

УДК 537.533.35;517.958:52/59

Ортогонально-проекционный метод решения уравнения диффузии неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале

*А. А. Белов, Н. Д. Егунов, А. А. Самохвалов,
М. А. Степович, М. М. Чайковский*

Калужский филиал Московского государственного технического
университета им. Н. Э. Баумана, г. Калуга, Россия

Приведены результаты изучения некоторых возможностей использования численно-аналитических методов решения задач теплопереноса, связанного с процессами взаимодействия широких киловольтных (1–50 кэВ) пучков электронов с твердым телом. Рассмотрено дифференциальное уравнение, описывающее диффузию неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале. Для решения уравнения разработан спектральный метод с использованием модифицированных функций Лагерра, базирующийся на математическом аппарате ортогонального проектирования.

Математическое описание многих физических процессов, как правило, требует использования численных методов. При этом часто нужно найти большое число точек и по ним построить приближенное решение. При использовании ортогонально-проекционных методов для некоторых задач приближенное решение может быть найдено в аналитическом виде с использованием сравнительно небольшого числа членов функционального ряда для достижения заданной точности. Это, в частности, дает возможность более эффективно проводить анализ решения конкретной задачи или ее отдельных этапов.

В настоящей работе изложены результаты изучения некоторых возможностей использования ортогонально-проекционных методов для решения стационарного уравнения диффузии неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале широким электронным пучком. Предварительно большое внимание уделено вопросу аппроксимации распределений плотности и потерь энергии электронами пучка в конденсированном веществе и эта задача рассмотрена в самом общем виде, т. е. для значений параметров материалов, характерных практически для всех элементов периодической таблицы элементов. Описаны полученные результаты использования в электронной микроскопии ортогональных базисов модифицированных функций Лагерра и модифицированных функций Эрмита и показано, что использование модифицированных функций Лагерра позволяет решить задачу диффузии неосновных носителей заряда для всех полупроводниковых материалов и диапазона энергий электронов пучка, используемого в электронно-зондовых устройствах.

Постановка задач

Явления тепломассопереноса математически могут быть описаны операторным уравнением вида

$$D[f(z)] = u(z), \quad (1)$$

где D — линейный дифференциальный оператор порядка p с переменными коэффициентами

$$D = \sum_{k=0}^p a_{i_1 i_2 \dots i_m}(z) \frac{\partial^{(k)}}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \dots \partial z_m^{i_m}}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_m = k, \quad k = \overline{0, p},$$

$$z_i \in \Omega, \quad \Omega = [0, \infty), \quad f(z), \quad u(z) \in L_2(\Omega).$$

Функциональное пространство $L_2(\Omega)$ представляет собой множество функций $\{f(\mu)\}$ с интегрируемым квадратом на области Ω :

$$L_2(\Omega) = \{f(\mu): \int_{\Omega} |f(\mu)|^2 d\mu < \infty\}.$$

Пространство $L^2(\Omega)$ является полным линейным нормированным бесконечномерным (гильбертовым) пространством, норма в $L_2(\Omega)$ вводится следующим образом:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |f(\mu)|^2 d\mu \right\}^{1/2}.$$

Для одномерного стационарного случая, реализующегося при облучении поверхности мишени широким пучком электронов, дифференциальное уравнение, описывающее диффузионные процессы, имеет вид

$$D \frac{d^2}{dz^2} \Delta p(z) - \frac{1}{\tau} \Delta p(z) = -\rho(z), \quad z \in [0, \infty). \quad (2)$$

Для рассматриваемого дифференциального уравнения константы интегрирования определяются из условий

$$D \frac{d}{dz} \Delta p(z) \Big|_{z=0} = v_s \Delta p(0); \quad \Delta p(\infty) = 0, \quad (3)$$

здесь D — коэффициент диффузии; v_s — скорость поверхностной рекомбинации; τ — время жизни неосновных носителей заряда в веществе; $\Delta p(z)$ — распределение неосновных носителей заряда в результате их диффузии.

В уравнении (1) функция $u(z)$ определяется плотностью потерь энергии электронами пучка в твердом теле $\rho(z)$. С учетом [1, 2] зависимость $\rho(z)$ выбрана в виде

$$\rho(z) = \frac{1,085 E_0 (1 - \eta)}{\sqrt{\pi z_{ms}}} \left\{ \exp \left[- \frac{z - z_{ms}}{z_{ms}} \right]^2 + \frac{\eta}{(1 - K\eta)} \exp \left[- \left(\frac{z - z_{ss}}{z_{ss}} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4)$$

здесь E_0 [кэВ] — энергия электронов пучка; z_{ms} [мкм] — глубина максимальных потерь энергии пучком первичных электронов, испытывавших малоугловое рассеяние, для данного вещества мишени; z_{ss} [мкм] — глубина максимальных потерь энергии обратно рассеянных электронов для данного вещества мишени; η — коэффициент обратного рассеяния электронов зонда, $\eta = 0,024 e Z^{1,67} / A$; $K \equiv \eta_E$ — коэффициент, определяющий долю энергии, уносимой обратно-рассеянными электронами.

В соответствии с принятой математической моделью распределение плотности потерь энергии электронами пучка описывается функцией типа Гаусса (4) с дисперсией, являющейся функцией энергии электронов пучка. Физически такой подход отвечает раздельному описанию вклада обратно-рассеянных и поглощенных мишенью электронов в функцию потерь энергии и, как показано в [1, 2], такая модель хорошо описывает имеющиеся экспериментальные данные.

Значения z_{ms} и z_{ss} для остро сфокусированного электронного зонда определяются следующим образом [1, 2]:

$$z_{ms} [\text{мкм}] = \frac{1,38 \cdot 10^{-2} A E_0^{5/3}}{\rho_0 Z^{8/9}} \left(1 - \frac{0,042 Z^{4/3}}{(1 + 0,187 Z^{2/3})^2} \right);$$

$$z_{ss} [\text{мкм}] = Z^{-1/3} z_{ms},$$

здесь ρ_0 — удельная плотность вещества мишени, г/см⁻³; Z и A — атомный номер и атомный вес вещества мишени, соответственно.

Для решения дифференциального уравнения (1) с правой частью вида (4) необходимо использовать какие-либо приближенные методы, поскольку построение точного аналитического решения невозможно. Применение конечно-разностных методов решения данной краевой задачи затруднительно вследствие того, что правое граничное условие (3) задано на бесконечности. Область, на которой рассматривается уравнение диффузии, есть полупрямая и при выполнении условий $\Delta p(z)$, $\rho(z) \in L_2[0, \infty)$ можно рассмотреть построение приближенного решения дифференциального уравнения ортогонально-проекционным (спектральным) методом с использованием базиса функций Лагерра [3].

Методика решения задачи

Ортонормированные на полуоси $[0, \infty)$ функции Лагерра $\varphi_n(z)$, образующие базис в пространстве $L_2[0, \infty)$, определяются через многочлены Чебышёва-Лагерра $L_n(z)$ следующим образом:

$$\varphi_n(z) = L_n(z) \cdot \exp(-z/2). \quad (5)$$

Формула Родрига для многочленов Чебышёва-Лагерра имеет вид [4]:

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \exp(z) \left\{ z^n \cdot \exp(-z) \right\}^{(n)},$$

откуда

$$L'_n(z) = L'_{n-1}(z) - L_{n-1}(z) = -L_0(z) - L_1(z) - \dots - L_{n-1}(z).$$

Тогда из выражения (5) следует

$$\varphi'_n(z) = L'_n(z) \exp(-z/2) - 1/2 L_n(z) \exp(-z/2).$$

Пусть $\bar{L}(z) = (L_0(z), L_1(z), \dots, L_n(z))^T$ — вектор-столбец, состоящий из многочленов Чебышёва-Лагерра, тогда $\bar{L}'(z) = (L'_0(z), L'_1(z), \dots, L'_n(z))^T$ — производная вектор-столбца $\bar{L}(z)$, для которого имеет место следующая формула:

$$\bar{L}'(z) = \mathbf{G} \cdot \bar{L}(z).$$

Здесь \mathbf{G} — квадратная числовая матрица размерности $(n+1) \times (n+1)$, называемая матрицей дифференцирования в базисе многочленов Чебышёва-Лагерра:

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Обозначим через $\bar{\Phi}(z) = (\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))^T$ вектор-столбец, состоящий из функций Лагерра. Тогда $\bar{\Phi}'(z) = (\varphi'_0(z), \varphi'_1(z), \dots, \varphi'_n(z))^T$ — вектор-столбец, состоящий из производных функций Лагерра, определяемый следующим соотношением:

$$\bar{\Phi}'(z) = \mathbf{P} \bar{\Phi}(z),$$

здесь \mathbf{P} — матрица дифференцирования в базисе функций Лагерра размерности $(n+1) \times (n+1)$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} - \frac{1}{2} \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}.$$

Дифференцируя (5), получим

$$\overline{\Phi}''(z) = P \cdot \overline{\Phi}'(z) = P^2 \cdot \overline{\Phi}(z). \tag{6}$$

При построении решения задачи (2), (3) спектральным методом с использованием функций Лагерра предполагается приближенное представление правой части (4) в виде частичной суммы ряда Фурье по ортогональному базису $\{\varphi_i(z)\}$ пространства $L_2(\Omega)$. Однако в силу ряда причин, изложенных в [5], приближение функции $\rho(z)$ с использованием системы функций Лагерра (5) с точностью, достаточной для реализации спектрального метода, может потребовать значительного количества членов разложения. Поэтому для аппроксимации правой части уравнения (2), определяемой выражением (4), предложено использовать систему ортонормированных на полуоси $[0, \infty)$ модифицированных функций Лагерра.

Функции Лагерра с модифицирующим параметром k , ускоряющим сходимость ряда Фурье, определяются формулой [6]

$$\varphi_n^{[k]}(z) = \sqrt{k} \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu \frac{1}{\nu!} (-1)^\nu (kz)^\nu \exp(-kz/2). \tag{7}$$

Индекс k в квадратных скобках в левой части соотношения (7) здесь и далее показывает зависимость базисных функций и матриц дифференцирования от значения модифицирующего параметра.

Матрица дифференцирования в базисе модифицированных функций Лагерра определяется выражением

$$P_{[k]} = k \cdot P. \tag{8}$$

Функцию $\rho(z)$ можно представить ее приближением по системе модифицированных функций Лагерра:

$$\rho(z) \approx \bar{\rho}(z) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i^{[k]}(z), \quad a_i = \int_0^\infty \rho(z) \varphi_i^{[k]}(z) dz. \tag{9}$$

В матричной форме (9) имеет следующий вид:

$$\rho(z) \approx \bar{\rho}(z) = A \cdot \overline{\Phi}_{[k]}(z),$$

где $A = (a_0, \dots, a_n)$ — матрица-строка, состоящая из коэффициентов Фурье функции $\rho(z)$ по системе функций Лагерра, $\overline{\Phi}_{[k]}(z) = (\varphi_0^{[k]}(z), \dots, \varphi_n^{[k]}(z))^T$ — вектор-столбец модифицированных функций Лагерра.

Пусть функция $\Delta p^*(z)$ есть частное решение уравнения (2). Представим его приближенно рядом Фурье по системе модифицированных функций Лагерра

$$\Delta p^*(z) \approx \Delta \tilde{p}^*(z) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i^{[k]}(z), \quad c_i = \int_0^\infty \Delta p^*(z) \varphi_i^{[k]}(z) dz. \tag{10}$$

В матричной форме (10) имеет вид

$$\Delta p^*(z) \approx \Delta \tilde{p}^*(z) = C \cdot \overline{\Phi}_{[k]}(z),$$

где $\mathbf{C} = (c_0, \dots, c_n)$ — вектор-строка неизвестных коэффициентов Фурье функции $\Delta p^*(z)$ по системе модифицированных функций Лагерра. Как следует из соотношений (6), (9)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \left[D\mathbf{P}_{[k]}^2 - \frac{1}{\tau} \mathbf{E} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Обратная матрица в соотношении (11) существует при $D\tau \neq 4$. Следует отметить, что на практике для вычисления вектора \mathbf{C} нет необходимости в нахождении указанной обратной матрицы. Задача вычисления неизвестных коэффициентов Фурье функции $\Delta p^*(z)$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\left[D\mathbf{P}_{[k]}^2 - \frac{1}{\tau} \mathbf{E} \right] \mathbf{C} = \mathbf{A}. \quad (12)$$

Приближенное решение задачи (2), (3) получим в виде

$$\Delta p(z) \approx \Delta \tilde{p}^*(z) = \tilde{C}_1 \exp(-z / \sqrt{D\tau}) + \mathbf{C} \cdot \overline{\Phi}_{[k]}(z), \quad (13)$$

здесь \mathbf{C} и $\mathbf{P}_{[k]}$ — числовые матрицы, которые вычисляются по формулам (11) и (8), соответственно. Константа интегрирования \tilde{C}_1 при общем решении однородного уравнения, соответствующего уравнению (2), находится из краевых условий (3) и определяется выражением

$$\tau = \frac{[-v_s \cdot \overline{\Phi}_{[k]}(0) + D\mathbf{C}\mathbf{P}_{[k]}\overline{\Phi}_{[k]}(0)]\sqrt{D\tau}}{v_s\sqrt{D\tau} + D},$$

где $\overline{\Phi}_{[k]}(0) = (\varphi_0^{[k]}(0), \dots, \varphi_n^{[k]}(0))^T = (\sqrt{k}, \dots, \sqrt{k})^T$ — значение модифицированных функций Лагерра в точке $z = 0$.

Результаты применения разработанного метода и их обсуждение

Практическое применение ортогонально-проекционного (спектрального) метода решения уравнения диффузии (2) с граничными условиями (3) при использовании функций Лагерра неизбежно приводит к возникновению следующих проблем [5]:

- вычисление коэффициентов Фурье разложения правой части уравнения по базису функций Лагерра связано с определенными трудностями, поскольку в интегралах

$$a_k = \int_0^{\infty} \rho(z) \varphi_k(z) dz,$$

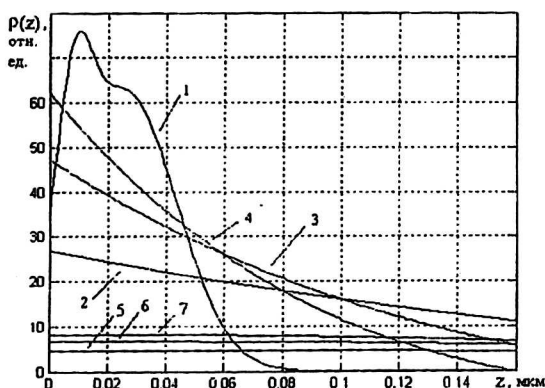
определяющих коэффициенты Фурье функции $\rho(z)$, для подынтегрального выражения не существует первообразной в элементарных функциях, а замена несобственного интеграла на определенный интеграл на конечном отрезке $[0, z_0]$ вносит неизбежные погрешности. Точность вычисления коэффициентов a_k можно увеличить, если при расчетах использовать методы вычисления определенных интегралов, имеющие высокий порядок точности, например квадратурную формулу Симпсона или квадратурную формулу Уэддла;

система функций Лагерра является полной в пространстве $L_2[0, \infty)$ [7], т. е. теоретически функция $\rho(z)$ может быть представлена рядом Фурье по данному ортогональному базису с любой степенью точности; в то же время на практике такое приближение может потребовать значительного количества членов разложения (с возможным увеличением погрешности вычислений).

Нами также была изучена возможность применения ортонормированной системы функций Эрмита к решению задачи аппроксимации распределений плотности потерь энергии электронами пучка в твердом теле. Исследования показали, что использование классических функций Эрмита, образующих базис в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$, также не обеспечивает удовлетворительного приближения функции $\rho(z)$ [8].

Задача аппроксимации функций $\rho(z)$ решалась нами для широкого ряда материалов: от Al по Au, в то время как используемые на практике полупроводниковые материалы занимают довольно узкий промежуток в периодической таблице элементов. Поэтому некоторые результаты неудачной аппроксимации $\rho(z)$ проиллюстрированы на примере, в котором расчеты проведены для параметров мишени, характерных для меди (область средних значений параметров вещества в периодической таблице элементов: $Z = 29$, $F = 63,55$, $\rho_0 = 8,93 \text{ г/см}^3$, $\eta = 0,35$ и $K = 0,76$ [9]). График функции $\rho(z)$, рассчитанный по формуле (4) для энергии электронов пучка $E_0 = 4 \text{ кэВ}$, представлен на рис. 1, где приведены результаты приближения функции $\rho(z)$ с использованием 10, 20 и 30 членов ряда по базису функций Лагерра и Эрмита. Очевидна неудовлетворительность такого приближения. Дальнейшее увеличение количества базисных функций в целях улучшения приближения $\rho(z)$ оказалось нецелесообразным, поскольку приводило к ухудшению вычислительной устойчивости алгоритма решения уравнения диффузии спектральным методом.

Рис. 1. Аппроксимация функций $\rho(z)$:
 1 — с энергией $E_0 = 4$ в медной мишени;
 2—4 — по базису функций Лагерра;
 5—7 — по базису функций Эрмита.
 Аппроксимация проведена при использовании следующего числа функций:
 10 — кривые 2, 5; 20 — 3, 6; 30 — 4, 7



Таким образом, проблема построения решений дифференциальных уравнений (2) с граничными условиями (3) описанным методом во многом сводится к приближенному представлению функции $\rho(z)$ с определенной точностью.

Приемлемое для проведения практических расчетов приближение функции $\rho(z)$ может быть получено с использованием базисов функций Лагерра или функций Эрмита с модифицирующим параметром k [8], ускоряющим сходимость ряда Фурье.

По аналогии с изложенным выше ортогонально-проекционным алгоритмом решения рассматриваемого дифференциального уравнения с использованием системы модифицированных функций Лагерра, нами была рассмотрена возможность построения спектрального метода решения этого уравнения с использованием системы модифицированных функций Эрмита, однако он оказался непригоден для решения практических задач. Из [10] известно, что точность решения задач, подобных рассматриваемой, существенно зависит от точности расчета коэффициентов Фурье приближения функции $\rho(z)$ и значения числа обусловленности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (12). При больших числах обусловленности для повышения точности решения необходимо увеличивать точность входных данных (в нашей задаче — коэффициентов Фурье разложения функции $\rho(z)$). При использовании базиса модифицированных функций Эрмита значения числа обусловленности матрицы системы линейных уравнений при параметрах, характерных для материалов с $Z = 13$ по $Z = 79$, оказались слишком велики (порядка 10^{28} для 15 базисных функций), и поэтому для получения адекватных результатов решения рассматриваемого дифференциального уравнения пришлось увеличивать точность расчетов в 3 или 4 раза (т. е. увеличивать разрядность мантииссы чисел с плавающей запятой в 3—4 раза), а для получения решения с приемлемой точностью — в 5—6 раз. Увеличение разрядности связано с определенными трудностями (большая требуемая вычислительная мощность компьютера сравнительно большое время вычислений, определенная сложность программной реализации и т. п.), поэтому мы пришли к выводу, что применение базиса функций Эрмита к решению дифференциального уравнения (2) с граничными условиями (3) является нецелесообразным, что отвечает и рекомендациям [10].

Спектральный метод решения уравнения диффузии с использованием системы модифицированных функций Лагерра обладает несравнимо лучшей вычислительной устойчивостью. Так, для числа базисных функций $N = 15$ число обусловленности матрицы системы (12), порожденное спектральной нормой, не превышало значения, равного 10^4 , что позволяет использовать для расчетов персональные ЭВМ.

Для функций Лагерра с модифицирующим параметром разумное с физической точки зрения приближение функции $\rho(z)$ для значений энергии электронов пучка, характерных для электронно-зондовых устройств ($E_0 = (1-50)$ кэВ) и параметрах мишени, характерных для арсенида галлия, было получено уже для 15 членов ряда при соответствующем выборе значений модифицирующего параметра k . Результаты таких расчетов приведены на рис. 2. Графики точных (формула (4)) и приближенных (формула (9)) представлений функции $\rho(z)$ при использовании в разложении 15 членов ряда по базису функций Лагерра в выбранном масштабе практически совпадают. Вычисления производились при следующих значениях вещества мишени: $Z = 32$, $A = 72$, $\rho_0 = 5,32$ г/см³ и $K = 0,73$ [9].

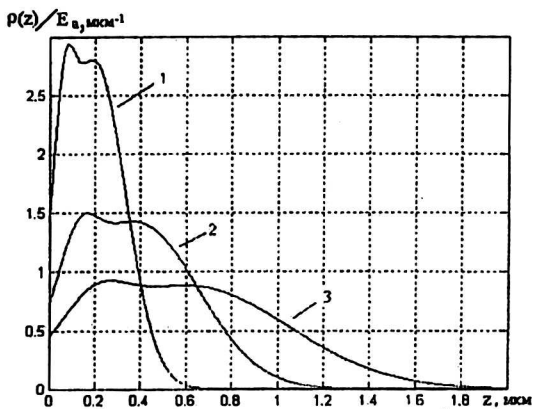


Рис. 2. Графики приближений функции $\rho(z)$ для мишени из арсенида галлия с использованием 15 модифицированных функций Лагерра:
 1 — $E_0 = 15$ кэВ, $k = 40$; 2 — $E_0 = 10$ кэВ, $k = 34$; 3 — $E_0 = 20$ кэВ, $k = 25$

В процессе исследований были также выполнены построения и аппроксимация функций одномерных плотностей распределения энергетических потерь электронов зонда для параметров мишени, характерных для других элементов периодической таблицы. Полученные результаты показали, что модифицированные функции Лагерра могут быть использованы для решения задачи аппроксимации для любых материалов мишеней — при соответствующем выборе необходимого числа членов ряда (9) и значения параметра k . Решение этой задачи может быть получено из анализа зависимостей погрешностей приближений по норме пространства $L_2[0, \infty)$ от значений модифицирующего параметра k при фиксированном числе базисных функций (среднеквадратические отклонения), которые могут быть определены по формуле

$$E = \|\rho(z) - \tilde{\rho}(z)\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |\rho(z) - \tilde{\rho}(z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Погрешности оценивались для отдельных (дискретных значений k при фиксированном числе базисных функций. Графики зависимостей среднеквадратических отклонений при числе модифицированных функций Лагерра $N = 15$ представлены на рис. 3. Для выбранного базиса характерным является наличие довольно широкого интервала значений модифицирующего параметра k , для которых среднеквадратические отклонения $E(k)$ принимают весьма малые значения и остаются при этом практически постоянными. С увеличением атомного номера мишени этот диапазон увеличивается, одновременно смещаясь в область больших значений k . Например, для приведенных на рис. 3 зависимостей, рассчитанных для золота, серебра, меди и алюминия от 50 до 150, для меди от 100 до 230, для серебра от 350 до 700 и для золота от 1250 (правая граница интервала не определялась). В целом из полученных нами результатов следует, что зависимости среднеквадратических отклонений от значения модифицирующего параметра k имеют минимум, а значит существует такое значение параметра k , при котором приближение будет наилучшим в смысле нормы пространства $L_2(\Omega)$.

Результаты расчетов, полученные при аппроксимации $\rho(z)$ для полупроводниковых материалов, оказались близки к результатам, полученным для меди.

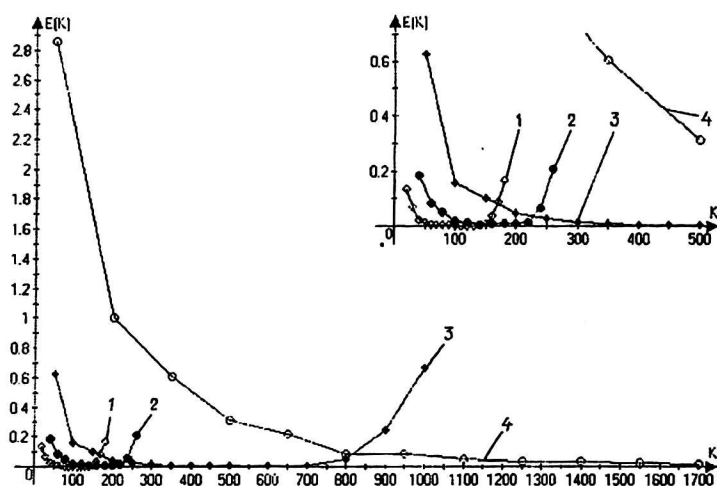


Рис. 3. Графики зависимостей среднеквадратических отклонений E от значения модифицирующего параметра k для мишеней из:
1 — золота; 2 — серебра; 3 — меди; 4 — алюминия

Результаты решения дифференциального уравнения диффузии для стационарного одномерного случая спектральным методом с использованием 15 модифицированных функций Лагерра для мишени из арсенида галлия, облучаемого широким электронным пучком с энергиями $E_0 = 10$ кэВ и $E_0 = 20$ кэВ, представлены на рис. 4, а, б, соответственно.

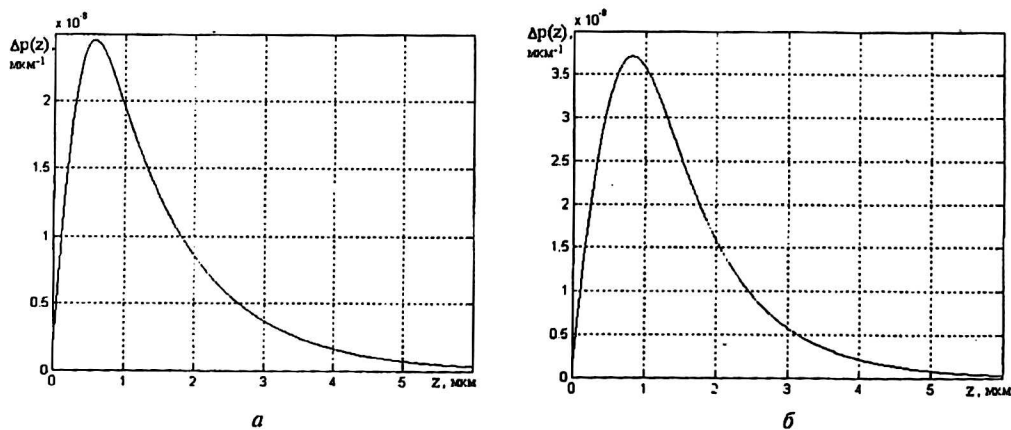


Рис. 4. Распределение неосновных носителей заряда в мишени из арсенида галлия, облучаемой широким электронным пучком с энергией:
а — $E_0 = 10$ кэВ; б — $E_0 = 20$ кэВ

Заключение

Рассмотрена задача аппроксимации распределения потерь энергии электронами пучка в конденсированном веществе. Показано, что использование модифицированных функций Лагерра и Эрмита позволяет решить эту задачу практически для всех материалов и значений энергии электронов, характерных для электронно-зондовых устройств.

Разработан метод решения дифференциального уравнения диффузии неосвоенных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале, основанный на спектральном представлении распределений потерь энергии электронов пучка в твердом теле и математическом аппарате ортогонального проектирования. Метод, принадлежащий к классу численно-аналитических, позволяет строить решение уравнения диффузии в виде частичной суммы ряда Фурье по системе функций Лагерра с модифицирующим параметром, ускоряющим сходимость ряда.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Калужской области (грант № 01-01-96015) и Министерства образования РФ (грант № Т00-2.2-852).

Л и т е р а т у р а

1. Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1991. Т. 55. № 8. С. 1474.
2. Михеев Н. Н., Степович М. А. // Заводская лаборатория. 1996. Т. 62. № 4. С. 20.
3. Белов А. А., Степович М. А., Чайковский М. М. // Тез. докл. 1-й Российской конф. молодых ученых по мат. моделированию. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2000. С. 19.
4. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976.
5. Егунов Н. Д., Степович М. А., Чайковский М. М. // Труды МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2001. № 580. С. 51.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т. 2. Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н. Д. Егунова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
8. Егунов Н. Д., Самохвалов А. А., Степович М. А., Чайковский М. М. // Вісник Черкаського інженерно-технологічного інституту. Спецвипуск: Матер. міжнародної науково-технічної конф. "Приладобудування-2001". С. 135.
9. Табл. физ. величин: Справочник/Под ред. акад. И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976.
10. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы: Учеб. пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

The orthogonal-projection method for solving equation of diffusion of minority charge carriers generated by the electron beam in semiconductors

*A. A. Belov, N. D. Egunov, A. A. Samokhvalov, M. A. Stepovich,
M. M. Tchaikovsky*

Moscow Bauman State Technical University (Kaluga Branch), Kaluga, Russia

The results of research of some possibilities of numeric-analytical methods application for solving problems of the heat-mass transfer that is concerned with wide kilovolt electron beams and solids interaction processes are reported. The differential equation describing the diffusion of non-equilibrium minority charge carriers generated by electron beam in semiconductors is observed. For solving this equation the spectral method using the modified Laguerre's functions based on the mathematical orthogonal projection apparatus is developed.