УДК 551.515.3

К вопросу о формировании и геометрических характеристиках смерча. Часть II

У. Юсупалиев, Е. П. Анисимова, А. К. Маслов, С. А. Шутеев
Московский государственный университет, Москва, Россия

В серии работ, объединенных одним названием, смерч рассматривается как центральное ядро торнадо-циклона, который возникает в конвективной ячейке грозового облака под действием вертикального сдвига ветра в условиях неустойчивой стратификации нижнего слоя тропосферы. Торнадо-циклон рассматривается как квазидвумерная структура. Во второй части исследованы воздушные потоки в экмановском слое торнадо-циклона и влияние вязкости на ширину зоны восходящего потока в смерче. Обобщение на случай тензорной вязкости формул квазидвумерного приближения позволило объяснить ряд результатов эксперимента и натурных измерений. Методом размерностей получена качественная зависимость радиуса смерча от интенсивности вращения в вязкой среде, обосновывающая возможность роста частоты вращения смерча с увеличением его радиуса.

В первой части работы [1] приведен краткий обзор данных натурных наблюдений за смерчами и перечислены основные теоретические подходы к проблеме взаимодействия физических процессов в смерче, сделаны оценки, доказывающие недостаточность скрытой теплоты конденсации для энергетического обеспечения торнадо-подобного вихря, что согласуется с выводами работы [2]. Предложена качественная модель взаимодействия физических процессов в торнадо-циклоне, приводящая к интенсификации вращения в его приосевой области, что при определенных условиях может привести к возникновению смерча. Отмечена роль торцевого эффекта в окончательном оформлении смерча [3]. Торнадо-циклон рассматривается как необходимое условие возникновения и самоподдержания смерча [4—6]. В приближении "линейного годографа" [4, 5] и простой модели для вязкости [7] исследована роль вертикального сдвига ветра на интенсификацию вращения в конвективных структурах [4, 7]. Сделан вывод, что неоднородность внешнего потока является одним из основных (наряду со скрытой теплотой конденсации) источником энергии смерча.

Настоящая работа посвящена исследованию потоков воздуха в зоне втока смерча, высота которой отождествляется с толщиной экмановского слоя [7, 8], возникающего в результате вращения торнадо-циклона. Процессы в зоне втока считаются определяющими для геометрических характеристик зоны разрушения. Торнадо-циклон полагается осесимметричным.

Потоки в торнадо-циклоне будем описывать в приближении турбулентной вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим систему, состоящую из стационарного уравнения Навье-Стокса для атмосферных потоков [8] и уравнения несжимаемости, учитывающего осевую симметрию:

$$(v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + g + \nu_{\parallel}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \nu_{\perp}\Delta_2 v; \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\,V \equiv \frac{1}{r}(ru)' + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (2)$$

где ρ = const — плотность жидкости;

p — давление;

g — ускорение свободного падения;

$\nu_{||}$ и $\nu_{\perp}$ — вертикальное и горизонтальное значения атмосферной вязкости, соответственно;

Δ_2 — оператор Лапласа в плоскости (r, φ);

u, v, w — радиальная, азимутальная и вертикальная компоненты скорости ν, соответственно;

штрихом обозначена производная по r.

Допустим, что $\nu_{||} \sim 10$ м^2/с, $\nu_{\perp} \sim 10^4$ м^2/с (компромиссное значение [8—10]) и, согласно [1, 11] характерный радиус торнадо-циклона L составляет $\sim 10^4$ м, характерная высота торнадо-циклона — $H \sim 10^3$ м. Заменяя производные отношениями характерных величин, из соображений масштаба [12] получим:

из азимутальной компоненты (1)

$$U \sim \frac{\nu_{\perp}}{L} \sim 1 \text{ м/с}, \tag{3}$$

из выражения (2)

$$W \sim \frac{H}{L} U \sim 0{,}1 \text{ м/с}, \tag{4}$$

где U и W — характерные значения радиальной и вертикальной компонент скорости, и из радиальной компоненты (1), учитывая [11], что характерная азимутальная скорость

$$V \sim 20 \text{ м/с} >> U, \tag{5}$$

получаем, что

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{V^2}{r}. \tag{6}$$

Под знаком "~" в (3), (4) понимается совпадение порядка величины, а под знаком равенства в (5) — равенство с точностью до членов порядка $\left(\frac{U}{V}\right)^2$.

Оценки (3) — (5) действуют в области, занятой торнадо-циклоном, выше экмановского слоя (вязкого погранслоя между поверхностью земли и вращающимся торнадо-циклоном [13]). Потоки в пределах экмановского слоя, возникающие в результате торцевого эффекта [3], будем описывать в системе координат, локально вращающейся вокруг оси торнадо-циклона с угловой скоростью $\Omega(r) = \frac{V(r)}{r}$, где $V(r)$ — азимутальная скорость потока в торнадо-циклоне. Мы можем это делать, так как L много больше толщины экмановского слоя [8, 13] $\delta_E = \sqrt{\frac{\nu_{||}}{\Omega}}$.

Стационарное уравнение Навье-Стокса в этой системе отсчета примет вид:

$$(\nu\nabla)\nu + 2\Omega \times \nu = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \Omega \times \Omega \times r + g + \nu_{||} \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \nu_{\perp}\Delta_2 \nu. \tag{7}$$

Число Россби $R_0 = \frac{U_0}{\Omega L}$ (отношение силы Кориолиса к инерционному члену в (7)), где U_0 — характерная скорость жидкости относительно локаль-

ной системы отчета, вращающейся с угловой скоростью Ω, очевидно, мало ($U_0 \sim V$, Ω вблизи смерча $\sim \frac{V}{R}$, где $R \sim 200$ м [6] — радиус смерча, порядка 10^{-1} с$^{-1}$). Горизонтальное число Экмана (отношение горизонтальной силы вязкости к силе Кориолиса) $Э_\perp = \frac{\nu}{\Omega L^2} \sim 10^{-2}$. Вертикальное число Экмана $Э_\parallel$ в пределах экмановского слоя определяется не вертикальными размерами смерча, а толщиной слоя $\delta = \sqrt{\frac{\nu_\parallel}{\Omega}} \sim 10$ м. Поскольку радиальная скорость в пределах экмановского слоя превосходит среднюю, а вертикальная скорость непрерывна, на основании оценки (4) пренебрежем вертикальным потоком в сравнении с горизонтальным. Из (6) очевидно, что радиальный градиент давления компенсируется центробежным членом (7). Таким образом, для скорости в экмановском слое из (7) с учетом (6) получаем краевую задачу:

$$
\begin{gathered}
-2\Omega(r)v_0 = \nu_\parallel \frac{\partial'' u}{\partial z^2}, \\
2\Omega(r)u = \nu_\parallel \frac{\partial'' v_0}{\partial z^2}, \\
u(r,0) = 0, v_0(r,0) = -\Omega(r)r, \\
u(r,z) \to 0,\ v_0(r,z) \to 0,\ z \to \infty.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Здесь v_0 — азимутальная компонента скорости относительно локальной системы отсчета. Первое граничное условие выражает собой условия прилипания и непротекания на поверхности земли. Под стремлением вертикальной координаты в бесконечность во втором граничном условии понимается достижение высот, больших в сравнении с δ_E, но малых в сравнении с H. На основании (5) мы пренебрегаем на этой высоте радиальной скоростью в сравнении с азимутальной. Отметим, что r входит в уравнения и граничные условия только как параметр.

Решение (8) хорошо известно [8, 14]:

$$
\begin{aligned}
v(r,z) &= -V(r)\exp(-z/\delta_E)\cos(z/\delta_E), \\
u(r,z) &= -V(r)\exp(-z/\delta_E)\sin(z/\delta_E).
\end{aligned}
$$

Сравнивая поток воздуха, поступающий в зону восходящего потока смерча благодаря торцевому эффекту,

$$
Q_E = -2\pi R\int_0^\infty u(R,z)dz = \pi R\delta_E V(R) \sim \pi R\delta_E V,
$$

и радиальный поток, получаемый на основании оценки (4)

$$
Q_H = 2\pi RHU,
$$

получаем, что хотя отношение $\delta_E/H \sim 10^{-2}$, благодаря торцевому эффекту в смерч поступает $\frac{\delta_E V}{2HU} \sim 0{,}1$ воздуха.

Уравнение для вертикальной компоненты завихренности ζ, усредненной по высоте экмановского слоя в приближении квазидвумерности [15, 16] для торнадо-циклона, допускает естественное обобщение в терминах концепции тензорной атмосферной вязкости

$$u\zeta' = \frac{\nu_\perp}{r}(r\zeta')' - \lambda\zeta. \qquad (9)$$

Здесь λ — коэффициент рэлеевского трения, равный для экмановского слоя $\nu_\parallel / H\delta_E$. Штрихом обозначена производная по r.

Пренебрегая восходящим потоком, из уравнения несжимаемости получаем, что при $r > R$

$$u = -\frac{C}{r}, \qquad (10)$$

где C — константа, независящая от r.

Заменой $\zeta = r^{-b/2}Y(r)$, где $b = \frac{C}{\nu}$, уравнение (9) с учетом (10) сводится к уравнению для модифицированных функций Бесселя (см. [17], 2.162(9)). Полагая, что ζ стремится на бесконечности к нулю, получаем, что при $r > R$

$$\zeta(r) = Br^{-\frac{b}{2}}K^{-\frac{b}{2}}(qr).$$

Здесь $q = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu_\perp}}$; B — константа; $K_\mu(z)$ — функция Макдональда порядка μ, действительная и положительная при $\mu > -1$ [18]. Отсюда можно сделать вывод, что $0 < C < 2\nu_\perp$. Для более точного определения C привлечем экспериментальные факты из [19—21], формально относящиеся к тропическим циклонам.

Поскольку [22]

$$\nu(r) = \frac{1}{r}\int_0^r r\xi(r)dr,$$

используя известное тождество [18]

$$\int z^{1+\mu}K_\mu(z)dz = z^{1+\mu}K_{1+\mu}(z),$$

получаем

$$\nu(r) = \frac{B}{q}r^{-\frac{b}{2}}K_{1-\frac{b}{2}}(qr) + \frac{1}{r}\left(\frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{B}{q}R^{-\frac{b}{2}}K_{1-\frac{b}{2}}(qR)\right), \qquad (11)$$

Γ — циркуляция скорости по контуру $r = R$.

В [19] указывается, что при удалении от тайфуна азимутальная скорость в пределах экмановского слоя убывает пропорционально $\frac{1}{\sqrt{r}}$. В [21] приведены данные, что азимутальная скорость ветра при удалении от "глаза" тайфуна убывает как $r^{-\kappa}$, $\kappa \sim 0{,}5$—$0{,}7$. В работе [20] измерялось распределение скоростей потоков в экспериментальной установке, моделирующей тропический циклон. Приводятся данные о том, что при удалении от ядра вихря радиальная скорость сначала убывает как $r^{-\kappa}$, $\kappa \sim 0{,}5$—$0{,}7$, а при $r \sim 7$—$10\ R$ — как $1/r$.

Согласовать формулу (11) с этими данными можно следующим образом. Допустим, что при $r \sim R$ второй член в (11) мал по сравнению с первым, поскольку $1/q = \frac{(\nu_\perp H)^{1/2}}{(\Omega\nu_\parallel)^{1/4}} \sim 3\cdot 10^3$ м $>> R$, при удалении от тайфуна на рас-

стояния, незначительные по сравнению с его радиусом, затухание первого члена определяется в основном множителем $r^{-\frac{b}{2}}$. При больших значениях аргумента

$$K_\nu(z)\infty\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\exp(-z)\left(1+\frac{4\nu^2-1}{8z}+O(z^{-2})\right),$$

и с ростом r экспоненциально убывающий первый член в (10) становится мал по сравнению со вторым членом.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что $b/2$ заключено между 0,3 и 0,5 или лежит между $0{,}6\nu_\perp$ и $\nu_\perp$, причем наиболее вероятное значение для b — единица [23].

Определим толщину зоны восходящего потока в сильных и неистовых смерчах [1]. Запишем уравнение баланса объема в зоне восходящего потока смерча. Для этого проинтегрируем (2) по узкой цилиндрической области радиуса R, толщиной $\Delta << R$ и высотой, равной толщине зоны втока [20]. С учетом (10) и в предположении, что весь втекающий поток в пределах области меняет направление движения на вертикальное, получаем

$$2\pi R\times\frac{C}{R}=2\pi R\times\Delta\gamma,$$

где γ — среднее значение производной $\frac{\partial w}{\partial z}$ в зоне втока, откуда $\Delta=\frac{C}{R\gamma}\approx\frac{\nu_\perp}{R\gamma}$.

Согласно [20], w быстро возрастает в пределах зоны втока, достигая значений, равных азимутальной скорости, а потом относительно мало меняется с высотой. Таким образом, $\gamma\sim V_{max}/\delta_E=10\ c^{-1}$ и $\Delta\sim 5$ м.

Интегрирование (6) для поля скоростей осесимметричного вихрестока в невязкой жидкости [24] приводит к оценке

$$\omega^2R^2=8\frac{\Delta p}{\rho}.$$

Здесь ω — завихренность смерча (считающаяся постоянной при $r<R$ [6]); Δp — разность между давлением на бесконечности и на поверхности.

Из этой оценки следует вывод, что смерчи должны иметь одинаковую интенсивность независимо от их размеров. Однако натурные наблюдения указывают, что смерчи с большей балльностью имеют большие размеры.

В [6] из соображений, что горизонтальные размеры смерча определяются скоростью процессов высвобождения скрытой теплоты конденсации и диссипации энергии, получена формула

$$R(z)\sim n^2\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)^{-1}, \qquad (12)$$

где $n\sim V_{max}$ — балльность смерча;

$\left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)$ — изменение влагосодержания с высотой;

знак "~" обозначает пропорциональность.

Из (12) следует, что $\omega^2 R = \text{const}$, и хотя балльность смерча растет с увеличением радиуса, частота вращения уменьшается.

Предположим, что радиус смерча определяется значениями ω и ν (тензорный характер атмосферной вязкости в данном рассуждении несущественен). и аппроксимируем формулу (11) зависимостью

$$\nu \sim r^{-\alpha}, \tag{13}$$

$0 < \alpha < 1$.

Используя ω и ν, можно сконструировать одну константу с размерностью скорости и одну константу с размерностью длины

$$S_\nu = \sqrt{\omega\nu}, \qquad S_r = \sqrt{\nu/\omega}, \tag{14}$$

тогда (13) можно представить в виде [25]

$$\nu \sim S_\nu \left(\frac{S_r}{r}\right)^\alpha. \tag{15}$$

Интегрируя (6) с учетом (15), получаем

$$\frac{1}{2\alpha}\frac{s_r^2 s_\nu^{2\alpha}}{R^{2\alpha}} \sim \frac{\Delta p}{\rho}, \tag{16}$$

или, подставляя (14) в (16),

$$\omega^{1-\alpha} \sim R^{2\alpha}.$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то получаем, что частота вращения смерча может расти с ростом его радиуса, что согласуется с картинами разрушений, оставленными наиболее разрушительными смерчами [26].

В работе проведены оценки радиального, азимутального и вертикального потоков в торнадо-циклоне без учета сил плавучести, эти оценки указывают на применимость к торнадо-циклону циклострофического приближения (6). Исследована роль торцевого эффекта [3] в массобалансе смерча. Обобщение приближения квазидвумерности [15, 16] на случай тензорной вязкости [8] позволило получить формулу (11), описывающую распределение азимутальной скорости при удалении от быстровращающихся атмосферных вихрей, объясняющую ряд ранее полученных натурных и экспериментальных данных. На базе этого изыскания оценена толщина наблюдаемой в эксперименте и при натурных исследованиях узкой зоны восходящего потока, окружающей воронку интенсивного воздушного вихря. Высказано предположение, подкрепленное соображениями размерности, что в вязкой атмосфере частота вращения смерча может расти с ростом его пространственных размеров.

Литература

1. *Юсупалиев У., Анисимова Е. П., Маслов А. К., Шутеев С. А.* К вопросу о формировании и геометрических характеристиках смерча. Часть 1//Прикладная физика. 2001. № 1. С. 56—61.

2. *Юсупалиев У., Маслов А. К., Шутеев С. А.* Тепловыделение как механизм самоподдержания закрученного потока в газе//Там же. 2000. № 1. С. 5—10.

3. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. — г. Новосибирск: Наука, 1989. — 336 с

4. *Девис-Джонс Р. П.* Наблюдательные и теоретические основы торнадогенеза//Интенсивные атмосферные вихри. — М.: Мир, 1985. С. 198—215.

5. *Петерсен С.* Анализ и прогноз погоды. — Л.: Гидрометеорологическое изд-во, 1961. — 652 с.

6. *Писниченко Е. А.* Роль фазовых переходов влаги в процессе образования смерчей//Изв. АН. Сер. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 6. С. 793—798.

7. *Lilly D. K.* The Structure, energetic and propagation of rotating convective storms. Part I: Energy exchange with mean flow//J. Atm. Sci. 1986. V. 43. № 3. P. 113—125.

8. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. — М.: Мир, 1984. Т. 1. — 400 с.
9. *Пфеффер Р. Л., Чалла М.* Модель развития атлантических ураганов из кучевых ансамблей (кластеров), депрессий и циклонов, предшествующих урагану смерч//Интенсивные атмосферные вихри. — М.: Мир, 1985. С. 95—111.
10. *Девис Д. Р., Эванс Х. П.* Оценки радиального распределения вихревой вязкости в развитом урагане смерч//Там же. С. 123—129.
11. *Симпсон Дж.* Вращение в кучевом облаке: модель и данные наблюдений в облачной системе, порождающей смерч//Там же. С. 183—197.
12. *Morton B. B.* The strength of vortex and swirling core flows//J. Fluid. Mech. 1969. V. 38. Pt. 2. P. 315—333.
13. *Гринспен Х. П.* Теория вращающихся жидкостей. — Л.: Гидрометеоиздат. 1975 — 304 с.
14. *Курганский М. В.* О связи между спиральностью и потенциальным вихрем в сжимаемой вращающейся жидкости//Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. № 12. С. 1326—1329.
15. *Должанский Ф., В., Крымов В. А., Манин Д. Ю.* Устойчивость и вихревые структуры квазидвумерных сдвиговых течений//УФН. 1990. Т. 160. Вып. 7. С. 1—47.
16. *Данилов С. Д., Должанский Ф. В.* Квазидвумерная турбулентность и роль внешнего трения//Изв. РАН. Сер. Физика атмосферы и океана. 2000. Т. 36. № 1. С. 35—44.
17. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
18. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. — М.: Наука, 1976. — 832 с.
19. *Скорер Р.* Аэрогидродинамика окружающей среды. — М.: Мир, 1980. — 552 с.
20. *Анисимова Е. П.* Конвективный тепло- и массообмен в системе вода — воздух: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — М., 1990. — 364 с.
21. *Anthes R. A.* Tropical cyclones. — Their evolution, structure and effects//Meteorological monograph. V. 19. № 41. — 208 p.
22. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 760 с.
23. *Анисимова Е. П., Иванов В. Н., Милехин В. И., Сперанская А. А.* Механизмы обмена и теплопроводность в интенсивных конвективных вихрях/ //Тропическая метеорология: Тр. IV междунар. симп. — Л.: Гидрометеоиздат, 1990. С. 67—76.
24. *Седов Ю. Б.* Коллапс кругового спирального вихря//Изв. АН. Сер. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30. № 1. С. 123—124.
25. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1987. — 430 с.
26. *Наливкин Д. В.* Смерчи. — М.: Наука, 1984. — 112 с.

Авторы выражают глубокую признательность профессору Л. С. Кузьменкову за внимание к данной работе и плодотворные обсуждения. Работа выполнена при содействии Правительства Москвы в рамках Программы поддержки инфраструктуры науки в городе Москве. Грант ГА-19/9.

To matter on formation and geometrical characteristics of tornado. Part II

U. Yusupaliev, Y. P. Anisimova, A. K. Maslov, S. A. Shuteyev
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

In a few articles joined by one title tornado is treated like central core of tornado cyclone appearing in storm-cloud convective cell in result of vertical wind shear and unstable troposphere stratification. Tornado cyclone is considered as quasi-two-dimensional structure. In the second part air flows in Eckman layer are investigated. Generalization of approximation of quasi-two-dimension on the case of tensor viscosity make it possible to explan earlier experimental and natural data. Influence of viscosity on the width of up-drift region in quasi-two-dimensional approximation for tornado cyclone is studied. Quantitative relation between rotation intensity and tornado radius in viscid media is obtained by method of dimensions. This relation validates possibility of increasing frequency of tornado rotation as its radius increases.