

УДК 621.382

Электромагнитные волны в плазменных волноводах*.

Часть I

М. В. Кузелев, Р. В. Романов, А. А. Рухадзе,
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

Дано детальное описание спектров электромагнитных волн в волноводах, заполненных плазмой. Рассмотрены как объемные, так и поверхностные волны. Поверхностные волны существуют только в волноводах, частично заполненных плазмой. Особое внимание уделено медленным волнам, их пространственной структуре, их фазовым и групповым скоростям. Именно такие волны возбуждаются в плазменных волноводах прямолинейными релятивистскими электронными пучками вследствие вынужденного черенковского излучения или взаимодействия таких волн с ленгмюровскими колебаниями пучка. Именно поэтому в последнем параграфе обзора рассмотрены волны в электронном пучке.

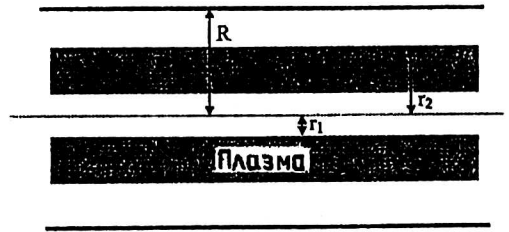
1. Основные уравнения электромагнитных волн в плазменных волноводах

Изучение электромагнитных волн в волноводах с плазменным заполнением — одна из важных задач теоретической плазменной СВЧ-электроники [1—6]. Наиболее интересные процессы, исследуемые этим разделом физики, происходят в электродинамических системах типа плазменного столба, заключенного в некоторый кожух, т. е. именно в плазменных волноводах. Сильная частотная дисперсия диэлектрической проницаемости плазмы значительно обогащает набор собственных электромагнитных колебаний волноводов с плазменным заполнением. Именно эти, обусловленные плазменным заполнением, электромагнитные колебания представляют интерес для плазменной СВЧ-электроники, в особенности сверхвысокочастотной. Ниже на основе общего формализма электродинамики сред с частотной дисперсией исследуются электромагнитные свойства цилиндрических волноводов, заполненных поперечно неоднородной магнитоактивной холодной электронной плазмой. Главное внимание уделено определению спектров частот собственных волн, или собственных мод волноводов, заполненных плазмой. Знание таких спектров чрезвычайно важно, поскольку как поглощение, так и возбуждение электромагнитных волн в плазменных волноводах происходит вблизи собственных частот.

Достаточно общей моделью плазменного волновода является полый плазменный цилиндр с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом $r_2 > r_1$, помещенным в металлический кожух радиуса $R > r_2$. При $r_1 < r < r_2$ плазма однородна, а ее границы $r = r_1$ и $r = r_2$ — резкие. Вся система находится в однородном продольном внешнем магнитном поле $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$, вдоль которого направлена ось oz . Схематически описанная конструкция изображена на рис. 1.

* Часть II данной статьи будет опубликована в № 3 за 2001 г.

Рис. 1. Схематическое изображение плазменного волновода



В настоящем разделе рассмотрены собственные электромагнитные волны плазменных волноводов, имеющие частоты, намного большие ионной ленгмюровской частоты, и фазовые скорости, существенно превышающие тепловую скорость электронов. При рассмотрении таких волн плазму достаточно моделировать уравнениями холодной гидродинамики, записанными только для ее электронной компоненты

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (N_e \bar{V}_e) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{V}_e}{\partial t} + (\bar{V}_e \bar{\nabla}) \bar{V}_e &= \frac{e}{m} \left\{ \bar{E} + \frac{1}{c} [\bar{V}_e \times (\bar{B} + \bar{B}_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь N_e и \bar{V}_e — гидродинамические плотность и скорость электронов плазмы, соответственно;

\bar{E} и \bar{B} — векторы самосогласованного электромагнитного поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} [\bar{\nabla} \times \bar{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (\bar{\nabla} \bar{E}) = -4\pi\rho, \\ [\bar{\nabla} \times \bar{B}] &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{j}, \quad (\bar{\nabla} \bar{B}) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Возмущения плотностей заряда и тока в плазме вычисляются по формулам

$$\rho = e(N_e - n_{0e}), \quad \bar{j} = eN_e \bar{V}_e, \quad (1.3)$$

где n_{0e} — невозмущенная плотность электронов плазмы, учитывающая в формуле для ρ нейтрализующее действие неподвижного ионного фона ($-en_{0e}$).

В цилиндрических координатах $\{r, \varphi, z\}$ в линейном приближении решения уравнений (1.1) и (1.2) представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}, \bar{B} &= \bar{E}(r), \bar{B}(r) \exp(-i\omega t + ik_z z + il\varphi); \\ \bar{V}_e &= \bar{V}_e(r) \exp(-i\omega t + ik_z z + il\varphi); \\ N_e - n_{0e} &= N_e(r) \exp(-i\omega t + ik_z z + il\varphi), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ω — частота;

k_z — продольное волновое число;

$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — азимутальное волновое число.

В линейном приближении из (1.1) и (1.2) следуют соотношения

$$[\bar{\nabla} \times \bar{E}]_i = i \frac{\omega}{c} B_i, \quad [\bar{\nabla} \times \bar{B}]_i = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{ij}(\omega) E_j, \quad (1.5)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega)$ ($i, j = r, \varphi, z$) — известный тензор диэлектрической проницаемости холодной электронной магнитоактивной плазмы

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & 0 \\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

компоненты которого определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}; \\ \varepsilon_{r\varphi} = -\varepsilon_{\varphi r} = ig &= -i \frac{\omega_p^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}; \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_{0e}/m}$ — ленгмюровская частота электронов плазмы;

$\Omega_e = eB_0/mc$ — электронная циклотронная частота.

С помощью соотношений (1.5) поперечные компоненты электромагнитного волноводного поля $E_r, E_{\varphi}, B_r, B_{\varphi}$ выражаются через продольные компоненты E_z, B_z :

$$\begin{aligned} E_r &= \xi^{-1} \left\{ -ik_z \chi^2 \frac{dE_z}{dr} + \frac{\omega}{c} \chi^2 \frac{l}{r} B_z - g \frac{\omega^3}{c^3} \frac{dB_z}{dr} + igk_z \frac{\omega^2 l}{c^2 r} E_z \right\}; \\ E_{\varphi} &= \xi^{-1} \left\{ i \frac{\omega}{c} \chi^2 \frac{dB_z}{dr} + k_z \chi^2 \frac{l}{r} E_z - gk_z \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dE_z}{dr} - ig \frac{\omega^3 l}{c^3 r} B_z \right\}; \end{aligned} \quad (1.8, a)$$

$$\begin{aligned} B_r &= \xi^{-1} \left\{ -ik_z \chi^2 \frac{dB_z}{dr} - \varepsilon_{\perp} \frac{\omega}{c} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_{\perp} c^2} \right) \frac{l}{r} E_z + gk_z^2 \frac{\omega}{c} \frac{dE_z}{dr} + igk_z \frac{\omega^2 l}{c^2 r} B_z \right\}; \\ B_{\varphi} &= \xi^{-1} \left\{ -i\varepsilon_{\perp} \frac{\omega}{c} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_{\perp} c^2} \right) \frac{dE_z}{dr} + k_z \chi^2 \frac{l}{r} B_z - gk_z \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dB_z}{dr} + igk_z^2 \frac{\omega l}{c r} E_z \right\}. \end{aligned} \quad (1.8, b)$$

Здесь $\chi^2 = k_z^2 - \varepsilon_{\perp} \omega^2/c^2$, $\xi = \chi^4 - g^2 \omega^4/c^4$.

Формулы (1.8) обобщают известные соотношения теории волноводов на случай, когда тензор диэлектрической проницаемости среды (в рассматриваемом случае плазмы), находящейся в волноводе, не является диагональным. Продольные компоненты электрического и магнитного полей удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_{\perp} c^2} \right) \Delta_{\perp} E_z - \xi \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} E_z &= ik_z \frac{\omega}{c} \frac{g}{\varepsilon_{\perp}} \Delta_{\perp} B_z, \\ \chi^2 \Delta_{\perp} B_z - \xi B_z &= -ik_z \frac{\omega}{c} g \Delta_{\perp} E_z, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2}$ — поперечная часть оператора Лапласа.

Известным фактом теории волноводов является возможность существования в них двух типов независимых волн: E -типа и H -типа.

У волн E -типа $E_z \neq 0$, но $B_z = 0$. Наоборот, у волн H -типа $E_z = 0$, но $B_z \neq 0$. Из (1.9) следует, что в рассматриваемом плазменном волноводе волны E - и H -типов зацепляются друг с другом. Это есть следствие недиагональности тензора диэлектрической проницаемости (1.6), у которого $\varepsilon_{r\varphi} = -\varepsilon_{\varphi r} = ig \neq 0$.

Из (1.9) следует соотношение, связывающее между собой компоненты E_z и B_z

$$B_z = \frac{ic}{\omega k_z g} (\varepsilon_{II} \chi^2 E_z - \varepsilon_{\perp} \Delta_{\perp} E_z), \quad (1.10)$$

и независимое уравнение для компоненты E_z

$$\varepsilon_{\perp} \Delta_{\perp}^2 E_z - \left\{ \chi^2 (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{\perp}) + g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right\} \Delta_{\perp} E_z + \varepsilon_{II} \xi E_z = 0. \quad (1.11)$$

Общее решение уравнения (1.11) ищется, как известно, из курса математической физики в виде $E_z = a Z_l(kr)$, где a — произвольная постоянная; Z_l — цилиндрическая функция l -го порядка, а величина k подлежит определению. Подстановка решения такого вида в (1.11) приводит к следующему характеристическому уравнению для определения параметра k :

$$\varepsilon_{\perp} k^4 + \left\{ \chi^2 (\varepsilon_{II} + \varepsilon_{\perp}) + g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right\} k^2 + \varepsilon_{II} \xi = 0. \quad (1.12)$$

Корни уравнения (1.12) записываются в виде

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_{\perp}} \left\{ -(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{II}) \chi^2 - g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{II}) \chi^2 + g^2 \frac{\omega^2}{c^2}}^2 + 4\varepsilon_{II} g k_z^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right\}. \quad (1.13)$$

С учетом (1.13) и того, что в качестве линейно независимых цилиндрических функций могут быть взяты функция Бесселя J_l и функция Неймана Y_l , полное решение уравнения (1.11) для E_z и выражение (1.10) для B_z оказываются следующими:

$$\begin{aligned} E_z &= [AJ_l(k_1 r) + BY_l(k_1 r)] + [CJ_l(k_2 r) + DY_l(k_2 r)], \\ B_z &= \beta_1 [AJ_l(k_1 r) + BY_l(k_1 r)] + \beta_2 [CJ_l(k_2 r) + DY_l(k_2 r)], \end{aligned} \quad (1.14)$$

где A, B, C, D — некоторые постоянные,

$$\beta_{1,2} = \frac{ic}{\omega k_z g} (\varepsilon_{II} \chi^2 + \varepsilon_{\perp} k_{1,2}^2). \quad (1.15)$$

Уравнения (1.9) и формулы (1.8) справедливы в вакуумных областях волновода при $0 < r < r_1$ и $r_2 < r < R$. В этих областях $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{II} = 1$, $g = 0$, и уравнения (1.9) сводятся к следующим:

$$\Delta_{\perp} \Phi - k_0^2 \Phi = 0, \quad (1.16)$$

где Φ — совпадает с E_z или B_z , а $k_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$. Решения уравнения (1.16) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 E_z &= EJ_1(ik_0r), \\
 B_z &= FJ_1(ik_0r), \quad 0 < r < r_1, \\
 E_z &= GJ_1(ik_0r) + HY_1(ik_0r), \\
 B_z &= KJ_1(ik_0r) + LY_1(ik_0r), \quad r_2 < r < R,
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

где E, F, G, K, H, L — постоянные.

При записи решений в области $0 < r < r_1$ учтено требование их ограниченности на оси волновода $r = 0$.

Для исключения постоянных $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ из (1.14) и (1.17) следует использовать граничные условия на металлической стенке волновода и на границах плазменного цилиндра. Как известно из электродинамики, они сводятся к непрерывности при $r = r_{1,2}$ тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{B} и к равенству нулю — при $r = R$ тангенциальных составляющих вектора \vec{E} , т. е.

$$\begin{aligned}
 \{E_z\}_{r=r_{1,2}} &= 0, \quad \{E_\varphi\}_{r=r_{1,2}} = 0, \quad \{B_z\}_{r=r_{1,2}} = 0, \quad \{B_\varphi\}_{r=r_{1,2}} = 0; \\
 E_z|_{r=R} &= 0, \quad E_\varphi|_{r=R} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Число постоянных в решениях (1.14) и (1.17) (десять) совпадает с числом условий (1.18), что позволяет исключить эти постоянные и получить дисперсионное уравнение $D(\omega, k_z)$ для определения спектров частот $\omega(k_z)$ собственных волн плазменного волновода во внешнем магнитном поле. Однако общее дисперсионное уравнение имеет чрезвычайно громоздкий вид, поэтому здесь не приводится. Обычно исследуются его упрощенные варианты: $r_1 = 0$ — сплошной плазменный цилиндр; $r_1 = 0$ и $r_2 = R$ — волновод со сплошным плазменным заполнением; $R \gg r_2$ — плазменный цилиндр со свободной поверхностью; $r_2 - r_1 \ll r_1$ — плазменный волновод с тонким трубчатым плазменным заполнением; $\Omega_e = 0$ — отсутствие внешнего магнитного поля; $\Omega_e \rightarrow \infty$ — плазменный волновод в сильном внешнем магнитном поле и т. п.

2. Плазменный волновод в бесконечно сильном внешнем магнитном поле ($\Omega_e \rightarrow \infty$)

В пределе бесконечно сильного внешнего магнитного поля ($\Omega_e \rightarrow \infty$), а точнее, при выполнении неравенств

$$\omega^2 \ll \Omega_e^2, \quad \omega_p^2 \ll \Omega_e^2, \quad \omega_p^2 \ll \omega\Omega_e,
 \tag{2.1}$$

имеем $\varepsilon_\perp = 1, g = 0$, а поэтому $k_1^2 = -k_0^2\varepsilon_{\parallel}$, $k_2^2 = -k_0^2$, $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 \rightarrow \infty$. При этом из общего решения (1.14) следуют два независимых решения вида:

$$\left. \begin{aligned}
 E_z &= AJ_1(ik_0\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}r) + BY_1(ik_0\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}r) \\
 B_z &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad E\text{-волна;}$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_z &= 0 \\
 B_z &= AJ_1(ik_0r) + BY_1(ik_0r)
 \end{aligned} \right\}, \quad H\text{-волна.}
 \tag{2.2}$$

Впрочем, тот же результат следует и из расцепляющихся при $\Omega_e \rightarrow \infty$ уравнений (1.9).

Таким образом, волны в плазменном волноводе в бесконечно сильном внешнем магнитном поле распадаются на две независимые системы волн: волны E -типа и волны H -типа. Причем, волны H -типа такие же, как в вакуу-

умном волноводе. Спектры их, независимо от конфигурации и плотности плазмы, определяются соотношением

$$\omega^2 = \frac{\mu'_{ls}}{R^2} c^2 + k_z^2 c^2, \quad (2.3)$$

где μ'_{ls} — корень производной функции Бесселя $J'_l(x) = 0$, а $s = 1, 2, \dots$ — номер корня.

Результат (2.3) обусловлен тем, что у волн H -типа $E_z = 0$, но только компонента поля E_z влияет на движение электронов плазмы, находящейся в бесконечно сильном продольном внешнем магнитном поле. Поэтому волны H -типа «не чувствуют» присутствия в волноводе плазменного заполнения.

Для получения дисперсионного уравнения волн E -типа следует решение для E_z из (1.17) и (2.2) подставить в граничные условия (1.18), которые сводятся к непрерывности E_z и dE_z/dr при $r = r_{1,2}$ и равенству нулю E_z при $r = R$. Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$D(\omega, k_z) \equiv \frac{k_p J_{l+1}(k_p r_1) + Q J_l(k_p r_1)}{k_p Y_{l+1}(k_p r_1) + Q Y_l(k_p r_1)} - \frac{k_p J_{l+1}(k_p r_2) + P J_l(k_p r_2)}{k_p Y_{l+1}(k_p r_2) + P Y_l(k_p r_2)} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь использованы обозначения:

$$Q = k_0 \frac{I_{l+1}(k_0 r_1)}{I_l(k_0 r_1)}, \quad k_p^2 = -k_0^2 \epsilon_{II}, \quad (2.5)$$

$$P = k_0 \frac{I_{l+1}(k_0 r_2) K_l(k_0 R) + I_l(k_0 R) K_{l+1}(k_0 r_2)}{I_l(k_0 r_2) K_l(k_0 R) - I_l(k_0 R) K_l(k_0 r_2)},$$

где $I_l(x)$ — модифицированная функция;

$K_l(x)$ — функция Макдональда.

Рассмотрим частные случаи уравнения (2.4). Для волновода со сплошным плазменным заполнением $r_1 = 0$ и $r_2 = R$. При этом уравнение (2.4) очевидным образом переходит в $J_l(k_p R) = 0$, или

$$\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) + \frac{\mu'_{ls}}{R^2} = 0, \quad (2.6)$$

где μ_{ls} — корень функции Бесселя $J_l(x) = 0$.

Уравнение (2.6) имеет решения двух типов — высокочастотные с $\omega^2 > \omega_p^2$ и низкочастотные с $\omega^2 < \omega_p^2$. Оба типа решений определяются формулами (со знаком «+» и «-», соответственно):

$$2\omega_{1,2}^2 = \left(k_z^2 + \frac{\mu'_{ls}}{R^2} \right) c^2 + \omega_p^2 \pm \sqrt{\left[\left(k_z^2 + \frac{\mu'_{ls}}{R^2} \right) c^2 + \omega_p^2 \right]^2 - 4k_z^2 c^2 \omega_p^2}. \quad (2.7)$$

Эти решения называются высокочастотной и низкочастотной ветвями волн E -типа. В пределе $\omega_p \rightarrow 0$ высокочастотная ветвь переходит в спектр вакуумной электромагнитной волны E -типа (полезно сравнить с (2.3))

$$\omega^2 = \frac{\mu'_{ls}}{R^2} c^2 + k_z^2 c^2. \quad (2.8)$$

Низкочастотная же ветвь является чисто плазменной и в пределе $\omega_p \rightarrow 0$ исчезает.

Частоты волноводных волн $\omega(k_z)$ при $k_z = 0$ называют частотами отсечки. Для волн *H*-типа частоты отсечки такие же, как в вакуумном случае. Для высокочастотных волн *E*-типа при сплошном плазменном заполнении частоты отсечки определяются формулами

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\mu_{ls}^2}{R^2} c^2, \tag{2.9}$$

а для низкочастотных волн *E*-типа частоты отсечки равны нулю.

В коротковолновом пределе $k_z \rightarrow \infty$ спектры высокочастотных волн становятся неотличимыми от вакуумных, а частоты плазменных волн выходят на плазменную частоту ω_p по закону

$$\omega = \omega_p \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_{ls}^2/k_z^2 R^2}}. \tag{2.10}$$

Последнее, в случае бесконечно сильного внешнего магнитного поля, качественно справедливо не только при сплошном плазменном заполнении, но и при любых других значениях $r_{1,2}$.

В длинноволновом пределе ($k_0 R \ll 1$) спектры низкочастотных плазменных волн в волноводе со сплошным плазменным заполнением приближенно определяются формулами

$$\omega = \frac{k_z c}{\sqrt{1 + [k_z^2 c^2 + (\mu_{ls}^2/R^2)c^2]/\omega_p^2}} < \frac{k_z c}{\sqrt{1 + (\mu_{ls}^2 c^2)/(R^2 \omega_p^2)}}. \tag{2.11}$$

Фазовая скорость низкочастотных плазменных волн меньше скорости света, причем тем меньше, чем больше k_z и чем меньше ω_p . Максимальная фазовая реализуется при $k_z = 0$ для волны E_{01} . Исходя из величины фазовой скорости низкочастотных плазменных волн, можно ввести параметр плотности плазмы в сильном внешнем магнитном поле

$$\tilde{a}_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 c^2}, \tag{2.12}$$

где $k_{\perp p}^{-1}$ — определяет характерный поперечный размер неоднородности поля плазменной волны.

В волноводе со сплошным плазменным заполнением $k_{\perp p}^{-1} = R/\mu_{ls}$. Величины типа $k_{\perp p}$ называют поперечными волновыми числами соответствующих низкочастотных плазменных волноводных мод. При $\tilde{a}_p \gg 1$ плазма считается плотной, при этом фазовая скорость соответствующей плазменной волны близка к скорости света c (см (2.11)). Поясним, что понятие "плотная плазма" зависит от номера моды, поскольку $k_{\perp p}$, а следовательно, и \tilde{a}_p зависят от номера моды. Минимальное $k_{\perp p}$ при любом плазменном заполнении имеет мода E_{01} .

На рис. 2 приведены спектры частот $\omega(k_z)$ симметричных ($l = 0$) волн для вакуумного волновода с $R = 2$ см. Сплошные кривые описывают волны *E*-типа, а штриховые — волны *H*-типа. Частоты волн вакуумного волновода всегда лежат выше линии $\omega = k_z c$ (сплошная прямая, выходящая из начала координат), т. е. фазовые скорости волн вакуумного волновода всегда больше скорости света. Иное положение, как уже говорилось, имеет место для

плазменного волновода в бесконечно сильном внешнем магнитном поле, спектры частот которого, рассчитанные по формулам (2.7), приведены на рис. 3 для $R = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с. Наряду с высокочастотными ветвями волн H - и E -типов с фазовыми скоростями, большими скорости света, появляются низкочастотные ветви волн E -типа с $\omega/k_z < c$. Кроме того, наличие плазмы видоизменяет спектры высокочастотных волн E -типа (см. (2.9)): если в отсутствие плазмы спектры частот E - и H -волн чередовались, причем основная мода E -волны E_{01} всегда была ниже основной моды H -волны H_{01} , то при наличии плазмы частоты E -волн смещаются вверх. Следует обратить внимание на пересечение дисперсионных кривых для высокочастотных волн E - и H -типов на рис. 3. Это следствие неточности предположения о бесконечно сильном внешнем магнитном поле: уже в первом приближении по параметру ω_p/Ω_e пересечение дисперсионных кривых пропадает. Заметим, что параметр (2.12), соответствующий рис. 3 и рассчитанный по моде E_{01} , составляет порядка 1,9, что означает умеренную плотность плазмы.

Рис. 2. Дисперсионные кривые симметричных волн вакуумного волновода при $R = 2$ см

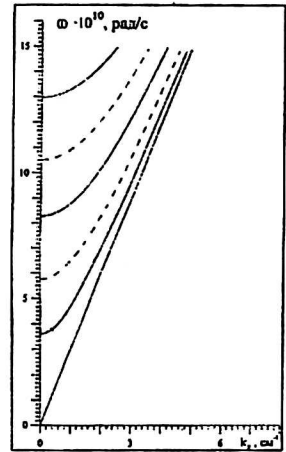
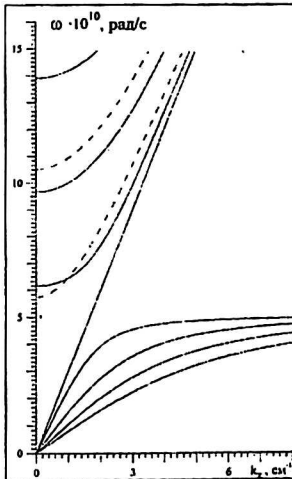


Рис. 3. Дисперсионные кривые симметричных волн плазменного волновода со сплошным заполнением в бесконечно сильном внешнем магнитном поле при $R = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с

Для плазменной СВЧ-электроники наибольшую важность представляют именно низкочастотные плазменные волны с $\omega/k_z < c$. На рис. 4 отдельно приведены дисперсионные кривые этих волн для плазменного волновода со сплошным заполнением в бесконечно сильном магнитном поле при $R = 2$ см

и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с (линия $\omega = k_z c$ показана пунктиром; номер кривой соответствует номеру радиальной моды). Ниже приведены другие виды плазменного заполнения, к рассмотрению которых мы и переходим.

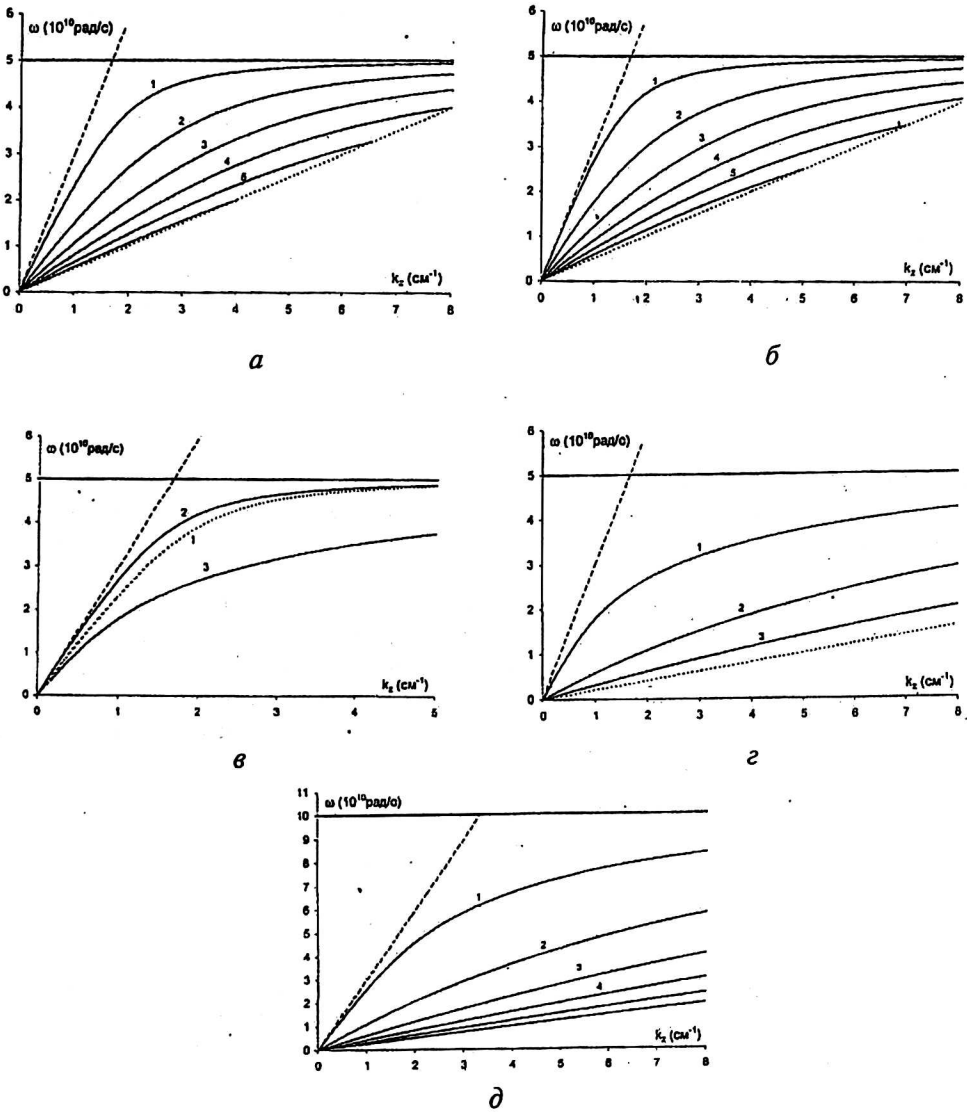


Рис. 4. Дисперсионные кривые низкочастотных симметричных волн плазменного волновода (номер кривой соответствует номеру радиальной моды):

а — со сплошным заполнением в бесконечно сильном магнитном поле при $R = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с; **б** — со свободной поверхностью в бесконечно сильном магнитном поле при $r_2 = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с; **в** — в сильном магнитном поле при $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с для различных заполнений плазмой:

1 — сплошное заполнение $r_2 = R = 2$ см; 2 — плазменный цилиндр со свободной поверхностью

$R \rightarrow \infty$, $r_2 = 2$ см; 3 — трубчатая плазма $R = 3$ см, $r_2 = 2$ см, $r_1 = 1,6$ см;

г — с трубчатым заполнением в сильном магнитном поле при $R = 3$ см, $r_1 = 1,6$ см, $r_2 = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с; **д** — с трубчатым заполнением в сильном магнитном поле и большой

плотностью плазмы при $R = 3$ см, $r_1 = 1,6$ см, $r_2 = 2$ см и $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с

В случае сплошного плазменного цилиндра со свободной поверхностью $r_1 = 0$, $R \rightarrow \infty$, и дисперсионное уравнение (2.4) сводится к следующему (напомним, что внешнее магнитное поле пока бесконечно сильное):

$$\left(\omega_p^2/\omega^2 - 1\right)^{1/2} J_{l+1}(k_p r_2) K_l(k_0 r_2) - K_{l+1}(k_0 r_2) J_l(k_p r_2) = 0. \quad (2.13)$$

Отметим, что говорить о высокочастотных электромагнитных волнах в плазменном цилиндре со свободной поверхностью не представляет интереса. Действительно, при $\omega > k_z c$ структура поля вне плазмы определяется функцией $Y_l(k_0/r)$, $r > r_2$, т. е. имеет объемный (осциллирующий) характер. Другими словами, плазменный цилиндр в сильном магнитном поле в области высоких частот $\omega > k_z c$ хорошими волноводными качествами не обладает, а металлический кожух отсутствует.

В случае низкочастотных волн ситуация иная. При $\omega < k_z c$ поле вне плазмы пропорционально $K_l(k_0 r)$, т. е. имеет поверхностный (экспоненциально затухающий вне плазменного цилиндра) характер. Внутри плазмы, в той же области частот и при $\omega < \omega_p$ поле задается функцией $J_l(k_p r)$ ($k_p^2 > 0$), следовательно является объемным.

Таким образом, низкочастотные волны плазменного цилиндра со свободной поверхностью в сильном магнитном поле являются поверхностно-объемными.

В коротковолновом пределе $k_z \rightarrow \infty$ спектры низкочастотных волн цилиндра со свободной поверхностью определяются формулой (2.10), но с заменой R на r_2 . Это понятно, поскольку в коротковолновом пределе поле вне плазмы затухает чрезвычайно резко, как если бы при $r = r_2$ был металл.

В противоположном длинноволновом пределе $k_0 r_2 \ll 1$, и уравнение (2.13) сводится к следующему

$$q \frac{J_{l+1}(q)}{J_l(q)} = 2|l|, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.14)$$

где

$$q = k_0 r_2 \frac{\omega_p}{\omega}.$$

Корни уравнения (2.14) определяют фазовые скорости плазменных волн в пределе $k_z \rightarrow 0$, когда скорости максимальны, в соответствии с формулами (сравни с (2.11))

$$\omega = \frac{k_z c}{\sqrt{1 + (q^2 c^2)/(r_2^2 \omega_p^2)}}. \quad (2.15)$$

Корни q_{ls} будут рассмотрены ниже. Сейчас же отметим, что $q_{01} = 0$ (только для плазмы со свободной поверхностью!). Следовательно, фазовая скорость волны E_{01} в плазменном цилиндре со свободной поверхностью в сильном магнитном поле при $k_z = 0$ равна скорости света c . Для этой волны при $k_z = 0$, $k_{\perp p} = q_{01}/r_2 = 0$, а следовательно, любая плазма со свободной поверхностью является сверхплотной (2.12).

На рис. 4, б изображены дисперсионные кривые низкочастотных плазменных волн в плазменном цилиндре со свободной поверхностью в сильном магнитном поле при $r_2 = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с. В целом картина напоми-

нает имеющую место при полном плазменном заполнении с теми же r_2 и ω_p (см. рис. 4, а). Но в случае плазмы со свободной поверхностью обращает на себя внимание большая величина фазовой скорости волны E_{01} при малых k_z . Особенно хорошо это видно из рис. 4, в, на котором изображены дисперсионные кривые волн E_{01} в волноводе со сплошным плазменным заполнением (кривая 1 — штриховая) и в плазме со свободной поверхностью (кривая 2), рассчитанные при одном и том же ω_p (о кривой 3 — см. ниже).

Дисперсионное уравнение (2.4) удается достаточно подробно исследовать и в общем случае. Оказывается, что формула (2.15), определяющая в длинноволновом пределе фазовые скорости низкочастотных плазменных волн, справедлива при любых $r_1, 2$ и R , если под q_{ls} понимать корни следующего уравнения:

$$q \frac{J_{l+1}(q)Y_{l+1}(q\xi_1) - J_{l+1}(q\xi_1)Y_{l+1}(q)}{J_l(q)Y_{l+1}(q\xi_1) - J_{l+1}(q\xi_1)Y_l(q)} = \begin{cases} 1/\ln \xi_2, & l = 0 \\ 2l/[\xi_2^2/(\xi_2^2 - 1)], & l = \pm 1, \dots, \end{cases} \quad (2.16)$$

где $\xi_1 = r_1/r_2 < 1$, $\xi_2 = R/r_2 \geq 1$. Уравнение (2.14) является частным случаем уравнения (2.16) при $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 \rightarrow \infty$.

Корни уравнения (2.16) q_{01} и q_{11} представлены на рис. 5 как функции ξ_2 для значений параметра ξ_1 , изменяющихся от 0,2 до 0,9 с шагом 0,1. С увеличением параметра ξ_1 соответствующие ему кривые смещаются по рис. 5 вверх. При $\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$ (полное заполнение волновода плазмой) имеем, очевидно, $q_{01} = 2,43$ и $q_{11} = 3,82$.

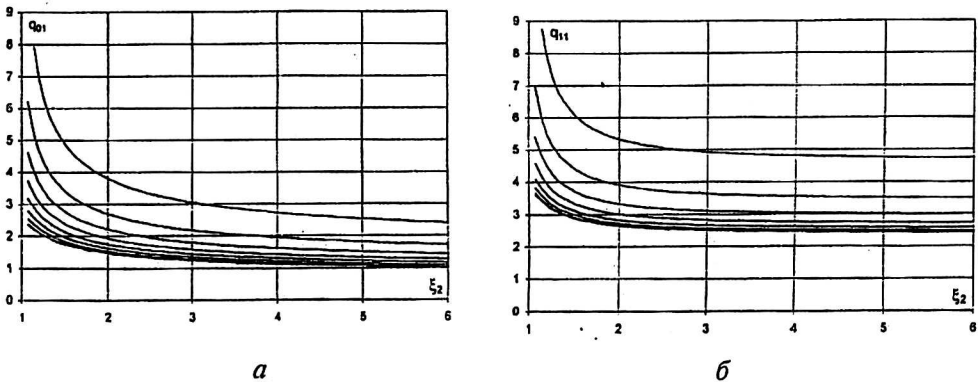


Рис. 5. Корни уравнения (2.16) q_{01} (а) и q_{11} (б)

На рис. 4, г изображены дисперсионные кривые низкочастотных симметричных волн плазменного волновода с трубчатым плазменным заполнением в сильном магнитном поле при $R = 3$ см, $r_1 = 1,6$ см, $r_2 = 2$ см и $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с. Этот рисунок целесообразно сравнить с рис. 4, а и рис. 4, б, на которых для той же $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с изображены дисперсионные кривые для волновода со сплошным заполнением и для плазменного цилиндра со свободной поверхностью. Видно, что в случае трубчатого заполнения фазовые скорости волн являются самыми низкими. Особенно ясно это следует из рис. 4, в, на котором представлены дисперсионные кривые мод E_{01} для разных геометрий плазменного заполнения и одинаковых $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с. В случае плазмы со свободной поверхностью (кривая 2 на рис. 4, в) максимальная фазовая скорость равна скорости света c , а параметр плотности (2.12) стремится к бесконечности. В случае плазмы, полностью заполняющей волновод (кри-

вая 1 на рис. 4, *в*) максимальная фазовая скорость несколько меньше c , а параметр плотности (2.12) больше единицы — 1,9. Для трубчатой же плазмы (кривая 3 на рис. 4, *в*) максимальная фазовая скорость заметно меньше c , а параметр плотности (см. формулу (2.15) и рис. 5, *а*) составляет всего 0,86.

На рис. 4, *д*) представлены дисперсионные кривые низкочастотных волн волновода с трубчатым заполнением для тех же радиусов, что и на рис. 4, *г*, но при большей плазменной частоте $\omega_p = 5 \cdot 10^{10}$ рад/с. В этом случае параметр плотности оказывается равным 3,44 и, соответственно, релятивистской становится скорость низкочастотной волны E_{01} .

Отметим еще одну особенность спектров волновода с трубчатым плазменным заполнением в сильном магнитном поле. Из рис. 4, *г*, *д* видно, что спектр плазменных волн является довольно разреженным в том смысле, что велика разность между максимальной фазовой скоростью моды E_{01} и следующей радиальной моды E_{02} . Это тем сильнее выражено, чем сильнее неравенство $r_2 - r_1 \ll r_1$. Случай, когда выполнено сильное неравенство $r_2 - r_1 \ll r_1$, называемый приближением тонкой (бесконечно тонкой) плазмы, представляет значительный интерес для приложений.

3. Модель бесконечно тонкой плазмы

В этом разделе по-прежнему рассматриваем предел бесконечно сильного внешнего магнитного поля. При выполнении неравенства $r_2 - r_1 \ll r_1$ параметр $\xi_1 = r_1/r_2 \rightarrow 1$, корни уравнения (2.16) q растут, и для функций Бесселя справедлива асимптотика при больших значениях аргумента. При этом оказывается несложным приближенное решение уравнения (2.16), что, вместе с формулой (2.15), дает всю информацию о спектрах низкочастотных плазменных колебаний в волноводе с тонкой трубчатой плазмой в длинноволновом пределе $k_z \rightarrow 0$. Однако имеются более простые способы исследования соответствующих спектров, пригодные в любом диапазоне длин волн.

Поскольку в сильном продольном внешнем магнитном поле в плазме находятся только продольные токи поляризации, постольку целесообразно для описания волнового поля E -типа использовать поляризационный потенциал ψ . В цилиндрической геометрии данный потенциал удовлетворяет следующему волновому уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} - \frac{l^2}{r^2} \psi - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2(r)}{\omega^2} \right) \psi = 0, \quad (3.1)$$

$$\psi(R) = 0,$$

а компоненты поля волны E -типа в волноводе определяются по формулам

$$E_z = - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi, \quad E_r = ik_z \frac{d\psi}{dr}, \quad E_\varphi = -k_z \frac{l}{r} \psi, \quad (3.2)$$

$$B_z = 0, \quad B_r = \frac{\omega l}{c r} \psi, \quad B_\varphi = i \frac{\omega}{c} \frac{d\psi}{dr}.$$

Здесь $\omega_p(r)$ — функция, задающая радиальный профиль распределения плотности плазмы в волноводе. Соотношения (3.1) и (3.2) справедливы для радиального распределения произвольного вида.

В случае тонкой (бесконечно тонкой) трубчатой плазмы целесообразно использовать радиальное распределение следующего вида:

$$\omega_p^2(r) = \omega_p^2 \Delta_p \delta(r - r_p), \quad (3.3)$$

где ω_p^2 — постоянная;

$\Delta_p = r_2 - r_1$ — толщина плазменной трубки;

$r_p = (r_1 + r_2)/2$ — средний радиус плазменной трубки;

$\delta(x)$ — дельта-функция.

Используя непрерывность потенциала ψ и интегрируя уравнение (3.1) по r , получим следующие условия сшивки функции ψ на плазменной трубке при $r = r_p$:

$$\{\psi\}_{r_p} = 0, \quad \left\{ \frac{d\psi}{dr} \right\}_{r_p} = - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Delta_p \psi(r_p). \quad (3.4)$$

Легко видеть, что при $r < r_p$ потенциал ψ определяется первым выражением (1.17), а при $R > r > r_p$ — третьим выражением (1.17). Объединяя эти решения с помощью граничных условий (3.4) и исключая произвольные постоянные, получаем следующее дисперсионное уравнение для определения собственных частот волновода с бесконечно тонкой плазмой в сильном магнитном поле

$$r_p \Delta_p \frac{\omega_p^2}{\omega^2} k_0^2 I_l^2(k_0 r_p) \left[\frac{K_l(k_0 r_p)}{I_l(k_0 r_p)} - \frac{I_l(k_0 R)}{K_l(k_0 R)} \right] = 1, \quad (3.5)$$

где $k_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$, а $K_l(x)$ и $I_l(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента порядка l . Собственная же функция, определяющая по формулам (3.2) волновое поле, имеет вид

$$\psi(r) = \begin{cases} I_l(k_0 r), & 0 < r < r_p, \\ I_l(k_0 r_p) \frac{I_l(k_0 r) K_l(k_0 R) - K_l(k_0 r) I_l(k_0 R)}{I_l(k_0 r_p) K_l(k_0 R) - K_l(k_0 r_p) I_l(k_0 R)}, & r_p < r < R. \end{cases} \quad (3.6)$$

Формулы (3.5) и (3.6) описывают как низкочастотные поверхностные плазменные волны, так и высокочастотные объемные электромагнитные. Поверхностные волны существуют в области частот, определяемой неравенством $k_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2 > 0$, когда и целесообразна запись (3.5) и (3.6) в том виде, как они приведены. В области частот, где существуют объемные волны, $k_0^2 < 0$ и более оправдана иная форма записи. Так, например, при $k_0^2 < 0$ уравнение (3.5) переходит в следующее:

$$\frac{\pi}{2} r_p \Delta_p \frac{\omega_p^2}{\omega^2} X^2 J_0^2(X r_p) \left(\frac{N_0(XR)}{J_0(XR)} - \frac{N_0(X r_p)}{J_0(X r_p)} \right) = -1, \quad (3.7)$$

где $X^2 = -k_0^2$. Для плазменной СВЧ-электроники главный интерес представляют, конечно, поверхностные плазменные волны.

Рассмотрим их на основе уравнения (3.5) и формулы (3.6). В длинноволновом пределе, когда

$$k_0 R \ll 1, \quad (3.8)$$

уравнение (3.5) определяет следующие спектры поверхностных плазменных волн (см. (2.11) и (2.15))

$$\omega = \frac{k_z c}{\sqrt{1 + (k_{\perp p}^2 c^2) / \omega_p^2}}. \quad (3.9)$$

Здесь поперечные волновые числа поверхностных плазменных мод даются выражениями

$$k_{\perp p}^2 = \begin{cases} [r_p \Delta_p \ln(R/r_p)]^{-1}, & l = 0, \\ 2l [r_p \Delta_p (1 - (r_p/R)^{2l})]^{-1}, & l = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.10)$$

Естественно, что (3.9) и (3.10) можно получить в пределе $r_2 - r_1 \ll r_1$ и из общих выражений (2.15), (2.16).

Собственная функция (3.6) в длинноволновом пределе (3.8) при $l = 0$ принимает вид

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r < r_p, \\ \ln(r/R) / \ln(r_p/R), & r_p < r < R, \end{cases} \quad (3.11)$$

а при $l = 1$ собственная функция следующая:

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_0 r, & 0 < r < r_p, \\ \frac{1}{2} k_0 r_p \frac{r_p R^2 - r^2}{r R^2 - r_p^2}, & r_p < r < R. \end{cases} \quad (3.12)$$

Приведем еще выражение для поперечной составляющей электрического поля в аксиально симметричной поверхностной волне в длинноволновом пределе (3.8):

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_0^2 r, & 0 < r < r_p, \\ \frac{1}{r \ln(r_p/R)} + O(k_0^2 r), & r_p < r < R. \end{cases} \quad (3.13)$$

Из (3.11) и (3.13) видно, что симметричная поверхностная плазменная волна очень похожа на вакуумную кабельную волну коаксиального волновода. Есть только два отличия. Во-первых, в случае плазмы поле отлично от нуля и в области $r < r_p$. Во-вторых, фазовая скорость плазменной волны (3.9) всегда меньше скорости света. Однако, если параметр плотности плазмы велик, что в рассматриваемом случае означает (см. (2.12) и (3.10))

$$\tilde{a}_p = \frac{\omega_p^2}{k_{\perp p}^2 c^2} = r_p \Delta_p \ln\left(\frac{R}{r_p}\right) \frac{\omega_p^2}{c^2} \gg 1, \quad (3.14)$$

то фазовая скорость близка к c (см. рис. 4, д). Рассмотренную плазменную волну в длинноволновом пределе (3.8) и в условиях (3.14) называют плазменной кабельной волной. Она играет исключительную роль в релятивистской плазменной СВЧ-электронике.

Рассмотрим распределение потока электромагнитной энергии кабельной плазменной волны по радиусу волновода. Обозначим через $P(r < r_p)$ и $P(r > r_p)$ — потоки энергии внутри и вне плазменного цилиндра, соответственно. Из (3.2) и (3.6) легко показать, что в длинноволновом пределе справедливо соотношение

$$\frac{P(r < r_p)}{P(r > r_p)} = \frac{1}{16} (k_0 R)^4 \left(\frac{r_p}{R}\right)^4 \ln\left(\frac{R}{r_p}\right) < 5 \cdot 10^{-3} (k_0 R)^4 = 5 \cdot 10^{-3} \frac{(k_z R)^4}{(1 + \tilde{a}_p)^2}. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15), если плазма плотная, может быть очень мало. Поскольку для вакуумной кабельной волны величина (3.15) строго равна нулю, плазменная и вакуумная кабельные волны могут быть хорошо согласованы по передаче энергии на низкой частоте при плотной плазме.

При укорочении длины волны свойства поверхностных плазменных волн существенно меняются. Так, при $k_0 r_p > 1$ они становятся потенциальными со спектром, как у волн на глубокой воде

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_p^2 \Delta_p k_z. \quad (3.16)$$

Поля волн со спектром (3.16) сильно прижаты к поверхности плазмы, а при $k_0 r_p \gg 1$ эти поля вообще запираются в объеме плазмы, спектр выходит на $\omega = \omega_p$. Однако эта модель бесконечно тонкой плазмы уже не описывает. Что касается объемных волн, описываемых дисперсионным уравнением (3.7), то их свойства мало определяются присутствием тонкой плазмы. По существу они не меняются по сравнению с соответствующими вакуумными волнами. Имеются, конечно, количественные поправки. Так, для частот отсечки из уравнения (3.7) находим

$$\omega^2 = \left(\frac{\mu_{ls} c}{R}\right)^2 + 2\omega_p^2 \frac{r_p \Delta_p}{R^2} \frac{J_l^2(\mu_{ls} r_p / R)}{J_{l+1}^2(\mu_{ls})}. \quad (3.17)$$

Наличие замагниченной плазмы всегда приводит к повышению частот отсечки волноводных мод E -типа (см. также (2.9)).

4. Плазменный волновод в отсутствие внешнего магнитного поля ($\Omega_e = 0$)

В пределе нулевого внешнего магнитного поля $\Omega_e = 0$ плазма становится изотропной. При этом имеем $g = 0$, $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} = 1 - \omega_p^2 / \omega^2 \equiv \epsilon$, а уравнения (1.9) расщепляются на независимые уравнения для электромагнитных волн E - и H -типов, соответственно

$$\Delta_{\perp} E_z - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\right) E_z = 0, \quad \Delta_{\perp} B_z - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\right) B_z = 0. \quad (4.1)$$

Помимо волн, определяемых уравнениями (4.1) и о которых идет речь ниже, в волноводе при $\Omega_e = 0$ имеются чисто продольные ленгмюровские волны с обычным спектром продольных волн холодной электронной плазмы

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_p^2. \quad (4.2)$$

Причем волны со спектром (4.2) существуют независимо от степени заполнения волновода плазмой. То, что спектр (4.2) действительно имеет место, проще всего видеть из уравнения (1.11) (или (1.12)) при $\Omega_e = 0$.

Возвращаясь к уравнениям (4.1), отметим, что в случае волновода полностью заполненного плазмой, их решения для волн E - и H -типов оказываются совершенно идентичными. Для волн E -типа имеем

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_p^2 + \frac{\mu'_{ls}}{R^2} c^2 + k_z^2 c^2, \\ E_z &= E_0 J_1 \left(\mu'_{ls} \frac{r}{R} \right), \quad B_z = 0,\end{aligned}\tag{4.3}$$

и — аналогично для волн H -типа:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_p^2 + \frac{\mu'^2_{ls}}{R^2} c^2 + k_z^2 c^2, \\ B_z &= B_0 J_1 \left(\mu'_{ls} \frac{r}{R} \right), \quad E_z = 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Это — совершенно обычные объемные электромагнитные волны, как в вакуумном волноводе, только сдвинутые по частоте вверх на ω_p . Других электромагнитных волн в пространственно-однородной изотропной плазме, как известно, нет.

Иная ситуация имеет место при неоднородном заполнении плазмой волновода. В этом случае появляются низкочастотные волны E -типа с фазовой скоростью, меньшей скорости света c . Существование данных волн полностью обусловлено наличием свободной поверхности плазмы: при удалении от поверхности плазмы поле их затухает в обе стороны, т. е. волны эти являются поверхностными.

Дисперсионное уравнение для спектров поверхностных волн получается в точности как и (2.4), а именно, общее решение первого уравнения (4.1) в областях $r < r_1$, $r > r_2$ следует подставить в граничные условия (1.18) и учесть (1.8). Мы здесь приведем это уравнение в важном для плазменной электроники длинноволновом пределе, когда оно имеет точное аналитическое решение. Противоположный предел будет рассмотрен в следующем пункте: При $k_z r_2 \ll 1$ дисперсионное уравнение, а точнее уже его решение, имеет вид

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k_z^2 c^2 \frac{\theta}{1 + \theta}, \\ \theta &= \lambda \ln \xi_2 \frac{I_1(\lambda) K_1(\lambda \xi_1) - K_1(\lambda) I_1(\lambda \xi_1)}{I_0(\lambda) K_1(\lambda \xi_1) + K_0(\lambda) I_1(\lambda \xi_1)},\end{aligned}\tag{4.5}$$

где $\lambda = \omega_p r_2 / c$ — отношение внешнего радиуса плазменной трубки к глубине проникновения электромагнитного поля в плазму, а остальные обозначения совпадают с введенными ранее.

Из (4.5) видно, что в случае плазменного цилиндра со свободной поверхностью ($\xi_2 \rightarrow \infty$) фазовая скорость волн (4.5) обращается в скорость света c . Напомним, что тоже имело место и в бесконечно сильном внешнем магнитном поле. Кроме того, чем плотнее плазма (больше λ), тем больше фазовая скорость волн (4.5). При $\xi_2 = 1$, когда внешний радиус плазмы совпадает с R , фазовая скорость обращается в ноль. Последнее означает исчезновение волны, поскольку отсутствует внешняя поверхность плазменного цилиндра, на которой эта волна локализована.

Также из формул (4.5) в предельном случае плотной, но тонкой плазмы, когда $\lambda \gg 1$ и $\lambda(1 - \xi_1) \ll 1$, следует спектр (3.9) и (3.10). Последний резуль-

тат очевиден. Поскольку $\lambda(1 - \xi_1) = \omega_p c / \Delta_p \ll 1$, то глубина проникновения поля в плазму много больше ее толщины. Значит, поле поверхностной волны в немагнитической плазме ведет себя как и поле кабельной волны в магнитической плазме. Дальнейший анализ формул (4.5) проводить нет смысла, поскольку они достаточно очевидны.

5. Потенциальное приближение ($\omega/k_z \ll c$)

Рассмотрение спектров потенциальных колебаний плазменных волноводов представляет интерес для некоторых проблем нерелятивистской плазменной электроники. Кроме того, оно позволяет без особых затруднений исследовать коротковолновую асимптотику волн в волноводах с плазменным заполнением. В потенциальном приближении в общих уравнениях теории плазменных волноводов следует выполнить предельный переход $c \rightarrow \infty$, а точнее, ограничиться нулевым приближением по параметру $\omega/k_z c$, который в коротковолновой области является малым.

После такого предельного перехода общие уравнения (1.9) расцепляются. Причем нетривиальные решения имеются только у уравнений для продольной компоненты электрического поля E_z . Внутри плазмы имеем (1.13) и (1.14)

$$E_z = A J_1(ak_z r) + B Y_1(ak_z r), \tag{5.1}$$

где A и B — произвольные постоянные, а

$$a^2 = -\epsilon_{11}/\epsilon_{\perp}. \tag{5.2}$$

В вакуумных областях волновода E_z выражается через функции Бесселя мнимого аргумента $I_1(k_z r)$ и $K_1(k_z r)$.

В зависимости от структуры продольной компоненты электрического поля внутри плазмы волны можно разделить на поверхностные и объемные. В вакуумных областях структура поля в потенциальном случае всегда соответствует поверхностной волне, поскольку дается, как уже было сказано, функциями мнимого аргумента. В плазме же все определяется знаком величины (5.2). При $a^2 > 0$ формула (5.1) верно отражает суть дела. При этом E_z при $r_1 < r < r_2$ имеет объемный, осциллирующий характер, а соответствующую волну следует отнести к классу объемных. Но при $a^2 < 0$ формулу (5.1) целесообразно переписать следующим образом

$$E_z = A I_1(\tilde{a}k_z r) + B K_1(\tilde{a}k_z r), \tag{5.3}$$

где $\tilde{a}^2 = -a^2 > 0$.

Поле со структурой (5.3) прижато к границам плазмы и убывает внутрь плазменного слоя. Поэтому соответствующую волну будем классифицировать как поверхностную. Заметим, что верны и (5.1), и (5.3) одновременно, а предпочтение определяется только соображениями удобства и наглядности.

Области частот, где возможно существование объемных потенциальных плазменных волн, определяются неравенством $a^2 > 0$, или

$$\frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \Omega_e^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_h^2)} < 0, \tag{5.4}$$

где $\omega_h = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega_e^2}$ — верхнегибридная частота. Неравенство (5.4) удобно переписать для двух случаев:

$$\text{при } \omega_p < \Omega_e : \quad 0 < \omega < \omega_p, \quad \Omega_e < \omega < \omega_h; \quad (5.5, a)$$

$$\text{при } \Omega_e < \omega_p : \quad 0 < \omega < \Omega_e, \quad \omega_p < \omega < \omega_h. \quad (5.5, b)$$

В иных частотных областях могут существовать только поверхностные волны. Отметим, что при $\omega > \omega_h$ никаких потенциальных поверхностных волн нет. Поэтому для возможного существования поверхностных волн имеется только частотная область между электронной циклотронной и плазменной частотами $\Omega_e < \omega < \omega_p$. Причем, при $\omega_p < \Omega_e$ поверхностных волн нет (см. ниже).

Начнем рассмотрение со случая волновода, полностью заполненного плазмой, когда поверхностных волн заведомо нет, так как отсутствуют свободные поверхности плазмы. Дисперсионное уравнение для этого случая получается путем подстановки (5.1) в граничные условия $|E_z(0)| < \infty$ и $E_z(R) = 0$ и имеет вид (точнее, это бесконечное число уравнений для спектров различных объемных мод):

$$k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) + \frac{\mu_{ls}^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \right) = 0, \quad (5.6)$$

где $s = 1, 2, \dots$, — номер моды.

При $\Omega_e = 0$ (5.6) имеет решения $\omega^2 = \omega_p^2$ и $\omega^2 = 0$.

Если не принимать во внимание экзотический случай $\omega_p = \Omega_e$, то можно записать два типа решений уравнения (5.6), описывающих асимптотику дисперсионных кривых при $k_z R \gg 1$:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\mu_{ls}^2}{k_z^2 R^2} \frac{\omega_p^2 \Omega_e^2}{\omega_p^2 - \Omega_e^2}, \quad (5.7, a)$$

$$\omega^2 = \Omega_e^2 + \frac{\mu_{ls}^2}{k_z^2 R^2} \frac{\omega_p^2 \Omega_e^2}{\Omega_e^2 - \omega_p^2}. \quad (5.7, b)$$

При $\Omega_e > \omega_p$ кривые, определяемые формулами (5.7, a), выходят на ω_p снизу, причем тем медленнее, чем больше номер моды s . Все эти кривые начинаются при $\omega = 0$; при $\Omega_e > \omega_p$ кривые, определяемые формулами (5.7, b), выходят на Ω_e сверху и снова тем медленнее, чем больше s . Все эти кривые начинаются с верхнегибридной частоты ω_h .

При $\Omega_e < \omega_p$ кривые, определяемые формулами (5.7, a), выходят на ω_p сверху, причем тем медленнее, чем больше номер моды s . Все эти кривые начинаются при $\omega = \omega_h$; при $\Omega_e < \omega_p$ кривые, определяемые формулами (5.7, b), выходят на Ω_e снизу и снова тем медленнее, чем больше s . Все эти кривые начинаются с частоты $\omega = 0$.

Оказывается, что формулы (5.7) и все, что о них было сказано, справедливы при любой форме заполнения волновода плазмой ($k_z R \gg 1$). Необходимо только подкорректировать величину μ_{ls}/R . Так, в случае волновода с частичным плазменным заполнением, когда $r_1 = 0$, $r_2 < R$, необходимо заменить $\mu_{ls}/R \rightarrow \mu_{ls}/r_2$. В случае волновода с тонкой трубчатой плазмой $r_2 - r_1 \ll r_1$

потребуется замена $\mu_{ls}/R \rightarrow \pi s/\Delta_p$. Это достаточно очевидно, поскольку при больших k_z поле вне плазмы резко убывает и любое заполнение эквивалентно полному.

При $\Omega_e < \omega_p$ и частичном заполнении волновода плазмой, кроме (5.7), существует еще одна ветвь плазменных колебаний — поверхностная, локализованная у свободной поверхности плазмы. А если плазма трубчатая с $r_1 \neq 0$ и $r_2 \neq R$, то поверхностных волн появляется две с локализацией у разных границ плазмы. Асимптотически, при больших k_z , дисперсионные кривые поверхностных волн выходят на значение

$$\omega(k_z \rightarrow \infty) = \frac{\omega_h}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + \Omega_e^2}}{\sqrt{2}}, \quad (5.8)$$

всегда находящееся между Ω_e и ω_p . При изменении Ω_e от нуля до ω_p предельная частота (5.8) изменяется от $\omega_p/\sqrt{2}$ до ω_p .

Для уточнения асимптотики (5.8) получим дисперсионное для спектров потенциальных волн в трубчатой плазме. Ограничимся случаем плазмы со свободной наружной поверхностью, т. е. $R \rightarrow \infty$. Дело в том, что в коротковолновой области при удалении от плазмы в вакуум на расстояние δ поле убывает как $\exp(-k_z\delta)$, а следовательно, влияние металлического кожуха мало (случай $r_2 = R$ сейчас не интересен, так как исключает существование поверхностной волны).

Используем, что при $r_1 < r < r_2$ решение уравнений поля имеет вид (5.3), при $0 < r < r_1$ $E_z = CI_1(k_z r)$, а при $r > r_2$ $E_z = DK_1(k_z r)$. Подставляя эти решения в граничные условия

$$\{E_z\}(r = r_{1,2}) = 0, \quad \left\{ \varepsilon_{\perp} \frac{dE_z}{dr} \right\}(r = r_{1,2}) = 0, \quad (5.9)$$

которые вытекают из общих соотношений (1.8) и (1.18), получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\varepsilon_{\perp} \tilde{a} I_{l+1}(\tilde{a} k_z r_2) + K I_l(\tilde{a} k_z r_2)}{\varepsilon_{\perp} \tilde{a} I_{l+1}(\tilde{a} k_z r_1) - \Pi I_l(\tilde{a} k_z r_1)} = - \frac{\varepsilon_{\perp} \tilde{a} K_{l+1}(\tilde{a} k_z r_2) - K K_l(\tilde{a} k_z r_2)}{\varepsilon_{\perp} \tilde{a} K_{l+1}(\tilde{a} k_z r_1) + I K_l(\tilde{a} k_z r_1)}, \quad (5.10)$$

$$K = \frac{K_{l+1}(k_z r_2)}{K_l(k_z r_2)}, \quad I = \frac{I_{l+1}(k_z r_1)}{I_l(k_z r_1)}.$$

Если вакуумная полость внутри плазмы отсутствует, т. е. $r_1 = 0$, то (5.10) переходит в следующее

$$\varepsilon_{\perp} \tilde{a} \frac{I_{l+1}(\tilde{a} k_z r_2)}{I_l(\tilde{a} k_z r_2)} + K = 0. \quad (5.11)$$

При анализе уравнений (5.10) и (5.11) ограничимся симметричным случаем $l = 0$. Начнем с уравнения (5.11). Если положить $\Omega_e = 0$ (поверхностная волна при этом остается), то решение (5.11) записывается в явном виде

$$\omega = \omega_p \left(1 + \frac{K_1(k_z r_2) I_0(k_z r_2)}{K_0(k_z r_2) I_1(k_z r_2)} \right)^{-1/2}. \quad (5.12)$$

Таким образом уравнение (5.11) при $\Omega_e = 0$ имеет единственное решение, а, значит, при отсутствии в плазме полости ($r_1 = 0$) существует единственная

поверхностная волна со спектром (5.12). При $k_z \rightarrow \infty$ частота (5.12) стремится к $\omega_p/\sqrt{2}$ снизу. Качественно такая картина сохраняется и при $\Omega_e \neq 0$ (но меньше ω_p): имеется единственная поверхностная волна, частота которой стремится к (5.8) снизу.

Заметим, что при $k_z \rightarrow 0$ из (5.12) следует $\omega \rightarrow 0$, но $\omega/k_z \rightarrow \infty$. Последнее — есть следствие недостаточности потенциального приближения. Ранее поверхностная волна в цилиндре со свободной поверхностью в пределе $k_z \rightarrow 0$ уже рассматривалась в непотенциальном приближении (см. (4.5)). Там, как это и должно быть, максимальная фазовая скорость оказалась не большей c . Спектр (5.12) продолжает длинноволновый спектр (4.5) в коротковолновую область.

Анализ общего уравнения (5.10) с $r_1 \neq 0$ приводит к нахождению новой поверхностной волны. В коротковолновом пределе уравнение (5.10) сводится к следующему:

$$(\epsilon_{\perp} \tilde{a} + 1)^2 = (\epsilon_{\perp} \tilde{a} - 1)^2 \exp(-2\tilde{a}k_z \Delta_p), \quad (5.13)$$

где $\Delta_p = r_2 - r_1$ — толщина плазменной трубки.

Полагая $\Omega_e = 0$, находим из (5.13) спектры двух поверхностных волн

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left(1 \pm \frac{1}{2} \exp(-2k_z \Delta_p) \right). \quad (5.14)$$

Спектр со знаком "минус" соответствует (5.12). Он продолжает в коротковолновую область зависимость (4.5), пригодную при малых k_z . Этот спектр соответствует поверхностной волне, локализованной преимущественно на внешней границе плазмы $r = r_2$.

Спектр (5.14) со знаком "плюс" является новым. Он соответствует поверхностной волне, локализованной преимущественно у внутренней границы плазменной трубки $r = r_1$. Частота этой волны выходит на $\omega_p/\sqrt{2}$ сверху, а при малых k_z она стремится к ω_p . Ранее мы длинноволновое продолжение спектра (5.14) со знаком "плюс" не рассматривали.

Такая же ситуация сохраняется и при $\Omega_e \neq 0$ (но меньше ω_p). Из (5.13) получаем спектры двух поверхностных волн

$$\omega = \frac{\omega_h}{\sqrt{2}} \left[1 \pm \frac{\omega_p^2 - \Omega_e^2}{2\omega_p^2} \exp\left(-2k_z \frac{(\omega_p^2 - \Omega_e^2)^2}{\omega_h^4} \Delta_p\right) \right]. \quad (5.15)$$

При больших k_z обе частоты (5.15) стремятся к (5.8) — одна снизу, а другая — сверху.

Рассмотрим некоторые иллюстрации проведенного теоретического исследования. На рис. 6, а представлены дисперсионные кривые потенциальных колебаний волновода полностью заполненного плазмой при $\Omega_e < \omega_p$ ($R = 3$ см, $\Omega_e = 7 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). В коротковолновом пределе эти кривые описываются формулами (5.7). Причем, поскольку $\Omega_e < \omega_p$, то нижняя группа кривых на рис. 6, а описывается формулами (5.7,б), а верхняя — формулами (5.7,а). Поясним, что на этом и следующих рис. 6, б—ж изображены дисперсионные кривые только первых радиальных мод (чаще всего с $s = 1, 2, 3$). В нижней группе кривых чем больше s , тем ниже расположена кривая. Но все эти кривые лежат выше линии $\omega = 0$. В верхней группе кривых чем больше s , тем выше расположена кривая, но все они лежат ниже прямой $\omega = \omega_h$ (показана на рис. 6, а—ж мелким пунктиром).

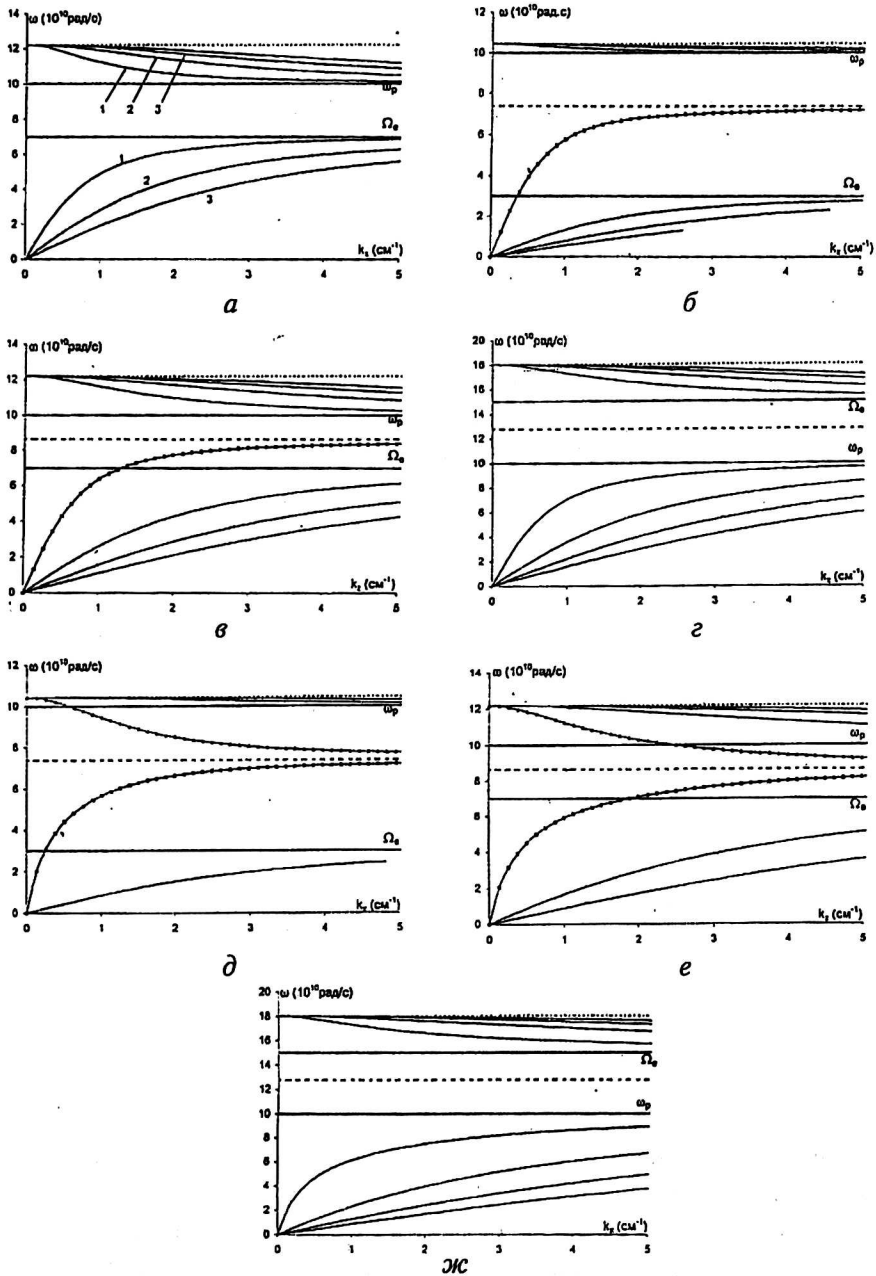


Рис. 6. Дисперсионные кривые потенциальных колебаний плазменного волновода при:

- а — $r_1 = 0, r_2 = R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 7 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$;
- б — $r_1 = 0, r_2 = 2 \text{ см}, R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 3 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$;
- в — $r_1 = 0, r_2 = 2 \text{ см}, R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 7 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$;
- г — $r_1 = 0, r_2 = 2 \text{ см}, R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 15 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$;
- д — $r_1 = 1 \text{ см}, r_2 = 2 \text{ см}, R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 3 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$;
- е — $r_1 = 1 \text{ см}, r_2 = 2 \text{ см}, R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 7 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$;
- ж — $r_1 = 1 \text{ см}, r_2 = 2 \text{ см}, R = 3 \text{ см}, \Omega_e = 15 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}, \omega_p = 10 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$

При выполнении обратного неравенства $\Omega_e > \omega_p$ (см. рис. 6, а), по крайней мере, визуально не изменится, поменяются местами только линии $\omega = \omega_p$ и $\omega = \Omega_e$. Кроме того, нижняя группа кривых будет описываться формулами (5.7,а) а верхняя — формулами (5.7,б).

При $k_z \rightarrow 0$ кривые на рис. 6, а выходят на верхнегибридную или нулевую частоту. Это в целом сохраняется и при учете непотенциальных эффектов. Однако ход дисперсионных кривых при малых k_z в непотенциальном случае, конечно, отличается от показанного на рис. 6, а.

На рис. 6, б—г представлены дисперсионные кривые потенциального приближения для плазменного столба с $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ см и $R = 3$ см. Рис. 6, б относится к случаю $\Omega_e < \omega_p$ ($\Omega_e = 3 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). Здесь, помимо двух групп объемных волн типа представленных на рис. 6, а, появилась поверхностная волна, выходящая на частоту (5.8) снизу. На рис. 6, б дисперсионная кривая этой поверхностной волны показана линией с квадратной маркировкой, а прямая $\omega = \omega_h / \sqrt{2}$ изображена жирным пунктиром. Конечно, поверхностной данная волна является только при $\omega > \Omega_e$, при переходе через Ω_e к меньшим частотам она превращается в объемную.

В случае, представленном на рис. 6, в, по-прежнему $\Omega_e < \omega_p$, но теперь Ω_e существенно больше ($\Omega_e = 7 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). Поверхностная волна сохранилась и в этом случае, но зона ее существования сузилась. Зато расширилась область объемных волн, типа представленных на рис. 6, а. Вообще, чем меньше Ω_e , тем обособленнее поверхностная волна и меньше общее число низкочастотных волн.

На рис. 6, г представлены кривые для случая $\Omega_e > \omega_p$ ($\Omega_e = 15 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). Видно, что на частоту (5.8) не выходит ни одна кривая. Следовательно, поверхностная волна исчезла, а остались только объемные, которые хорошо описываются формулами (5.7) с заменой R на r_2 .

На рис. 6, д—ж представлены дисперсионные кривые потенциального приближения для трубчатой плазмы с $r_1 = 1$ см, $r_2 = 2$ см и $R = 3$ см. Рис. 6, д относится к случаю $\Omega_e < \omega_p$ ($\Omega_e = 3 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). Здесь, помимо двух групп объемных волн типа представленных на рис. 6, а, и поверхностной волны типа представленной на рис. 6, б, появилась вторая поверхностная волна, выходящая на частоту (5.8) сверху. На рис. 6, д дисперсионная кривая этой поверхностной волны показана линией с треугольной маркировкой. Конечно, поверхностной данная волна является только при $\omega < \omega_p$, при переходе через ω_p к большим частотам она превращается в объемную.

В случае на рис. 6, е по-прежнему $\Omega_e < \omega_p$, но теперь Ω_e существенно больше ($\Omega_e = 7 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). Обе поверхностные волны сохранились и в этом случае, но зона их существования сузилась при соответствующем расширении области объемных волн. Коротковолновая асимптотика поверхностных волн с рис. 6, д, е дается формулами (5.15).

И наконец, на рис. 6, ж представлены дисперсионные кривые для случая $\Omega_e > \omega_p$ ($\Omega_e = 15 \cdot 10^{10}$ рад/с, $\omega_p = 10 \cdot 10^{10}$ рад/с). Видно, что обе поверхностные

волны исчезли. Остались только объемные волны, которые хорошо описываются формулами (5.7) с заменой μ_{ls}/R на $\pi s/(r_2 - r_1)$.

Л и т е р а т у р а

1. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988.
2. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Атомиздат, 1976.
3. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.
4. Аронов Б. И., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. //ЖТФ, 1973. Т. 43. № 4. С. 716; № 12. С. 2493.
5. Кузелев М. В., Романов Р. В., Селиванов И. А., Федотов А. В., Шкварунец А. Г.: Тр. ИОФАН, 1999. Т. 45. С. 17.
6. Кузелев М. В., Лаперовская Е. В., Рухадзе А. А. //Физика плазмы. 1978. Т. 4. № 3. С. 433.

Electromagnetic waves in plasma waveguide. Part I

M. V. Kuzelev, R. V. Romanov, A. A. Rukhadze
Institute of General Physics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The review proposed here is devoted to detailed description of electromagnetic radiation spectra in waveguides with plasma filling. Both volume and surface waves are considered. The surface waves can exist only under conditions of waveguide incomplete filling by plasma. Particular attention has been given to slow waves, with emphasis on its spatial structure, phase and group velocities. Exactly these waves are excited frequently by rectilinear relativistic electron beams in the plasma waveguides due to the effect of stimulated Cerenkov radiation or interaction between these plasma waves and Langmuir oscillations of electron beam itself. That is why the last section of review considers the waves in electron beam.