УДК 620.179.14

Контроль неоднородности структуры сварного шва вихретоковым методом. Часть II

В. Г. Герасимов, А. А. Переверзев, Л. А. Чернов
Московский энергетический институт (Технический университет), Москва, Россия

Проведено решение обратной задачи вихретокового контроля с использованием алгоритма Чебышевской минимизации и методов нелинейного программирования.

Решение обратной задачи

Алгоритм Чебышевской минимизации функционалов

Опишем алгоритм Чебышевской минимизации с использованием методов нелинейного программирования, следуя в основном [1, 2], в терминах нашей постановки задачи.

Минимизировав отклонения измеренных $\dot{U}'_i$ и вычисленных U_i для N комплексных значений вносимого напряжения (i = 1, ..., N) при ограниченных на M параметров минимизации узловых значений распределения электропроводности σ_k(k =1, ..., M), формулировка задачи в терминах Чебышевской минимизации запишется следующим образом:

найти минимум функционала Ф

$$\Phi = \max | \dot{U}_i' - \dot{U}_i |, \; i = 1, ..., N, \tag{1}$$

зависящего от параметров σ_k, при заданных ограничениях

$$\sigma_k^{\min} \le \sigma_k \le \sigma_k^{\max}, \; k = 1,\ldots, M. \tag{2}$$

Критерий (1), являющийся функцией узловых значений ЭП, указывает максимальное (по модулю) отклонение вычисленных параметров U_i от известных $\dot{U}_i^!$ из всех сравниваемых в (1) значений. Следовательно, минимизация (1) автоматически обеспечивает минимум отклонений всех измеренных и рассчитанных комплексных значений вносимого напряжения.

В основу алгоритма решения оптимизационной задачи минимизации (1) при линейных ограничениях (2) положена схема поиска экстремума методом спуска [3].

Этап 1. Выбор нулевого приближения в начале расчета (для начального количества узлов) обычно не должен вызывать затруднений. Формально алгоритмы гарантируют сходимость к экстремуму при любом начальном профиле радиальной зависимости ЭП. В то же время для сокращения необходимого для минимизации (1) числа итераций и, следовательно объема вычислений желательно выбирать начальное приближение возможно ближе к искомому распределению, использовав для этого предыдущий опыт расчетов подобных задач.

При повышении степени аппроксимации (количества узлов сплайна) начальное приближение в новых узлах вычисляется из сплайна, построенного по полученному решению на предыдущем этапе. Одновременно дополнительный положительный эффект можно получить за счет сужения ограничения (стягивания) около полученного начального приближения. Степень сужения можно регулировать программным путем, управляя предусмотренным для этого в исходных данных коэффициентом.

Этап 2. Операция приближения вектора $\vec{D}^m$ — наилучшего направления изменения вектора решения $\vec{\sigma}^m$ при стремлении критерия Ф в (1) к минимуму обусловлена нелинейной зависимостью от $\vec{\sigma}^m$. Точный анализ этой функции затруднен, поэтому в окрестности исследуемой точки σ она заменяется линеаризацией Ф′ простого вида, полученной численным разложением в ряд Тейлора с использованием только первых производных

$$\Phi' = \max\left| \dot{U}_i^m(\vec{\sigma}^m) - \dot{U}_i^e + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \dot{U}_j(\vec{\sigma}^m)}{\partial \sigma_j^T} (\sigma_j^T - \sigma_j^m) \right| \tag{3}$$

где $\sigma^T{}_j$ — текущее значение j-го узла при поиске экстремума Ф′.

Замена дифференциалов в (3) конечными приращениями сводит расчет коэффициентов разложения к линейному численному анализу. Для определения компонент вектора необходимо минимизировать (3) при исходных ограничениях (2). Эти ограничения сказываются в том, что оптимальное движение к минимуму Ф′ может не совпадать с направлением его градиента. Решение задачи требует применения специальных алгоритмов, учитывающих присутствие ограничений на переменные.

Предположим, что на m-м цикле вычислений выполняется равенство

$$\Phi'(\vec{\sigma}^m = \left| \dot{U}_p(\vec{\sigma}^m) - \dot{U}_p^e + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \dot{U}_j(\vec{\sigma}^m)}{\partial \sigma_j^T} (\sigma_j^T - \sigma_j^m) \right| \le y, \tag{4}$$

где $y \ge 0$ — текущее значение Φ' при $\sigma_j^T = \sigma_j^m$.

Так как значение Φ' равно абсолютному отклонению от заданного контролируемого параметра с номером $i = p$, то для всех остальных параметров одновременно должны выполняться N неравенств вида

$$\dot{U}_i(\vec{\sigma}^m) - \dot{U}_i^e + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \dot{U}_j(\vec{\sigma}^m)}{\partial \sigma_j^T} (\sigma_j^T - \sigma_j^m) \le y \tag{5}$$

и N неравенств вида

$$-\dot{U}_i(\vec{\sigma}^m) + \dot{U}_i^e + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \dot{U}_j(\vec{\sigma}^m)}{\partial \sigma_j^T} (\sigma_j^T - \sigma_j^m) \le y. \tag{6}$$

Если рассматривать функцию y, определенную в (4), как параметр минимизации, а неравенства (5), (6) и (2) — как ограничения на переменные σ_j, то минимум параметра y обеспечит и минимум Φ'. Для минимизации y применяется линейный симплекс-метод [9].

Предварительно проведем ряд преобразований. Введем обозначения:

$$\begin{cases} b_i = \dot{U}_i^e - \dot{U}_i(\vec{\sigma}^m) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \dot{U}_i(\vec{\sigma}^m)}{\partial \sigma_j^T} \sigma_j^m \\ a_{ij}^m = \frac{\partial \dot{U}_i(\vec{\sigma}^m)}{\partial \sigma_j^T}, \end{cases} \tag{7}$$

тогда система неравенств (2), (5), (6) примет вид

$$\left.\begin{array}{l} -y + \sum_{j=1}^{M} a_{ij}^m \sigma_j^T \le b_i^m \\ -y - \sum_{j=1}^{M} a_{ij}^m \sigma_j^T \le -b_i^m \\ a_j^{\min} \le \sigma_j \le \sigma_j^{\max} \end{array}\right\}, \tag{8}$$

где $i = 1, ..., N$; $j = 1, ..., M$.

Определение минимума параметра y является линейной задачей. Наиболее экономичные и простые алгоритмы решения подобных задач строятся при условии, что переменные минимизации σ_j неотрицательны. Согласно (8) это условие выполнено. Автоматический учет в алгоритме поиска параметра y неотрицательности σ_j позволяет исключить неравенство $\sigma_j^{\min} \le \sigma_j$ в (8), ограничивающих σ_j снизу путем замены переменных

$$z_j = \sigma_j - \sigma_j^{\min}. \tag{9}$$

Подставим (9) в (8). После перегруппировки членов получим новую систему неравенств:

$$\left.\begin{aligned}
&-y+\sum_{j=1}^{M} a_{ij}^{m} z_j \le b_i^m - \sum_{j=1}^{M} a_{ij}^{m}\sigma_j^{\min},\\
&-y-\sum_{j=1}^{M} a_{ij}^{m} z_j \le b_i^m + \sum_{j=1}^{M} a_{ij}^{m}\sigma_j^{\min},\\
&z_j \le \sigma_j^{\max}-\sigma_j^{\max},\\
&z_j \ge 0,
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

где $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, M$.

Некоторые неудобства для применения стандартных методов решения подобных задач представляет присутствие в системе неравенств параметра y.

Исключим y из первых двух N неравенств (10), кроме неравенства с номером $i = p$, которое является определением функции y. Для этого выполним следующие преобразования системы (10). Умножим все элементы этой строки на (-1). Первые две N-строки, кроме p-й, сложим почленно со строкой с номером $i = p$ и сгруппируем члены при одинаковых z_j. Преобразованная система не будет содержать параметр оптимизации y нигде, кроме строки с номером $i = p$. Чтобы было возможно применить линейный симплекс-метод, приведем преобразованную систему неравенств (10) к стандартному виду. Для этого, в соответствии со стандартным подходом, запишем все неравенства в виде равенств, где в левой части добавлена неотрицательная переменная U_i, $i = 1 \ldots p-1, p+1 \ldots 2\cdot N + M$.

Функции дополнительной переменной в строке с номером $i = p$ выполняет параметр y. Полученную систему уравнений представим в матричном виде

$$\mathrm{A}\vec{z} = \vec{B}, \tag{11}$$

где искомый вектор-столбец из $2(N + M) + 1$ элементов $\vec{z}$ есть $\vec{z} = (y, z_1 \ldots z_m, U_1 \ldots U_{2N+M})^{\mathrm{T}}$; B — правая часть уравнений, полученная после преобразования неравенств (10).

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} & \phantom{a_{11}-a_{p1}} & & \phantom{a_{1M}-a_{pM}} & \multicolumn{4}{c}{\longleftarrow N \longrightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\longleftarrow N \longrightarrow} & \multicolumn{3}{c}{\longleftarrow M \longrightarrow} \end{array} \\
\mathrm{A} = & \begin{pmatrix}
0 & a_{11}-a_{p1} & \ldots & a_{1M}-a_{pM} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
1 & -a_{p1} & \ldots & -a_{pM} & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & a_{N1}-a_{p1} & \ldots & a_{NM}-a_{pM} & 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & -a_{11}-a_{p1} & \ldots & -a_{1M}-a_{pM} & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & a_{11}-a_{p1} & \ldots & a_{1M}-a_{pM} & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

В системе линейных алгебраических уравнений (11) параметр минимизации y определен строкой с номером p, которую в дальнейшем будем называть базовой. В алгоритме линейного симплекс-метода можно условно выделить четыре основные операции:

1. Выбор начального базиса — допустимого решения (11). В нашем случае базис должен состоять из $(2N+M)$-переменных. Удобно задать начальный базис, присвоив дополнительным переменным $\dot{U}_1, \ldots, \dot{U}_{2N+M}$ значения правых частей тех строк, в которых коэффициент матрицы А при них равен +1.

Начальное значение параметров минимизации y равно значению правой части базовой строки. Все остальные компоненты искомого вектора z принимаются равными нулю.

2. Определение переменной, которая должна войти в очередной пробный базис. Для этого проводится анализ базовой строки p матрицы А. Из всех положительных элементов строки p, не являющихся коэффициентами при базисных переменных, выбирается элемент с наибольшим значением. Переменная, у которой этот элемент является коэффициентом, должна войти в очередной пробный базис, т. е. за новую базисную переменную принимается та, которая имеет наибольший вес в функции y. Если в базовой строке p нет базисных переменных с положительными коэффициентами, то в силу неотрицательности элементов $\vec{z}$ следует сделать вывод, что оптимальному решению, т. е. минимуму y соответствует выбранный ранее базис. Вычисления завершаются также и при запрете изменения переменных по ограничениям.

3. Определение максимальной допустимой величины новой базисной переменной, не выходящей за пределы имеющихся ограничений. Вычисляются отношения значения правых частей (11) к соответствующим значениям коэффициентов при новой базисной переменной во всех строках, кроме базовой. При этом не рассматриваются отношения, в которых знаменатель равен нулю или отрицателен, т. е. при положительной правой части подобные случаи соответствуют бесконечным значениям переменных. Определяется номер строки q, где это отношение наименьшее. Новый базисной переменной присваивается значение отношения в строке q. Переменная, входившая в прежний базис и определяющаяся строкой q, исключается из базиса и приравнивается нулю. Если во всех строках, кроме базовой, коэффициенты при новой переменной равны нулю или отрицательны, то в силу неотрицательности элементов $\vec{z}$ и ограничения базиса $(2N+M)$-переменными следует признать, что эта переменная не может на данном шаге вычислений войти в базис. В этом случае необходимо вернуться к операции 2, не рассматривая запрещенную переменную.

4. Преобразование системы (11) таким образом, чтобы в строке q коэффициент при вновь введенном параметре был равен 1, а в остальных строках — 0. Это достигается путем линейных преобразований равенств, входящих в (11). Так как коэффициенты при параметрах, входящих в новое пробное базисное решение, становятся равными 1 и в каждую строку входит только один базисный параметр, то значение нового базиса определяется правой частью уравнений.

Рассмотренный алгоритм линейного симплекс-метода отличается высокой экономичностью и обладает хорошей сходимостью.

Предположим минимум y наблюдается в точке, характеризуемой вектором $\vec{\sigma}_1^m$. Тогда наилучшее направление изменения переменных при стремлении $\Phi(\vec{\sigma})$ к минимуму дает вектор $\vec{D}^m = \vec{\sigma}_1^m - \vec{\sigma}^m$.

Этап 3. Выбор оптимальной длины шага приращения компонент вектора $\vec{\sigma}_1^m$ осложняется тем, что пробный вектор $\vec{\sigma}_1^m$ может значительно отличаться от вектора $\vec{\sigma}_1^m$, полученного на предыдущей m-й итерации, и принятая аппроксимация истинной функции Ф окажется грубой. Однако ввиду непрерывности $\Phi(\vec{\sigma})$ и ее частных производных существует допустимый по ограничениям вектор.

$$\vec{\sigma}^{m+1} = \vec{\sigma}^m + t_m \vec{D}^m, \tag{12}$$

где $t^m \in [0,1]$ — обеспечивает выполнение условия $\Phi(\vec{\sigma}^{m+}) \le \Phi(\vec{\sigma}^m)$.

Для определения оптимальной длины приращения необходимо решить вспомогательную оптимизационную задачу, т. е. минимизировать $\Phi(\vec{\sigma}^{m+})$ как функцию одной переменной t_m при ограничениях на $t^m \in [0,1]$.

Алгоритмы поиска экстремума функции одной переменной хорошо разработаны и могут быть применены для решения поставленной задачи.

Определенную трудность в реализации стандартных методов вызывает отсутствие явного выражения для истинной функции $\Phi(\vec{\sigma})$, поэтому необходимо для каждого промежуточного значения σ проводить полный расчет контролируемых параметров. С учетом особенностей задачи для поиска оптимальной длины приращения t_m выбран метод "золотого сечения", который не требует вычисления производных минимизируемой функции, что в нашем случае особенно важно для сокращения числа обращений к полному расчету контролируемых параметров.

Полный алгоритм решения обратной задачи образован схемой Чебышевской минимизации (составляющей основу алгоритма), обрамленной внешним итерационным циклом.

Хотя Чебышевская минимизация использует наиболее жесткие условия минимума, вследствие изначальной некорректности задачи, ей также свойственно проявление (хотя и в более мягкой форме, чем для обыкновенно используемых подходов) численной неустойчивости. Это проявляется в том, что с ростом числа варьируемых параметров (что естественно при попытках получить решение для сложной формы зависимости ЭП) растет и чувствительность метода к параметрам расчета: начальному приближению, ограничениям, числовым параметрам модели.

Для решения обратных задач с достаточно большим числом узлов организуются внешние итерации, реализующие постепенное нарастание количества узлов от одного, соответствующего аппроксимации постоянной $\sigma(R)$ = const, до заданного количества. Как уже указывалось ранее, начальные приближения для нового количества узлов вычисляются через сплайн-интерполяцию по предыдущему количеству узлов.

Была разработана программа, реализующая изложенный алгоритм. Путем решения модельных задач определялась погрешность аппроксимации в зависимости от:

диапазона частот возбуждения;

вида используемой зависимости ЭП от радиуса;

аппаратной погрешности измерения вносимого напряжения U';

числа параметров (узлов) аппроксимации.

Дальнейший анализ возможностей и ограничений работы программы планируется изложить в отдельной статье. Здесь лишь отметим, что погрешнось работы программы возрастает от (0,3—0,5) % (при нулевой погрешности исходных данных) до (8—10) % при 5 %-ной погрешности исходных дынных.

Литература

1. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и Н. Смиган. — М.: Наука, 1979. С. 523.

2. *Косов А. С., Мелихов В. О.* Исследование операций. Ч. I. — М.: Изд-во МТУСИ, 1996. С. 132.

3. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы решения инженерных задач. — М.: Изд-во МЭИ, 1992. С. 118.

Eddy current impure composition testing of weld.
Part II

V. G. Gerasimov, A. A. Pereverzev, L. A. Chernov
Moscow Power Engineering Institute (Technical University), Moscow, Russia

The paper describe calculation methods of eddy current tasks using Chebishev minimisation and non-linear programming.