя можно взять конечным. При резком же изменении профиля предпочтительнее использовать интегральное уравнение (8.9).

### 9. Импульсы и энергии волн в плазменных волноводах

При рассмотрении вопроса об энергиях и импульсах волн, в том числе и плазменных, целесообразно исходить из уравнений возбуждения поля в среде заданными внешними токами и зарядами. Если, как и в предыдущем разделе, ограничиться рассмотрением волноводов во внешнем продольном сильном магнитном поле, то соответствующие уравнения удобно записать, используя поляризационный потенциал  $\psi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi &= -4\pi j_{pz} - 4\pi j_{0z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi &= 4\pi \rho_p + 4\pi \rho_0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Здесь  $j_{pz}$ , как и в уравнении (8.6), — возмущение плотности тока в плазме (8.3);

$\rho_p$  — соответствующее возмущение плотности заряда;

$j_{0z}$  и  $\rho_0$  — плотности тока и заряда некоторого внешнего источника.

Первое уравнение (9.1) тождественно (8.6), второе — получается из уравнения  $\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho$  при подстановке в него соотношений (8.5). Уравнения (9.1) связаны между собой через уравнение непрерывности, которому удовлетворяют пары величин  $(j_{pz}, \rho_p)$  и  $(j_{0z}, \rho_0)$ .

Поскольку  $j_{0z} E_z$  есть энергия, передаваемая от внешнего источника поля за единицу времени в единице объема, то первое уравнение (9.1) удобно использовать при формулировке закона изменения энергии поля в волноводе. Второе уравнение (9.1) приводит к закону изменения импульса, так как  $\rho_0 E_z$  есть плотность силы, приложенной к внешнему источнику.

Представим величины  $j_{0z}$ ,  $\rho_0$  и  $\psi$  в виде

$$\begin{aligned} \{j_{0z}, \rho_0\} &= \frac{1}{2} \left[ \{j_{00}(\vec{r}_\perp), \rho_{00}(\vec{r}_\perp)\} \exp(-i\omega t + ik_z z) + C.C. \right], \\ \psi &= \frac{1}{2} \left[ A(\vec{r}_\perp, t) \exp(-i\omega t + ik_z z) + C.C. \right], \end{aligned} \tag{9.2}$$

причем в силу уравнения непрерывности имеем

$$\rho_{00} = \frac{k_z}{\omega} j_{00}. \tag{9.3}$$

Поскольку речь сейчас идет об энергиях и импульсах собственных волн, то  $\omega$  и  $k_z$  в (9.2) не произвольны, а связаны соответствующим дисперсионным уравнением типа рассмотренных в предыдущем разделе, т. е. внешние источники таковы, что возбуждают именно собственные волны системы.

Умножив обе части соотношения (9.3) на  $E_z$  и интегрируя его по поперечному сечению волновода, получим, с учетом закона сохранения импульса и физического смысла величин  $\rho_0 E_z$  и  $j_{0z} E_z$ , следующую связь между импульсом и энергией волноводных мод:

$$P_z = \frac{k_z}{\omega} W. \quad (9.4)$$

Здесь  $W$  — энергия;  $P_z$  — продольная составляющая импульса волн, отнесенная к единице длины волновода (т. е. усредненные по длине волны  $2\pi/k_z$ ).

Из (9.4) видно, что задача вычисления импульса и энергии сводится к вычислению какой-либо одной величины, например энергии  $W$ .

Вычислим сначала интегральную по поперечному сечению волновода плотность мощности внешнего источника

$$Q = \iint_{S_w} E_z(\vec{r}_\perp, z, t) j_{0z}(\vec{r}_\perp, z, t) d\vec{r}_\perp. \quad (9.5)$$

С учетом последнего соотношения (8.5) представим  $E_z$  в виде  $E_z = -\chi^2 \psi$ , где потенциал  $\psi$  определен последней формулой (9.2). Тогда (9.5) преобразуется к виду

$$\langle Q \rangle = -\frac{1}{4} \chi^2 \iint_{S_w} [A(\vec{r}_\perp, t) j_{00}^*(\vec{r}_\perp) + C.C.] d\vec{r}_\perp, \quad (9.6)$$

где угловые скобки означают усреднение по длине волны  $2\pi/k_z$ .

Преобразуем теперь первое уравнение (9.1), учитывая определение (8.3) и уравнение для плазменного тока (8.4). Умножим обе части (9.1) на  $E_z$ , проинтегрируем по  $\vec{r}_\perp$  и усредним по длине волны  $2\pi/k_z$ . В результате получим

$$i \frac{\chi^2}{16\pi} \iint_{S_w} A^* \hat{L} A d\vec{r}_\perp + C.C. = -\langle Q \rangle, \quad (9.7)$$

где

$$\hat{L} = \left\{ \Delta_\perp - \chi^2 \left[ 1 - P_p(\vec{r}_\perp) \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] \right\} \omega. \quad (9.8)$$

Зная физический смысл величины (9.6), заключаем, что левая часть (9.7) есть производная по времени от энергии волны  $W$ . Требуется только выразить эту производную через амплитуду волны  $A(\vec{r}_\perp, t)$ . Поясним, что под частотой  $\omega$  в (9.6) — (9.8) следует понимать не число, а оператор

$$\hat{\omega} = \omega + i \partial/\partial t, \quad (9.9)$$

в котором производная по времени пропорциональна интенсивности внешнего источника (амплитуде  $j_{00}$ ), т. е. может быть сколь угодно малой. Учитывая эту малость, с операторной частотой (9.9) при преобразовании (9.7) можно обходиться по следующим правилам:  $\hat{\omega}^2 = \omega^2 + 2i\omega \partial/\partial t$ ,  $\hat{\omega}^{-1} = \omega^{-1} - \omega^{-2} i \partial/\partial t$ .

В самом общем случае справедливо представление

$$A(\vec{r}_\perp, t) = A_0(t) \psi_p(\vec{r}_\perp), \quad (9.10)$$

где  $\psi_p(\vec{r}_\perp)$  — собственная функция волновода с имеющимся плазменным заполнением (которую мы предполагаем известной);

$A_0$  — амплитуда, зависящая только от времени.

$\psi_p(\vec{r}_\perp)$  в общем случае не совпадают с собственными функциями пустого волновода  $\varphi_n$ , поскольку учитывают наличие плазмы. Примером функции  $\psi_p(\vec{r}_\perp)$  в волноводе с тонкой трубчатой плазмой является (3.6) (см. ч. I). И только при сплошном заполнении волновода однородной плазмой имеет место какое-либо из равенств  $\psi_p(\vec{r}_\perp) = \varphi_n(\vec{r}_\perp)$ .

Очевидно, что когда внешний источник отсутствует ( $j_{00} = 0$  и  $\langle Q \rangle = 0$ ) амплитуда  $A_0$  является константой, и из (9.7) и (9.10) следует дисперсионное уравнение для спектров собственных волн

$$\iint_{S_w} \psi_p \left( \Delta_{\perp} - \chi^2 \left( 1 - P_p \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right) \psi_p d\vec{r}_{\perp} = 0. \quad (9.11)$$

Соотношение (9.11) эквивалентно дисперсионному интегральному уравнению (8.9), полученному в предыдущем разделе, или линейной системе (8.22). Перепишем (9.11) с использованием поперечного волнового числа волноводной плазменной моды

$$D_p(\omega, k_z) \equiv k_{\perp p}^2 - \chi^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0, \quad (9.12)$$

где

$$k_{\perp p}^2 = \left( \iint_{S_w} \left( (\nabla_{\perp} \psi_p)^2 + \chi^2 \psi_p^2 \right) d\vec{r}_{\perp} \right) \left( \iint_{S_w} P_p \psi_p^2 d\vec{r}_{\perp} \right)^{-1}. \quad (9.13)$$

Можно считать, что величина (9.13) введена по определению так, чтобы (9.12) совпадало с дисперсионным уравнением (8.11). Кроме того, если подставить в (9.13) собственную функцию (3.6) — см. ч. I), то получится поперечное волновое число (8.14). Заметим также, что в случае волновода, полностью заполненного однородной плазмой, (9.13) очевидным образом переходит в  $k_{\perp p}^2 = k_{\perp n}^2 + \chi^2$ , а (9.12) — сводится к (1.18) и далее к (1.16 — см. ч. I).

В первом приближении по амплитуде внешнего источника из (9.7)—(9.10) с учетом (9.11), получаем

$$\frac{dW}{dt} = -\langle Q \rangle, \quad (9.14)$$

где

$$W = \frac{1}{16\pi} \chi^2 \left( \iint_{S_w} P_p(\vec{r}_{\perp}) \psi_p^2(\vec{r}_{\perp}) d\vec{r}_{\perp} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega D_p) |A_0|^2 - \quad (9.15)$$

и есть искомое выражение для плотности энергии рассматриваемых волн.

Применим (9.15) для вычисления энергий волн в плазменных волноводах, рассмотренных выше. Так, в случае волновода с однородным плазменным заполнением, функция  $\psi_p$  совпадает с одной из собственных функций пустого волновода  $\varphi_n$ , а из (9.12) и (9.13) видно, что

$$D_p \equiv k_{\perp n}^2 + \chi^2 \left( 1 - \omega_p^2 / \omega^2 \right). \quad (9.16)$$

При этом (9.15) сводится к следующему

$$W = \frac{1}{8\pi} \|\varphi_n\|^2 \left( k_{\perp n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \chi^4 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) |A_0|^2. \quad (9.17)$$

Для волновода произвольного поперечного сечения с бесконечно тонкой игольчатой плазмой, используя (9.12), преобразуем (9.15) к виду

$$W = \frac{1}{8\pi} S_p \psi_p^2(\vec{r}_p) \left( k_{\perp p}^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \chi^4 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \chi^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dk_{\perp p}^2}{d\chi^2} \right) |A_0|^2. \quad (9.18)$$

Дальнейшее преобразование (9.18) возможно уже применительно к более конкретным системам. Например, для волновода кругового сечения с использованием формул (8.14) и (3.6).

Остановимся на предельном переходе в (9.18) к случаю вакуумного волновода:  $\omega_p \rightarrow 0$  или  $S_p \rightarrow 0$ . При любом из таких предельных переходов в выражении (9.18) в круглой скобке остаются только первое и третье слагаемые. Далее волновод становится вакуумным, а поэтому  $\psi_p \rightarrow \varphi_n$ , и дисперсия волн определяется из уравнения  $k_{\perp n}^2 + \chi^2 = 0$ , где  $n$  — некоторое фиксированное натуральное число. Из данного уравнения и из (8.11) следует, что

$$k_{\perp p}^2 \rightarrow S_p^{-1} (k_{\perp n}^2 + \chi^2) \|\varphi_n\|^2 \varphi_n^{-2} (\bar{r}_p). \quad (9.19)$$

Подставляя (9.19) в (9.18), получим

$$W = \frac{1}{8\pi} \|\varphi_n\|^2 k_{\perp n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} |A_0|^2. \quad (9.20)$$

Это известный из теории вакуумных волноводов результат, который элементарно следует при  $\omega_p \rightarrow 0$  и из (9.17).

Равновесная система является, как известно, устойчивой. Это означает, что возбуждение колебаний в такой системе приводит к увеличению ее энергии за счет внешнего источника. Следовательно, для волн в равновесной системе величина типа (9.15) должна быть положительной —  $W > 0$ , откуда следует неравенство

$$\chi^2 \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega D_p) > 0, \quad (9.21)$$

которое можно рассматривать как математическую формулировку устойчивости (равновесности) системы. Рассматриваемая здесь плазма является равновесной, поэтому для нее неравенство (9.21) имеет место. В случае волновода, полностью заполненного однородной плазмой, (9.21) сводится, как это следует из (9.17), к очевидно выполненному условию

$$k_{\perp n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \chi^4 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0. \quad (9.22)$$

В случае же тонкой плазмы (см. (9.18)) соответствующее условие менее очевидно

$$k_{\perp p}^2 \frac{\omega^2}{c^2} + \chi^4 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > \chi^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dk_{\perp p}^2}{d\chi^2}. \quad (9.23)$$

Для конкретных геометрий справедливость (9.23) легко проверяется непосредственно. В потенциальном приближении (9.22) и (9.23) сводятся к неравенству

$$\chi^4 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0, \quad (9.24)$$

очевидность которого несомненна.

## 10. Волны пространственного заряда электронного пучка в волноводе

Перейдем теперь к рассмотрению волн в электронном пучке. Ограничимся для простоты приближением бесконечно сильного внешнего магнитного поля, вдоль которого распространяется моноскоростной пучок электронов. При

этом для описания пучка можно использовать уравнения холодной гидродинамики (8.1) со следующими равновесными значениями входящих в них величин

$$E_z = 0, V_z = u, n = n_{0b} P_b(\bar{r}_\perp), \quad (10.1)$$

где  $n_{0b}$  и  $u$  — константы, определяющие невозмущенные плотность и скорость электронов пучка, а функция  $P_b(\bar{r}_\perp)$  задает профиль поперечного распределения электронов пучка в волноводе.

Линеаризуем уравнения (8.1) по малым возмущениям равновесного состояния (10.1). Получим следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} &= \frac{e}{m} E_z, \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{n}}{\partial z} &= -n_{0b} P_b(\bar{r}_\perp) \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где  $\tilde{v}_z$  и  $\tilde{n}$  — возмущения скорости и плотности электронов пучка. Возмущение же плотности тока пучка вычисляется по формуле

$$j_{bz} = en_{0b} \tilde{v}_z P_b(\bar{r}_\perp) + eu \tilde{n}. \quad (10.3)$$

Из второго уравнения (10.2) видно, что целесообразна замена  $\tilde{n} = n_{0b} P_b(\bar{r}_\perp) N$ , где  $N$  — некоторая функция. После данной замены (10.2) и (10.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} &= \frac{e}{m} E_z, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial z} &= -\frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}, \\ j_{bz} &= en_{0b} (\tilde{v}_z + uN) P_b(\bar{r}_\perp) \equiv j_b P_b(\bar{r}_\perp). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Здесь новая функция  $j_b$  аналогична соответствующей функции  $j_p$ , введенной в (8.3) при рассмотрении волн в плазме. Из первых двух уравнений (10.4) легко получается одно уравнение для функции  $j_b$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 j_b = \frac{\omega_b^2}{4\pi} \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad (10.5)$$

где  $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_{0b} / m}$  — ленгмюровская частота электронов пучка.

Уравнение (10.5) заменяет плазменное уравнение (8.4) при рассмотрении волн электронного пучка. Из (10.5) и (8.6), действуя так же, как и при выводе (8.9), получим следующее однородное интегральное уравнение 2-го рода для функции  $\tilde{j}_b = j_b \exp(i\omega t - ik_z z)$ :

$$\begin{aligned} (\omega - k_z u)^2 \tilde{j}_b(\bar{r}_\perp) &= \omega_b^2 \iint_{S_w} K_b(\bar{r}_\perp, \bar{r}_\perp^*) \tilde{j}_b(\bar{r}_\perp^*) d\bar{r}_\perp^*, \\ K_b(\bar{r}_\perp, \bar{r}_\perp^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi^2}{k_{\perp n}^2 + \chi^2} \frac{P_b(\bar{r}_\perp^*) \varphi_n(\bar{r}_\perp^*) \varphi_n(\bar{r}_\perp)}{\|\varphi_n\|^2}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

где все обозначения совпадают с введенными ранее. Условие разрешимости уравнения (10.6) и есть искоемое дисперсионное уравнение для спектров волн

в волноводе с электронным пучком в бесконечно сильном продольном внешнем магнитном поле. Уравнение (10.6) справедливо и в случае релятивистского электронного пучка, если осуществить замену  $\omega_b^2 \rightarrow \omega_b^2 \gamma^{-3}$ , где  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор электрона пучка.

В качестве примера анализа уравнения (10.6) опять рассмотрим два крайних случая — волновод с однородным в поперечном сечении электронным пучком и волновод, в котором распространяется бесконечно тонкий (игольчатый) электронный пучок. Если пучок однороден в поперечном сечении волновода, то  $P_b(\vec{r}_\perp) \equiv 1$ . Полагая при этом  $\tilde{j}_b(\vec{r}_\perp) = \text{const } \varphi_n(\vec{r}_\perp)$ , получим из (10.6) бесконечное множество алгебраических уравнений (сравни с (8.10))

$$(\omega - k_z u)^2 = \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi^2}{k_{\perp n}^2 + \chi^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.7)$$

Уравнение (10.7) определяет для каждого  $n$  три ветви колебаний: электромагнитную волну; быструю пучковую волну; медленную пучковую волну.

У электромагнитной волны  $\omega^2 > k_z^2 c^2$ , т. е. фазовая скорость больше скорости света, это — обычная волноводная электромагнитная волна, но определенным образом возмущенная пучком. У быстрой волны  $k_z^2 c^2 > \omega^2 > k_z^2 u^2$ , т. е. фазовая скорость меньше скорости света, но больше невозмущенной скорости пучка  $u$ . У медленной волны фазовая скорость меньше скорости пучка  $u$ , поскольку для нее  $k_z^2 u^2 > \omega^2$ . С возбуждением медленной волны связано явление пучковой неустойчивости. В случае однородного в поперечном сечении волновода пучка быстрая и медленная волны являются объемными. Быструю и медленную пучковые волны называют еще волнами пространственного заряда электронного пучка.

Для случая бесконечно тонкого (игольчатого) пучка поперечный профиль плотности имеет вид  $P_b(\vec{r}_\perp) = S_b \delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_b)$ , где  $S_b$  — площадь поперечного сечения пучка, а  $\vec{r}_b$  — определяет его среднее положение в поперечном сечении волновода. В этом случае (10.6) сводится к виду (сравни с (8.11)):

$$(\omega - k_z u)^2 = \omega_b^2 \gamma^{-3} \frac{\chi^2}{k_{\perp b}^2}, \quad \text{где } k_{\perp b}^2 = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_b}{k_{\perp n}^2 + \chi^2} \frac{\varphi_n^2(\vec{r}_b)}{\|\varphi_n\|^2} \right]^{-1}. \quad (10.8)$$

Уравнение (10.8) определяет спектры бесконечного множества объемных электромагнитных волн. Это — обычные волноводные моды с  $\omega^2 > k_z^2 c^2$ , но несколько возмущенные присутствием электронного пучка. Кроме того, уравнение (10.8) определяет спектры еще двух ветвей поверхностных волн пространственного заряда пучка: быстрой и медленной поверхностных пучковых волн. Рассмотрим спектры пучковых волн подробнее.

В потенциальном приближении уравнения (10.7) и (10.8) оказываются уже разрешенными относительно частоты  $\omega$ . Так, из (10.7) имеем

$$\omega = k_z u \pm \omega_b \gamma^{-3/2} \sqrt{\frac{k_z^2}{k_{\perp n}^2 + k_z^2}}, \quad (10.9)$$

где верхний знак относится к быстрой волне, а нижний — к медленной. Так как собственные значения  $k_{1n}$  возрастают с ростом номера  $n$ , то основная мода с  $n = 1$  имеет минимальную фазовую скорость медленной пучковой волны и максимальную фазовую скорость быстрой пучковой волны. Более того, скорость медленной волны может быть противоположной невозмущенной скорости пучка. Из (10.9) видно, что это имеет место на низких частотах при выполнении неравенства

$$\alpha \equiv \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{11}^2 u^2} > 1, \tag{10.10}$$

что возможно только при высокой плотности электронов в пучке. Ток пучка, при котором начинает выполняться неравенство (10.10), называют пирсовским током, а параметр  $\alpha$  — параметром Пирса. На рис. 17 представлены дисперсионные кривые быстрых и медленных волн при малых ( $\alpha < 1$ ) и больших ( $\alpha > 1$ ) плотностях пучка.

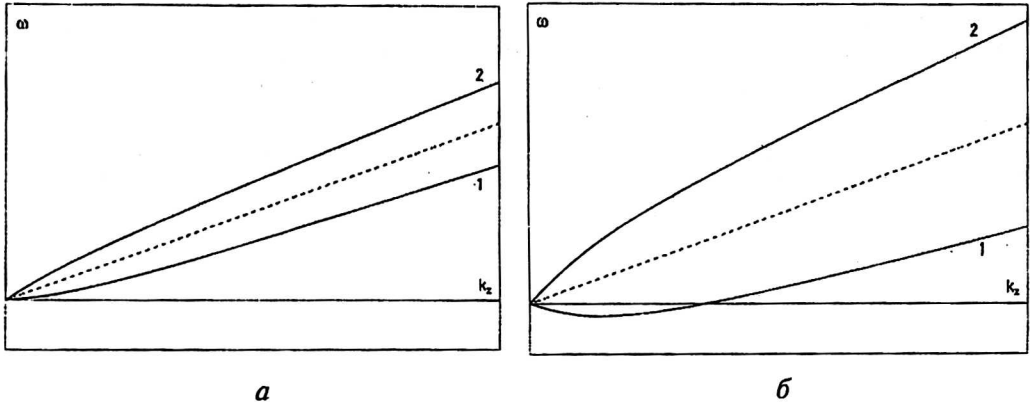


Рис. 17. Качественный вид дисперсионных кривых пучковых волн: а —  $\alpha < 1$ , б —  $\alpha > 1$ ; кривая 1 — медленная волна; 2 — быстрая волна

Вычислим энергию волн (10.9), для этого вместо (9.16) используем, с учетом (10.7), его пучковый аналог

$$D_b \equiv k_{1n}^2 + \chi^2 \left( 1 - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \right). \tag{10.11}$$

Подставляя (10.11) в (9.15), в потенциальном приближении получим (сравни с (9.17))

$$W = \frac{1}{8\pi} \|\Phi_n\|^2 k_z^4 \frac{\omega \omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^3} |A_0|^2. \tag{10.12}$$

Из (10.9) видно, что энергия медленной пучковой волны отрицательна. Смысл этого состоит в том, что при возбуждении медленной волны энергия системы (пучка) уменьшается. Поэтому если имеется канал отвода энергии от пучка, амплитуда его медленной волны будет самопроизвольно нарастать, т. е. возникнет пучковая неустойчивость. Сказанное остается в силе и с учетом непотенциальных эффектов.

Перейдем теперь к рассмотрению волн бесконечно тонкого электронного пучка. Из уравнения (10.8) в потенциальном приближении имеем

$$\omega = k_z u \pm \omega_b \gamma^{-3/2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_z^2}{k_{1n}^2 + k_z^2} \frac{S_b}{\|\Phi_n\|^2} \Phi_n^2(\vec{r}_b)}, \tag{10.13}$$

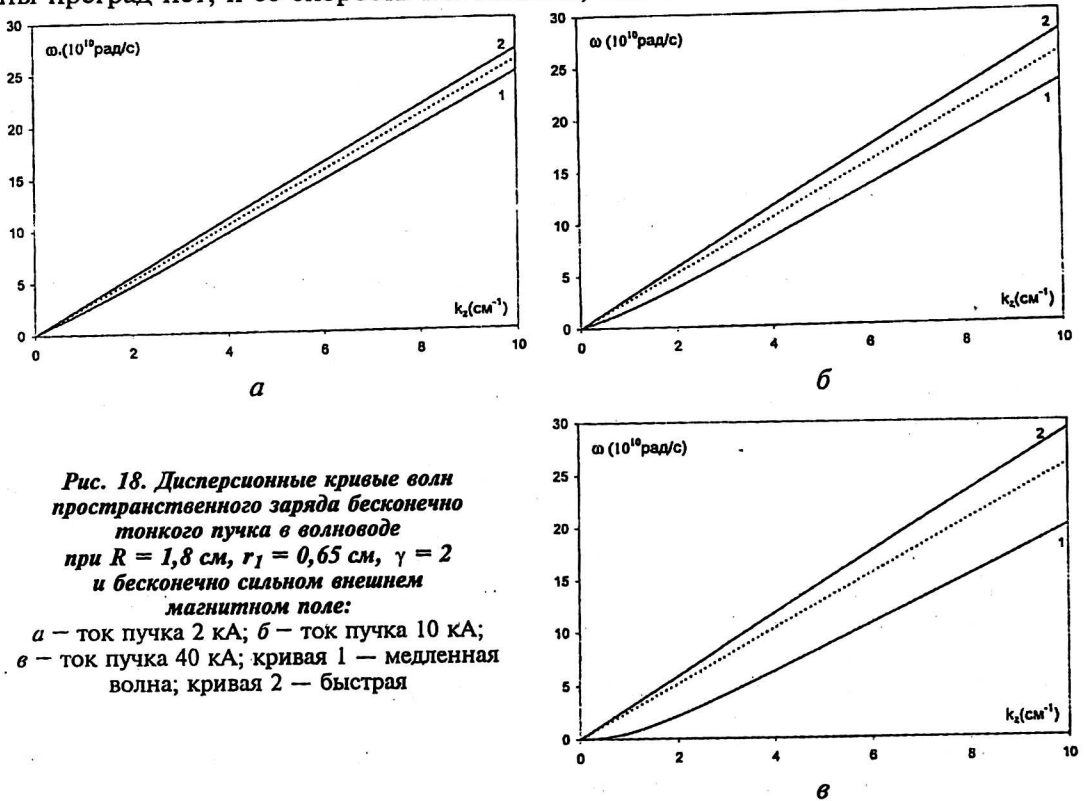
что аналогично (10.9). Параметр Пирса в случае тонкого пучка определяется формулой

$$\alpha \equiv \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{k_{\perp 1}^2 u^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{\perp 1}^2}{k_{\perp n}^2} \frac{S_b}{\|\varphi_n\|^2} \varphi_n^2(\bar{r}_b). \quad (10.14)$$

Выражение для энергий волн бесконечно тонкого электронного пучка совпадает с (10.12) при замене  $\|\varphi_n\|^2$  на  $S_b \psi_b^2(\bar{r}_b)$ , где  $\psi_b(\bar{r})$  — собственная функция волновода с пучком.

На рис. 18 представлены дисперсионные кривые волн бесконечно тонкого пучка. Они получены путем численного решения точного уравнения (10.8) (т. е. учитывают и непотенциальные эффекты) для цилиндрической геометрии при  $R = 1,8$  см,  $r_b = 0,65$  см,  $\gamma = 2$  ( $u = 2,6 \cdot 10^{10}$  см/с) и различных токах электронного пучка.

Кривые 1 и 2 изображают медленную и быструю волны, соответственно, при токе в 2 кА (см. рис. 18, а), при токе 10 кА (см. рис. 18, б), при токе 40 кА (см. рис. 18, в). В последнем случае параметр (10.14) примерно равен единице. Для наглядности на рис. 18, а—в пунктиром проведена прямая  $\omega = k_z u$ . Одним из следствий непотенциальности, хорошо видным на рисунках, является отсутствие симметрии быстрой и медленной волн относительно линии  $\omega = k_z u$ . Быстрая волна при больших токах ускорена почти до скорости света и сильнее ускорена быть не может. Для замедления же медленной волны преград нет, и ее скорость тем меньше, чем больше ток пучка.



**Рис. 18.** Дисперсионные кривые волн пространственного заряда бесконечно тонкого пучка в волноводе при  $R = 1,8$  см,  $r_1 = 0,65$  см,  $\gamma = 2$  и бесконечно сильном внешнем магнитном поле:

а — ток пучка 2 кА; б — ток пучка 10 кА; в — ток пучка 40 кА; кривая 1 — медленная волна; кривая 2 — быстрая

В статье отсутствуют некоторые ссылки на используемую литературу, поскольку все выкладки и решения основных уравнений проведены достаточно

подробно, поэтому приведем список лишь основополагающих по плазменным волноводам работ [1—6], к которым может обратиться читатель, и которыми мы следовали в нашем изложении.

### Л и т е р а т у р а

1. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988.
2. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Атомиздат, 1976.
3. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.
4. Аронов Б. И., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. //ЖТФ, 1973. Т. 43. № 4. С. 716; № 12. С. 2493.
5. Кузелев М. В., Романов Р. В., Селиванов И. А., Федотов А. В., Шкварунец А. Г.: Тр. ИОФАН, 1999. Т. 45. С. 17.
6. Кузелев М. В., Лаперовская Е. В., Рухадзе А. А. //Физика плазмы. 1978. Т. 4. № 3. С. 433.

## Electromagnetic waves in plasma waveguide. Part II

*M. V. Kuzelev, R. V. Romanov, A. A. Rukhadze*  
Institute of General Physics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*The review proposed here is devoted to detailed description of electromagnetic radiation spectra in waveguides with plasma filling. Both volume and surface waves are considered. The surface waves can exist only under conditions of waveguide incomplete filling by plasma. Particular attention has been given to slow waves, with emphasis on its spatial structure, phase and group velocities. Exactly these waves are excited frequently by rectilinear relativistic electron beams in the plasma waveguides due to the effect of stimulated Cerenkov radiation or interaction between these plasma waves and Langmuir oscillations of electron beam itself. That is why the last section of review considers the waves in electron beam.*