

## The symplectic integrator for simulation of driving the corpuscle in composite magnetic fields

*E. B. Levichev, P. A. Piminov*

Budker's Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, Russia

*The strong magnetic field of "S-turns" for generation of synchrotron emission has usually composite spatial distribution, and practically it is impossible to study the motion of corpuscles in such field analytically. In the paper the simple and reliable symplectic algorithm for numerical modeling the motion of a corpuscle in a composite magnetic field is surveyed. The input values for numerical integration — a bivariate array of field values — can be taken from results of measuring of simulation of a magnet. The motion of a charged particle through the triple-pole superconducting "S-turn" with a field maximum of 7 Telsa is surveyed as an example.*

УДК 537.533.3

## О сферической аберрации системы осесимметричных изотраекторных линз

*А. А. Матышев*

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
Санкт-Петербург, Россия

*Изложена методика расчета сферической аберрации 3-го порядка дублета осесимметричных изотраекторных электрических линз.*

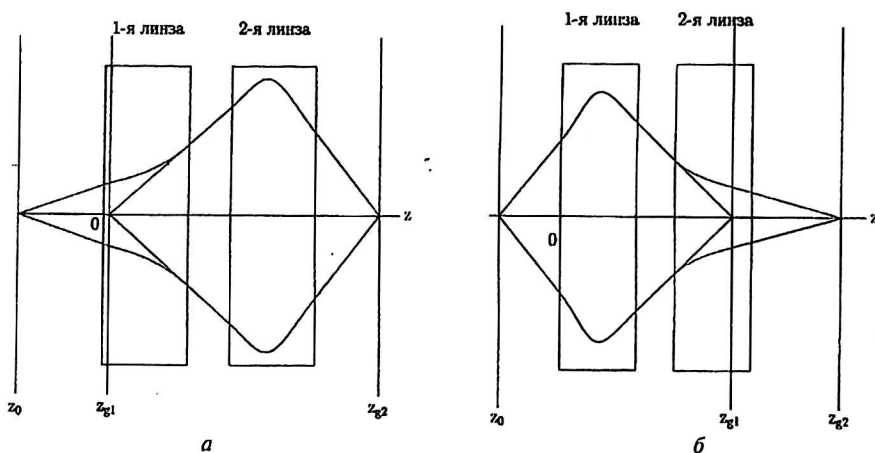
Как известно, в световой оптике сферическую аберрацию 3-го порядка можно устранить с помощью двух осесимметричных линз, из которых одна собирающая, а другая — рассеивающая [1]. В корпускулярной оптике статических полей положение иное. Во-первых, статические осесимметричные корпускулярные линзы могут быть только собирающими [2], во-вторых, для осесимметричных полей О. Шерцером была доказана теорема о неустранимости сферической аберрации, в соответствии с которой точка пересечения крайних лучей пучка с осью симметрии всегда ближе к предмету, чем точка пересечения параксиальных лучей [3]. Иными словами, крайние лучи пучка в статических осесимметричных полях всегда пересекаются раньше плоскости гауссова изображения, причем никакая комбинация таких полей не в состоянии исправить это обстоятельство. (Далее в статье имеются в виду одиночные или иммерсионные электрические линзы.)

Один из способов обойти ограничения теоремы Шерцера был указан самим автором теоремы. Если поле в осесимметричной линзе заставить изменяться во времени, а пучок частиц, соответственно, сделать импульсным, то сферическая аберрация 3-го порядка в таких линзах может быть устранена [4]. В [5] была развита теория специальным образом зависящих от времени электрических и магнитных полей, названных изотраекторными. Там же было

показано, что знак сферической aberrации 3-го порядка осесимметричных изотраекторных линз может быть любым. Соответственно, путем комбинации двух линз с разным знаком этой aberrации можно устранять сферическую aberrацию 3-го порядка дублета изотраекторных осесимметричных линз. Однако расчет aberrаций дублета для нестационарных полей отличается повышенной сложностью по сравнению со случаем статических систем.

Действительно, расчет сферической aberrации дублета статических осесимметричных линз не составляет труда, необходимо знать лишь параметры каждой из линз в отдельности.

Дублет двух изотраекторных линз изображен на рисунке, а, но этим же рисунком можно пользоваться и для случая статических линз.



*Дублет изотраекторных осесимметричных линз,  $Oz$  — ось симметрии, изображены реальные траектории. В параксиальном приближении:*

- а* — 1-я линза создает мнимое изображение плоскости предмета  $z = z_0$  в плоскости  $z = z_{g1}$ , которое, в свою очередь, переносится 2-й линзой в плоскость  $z = z_{g2}$ ;
- б* — 1-я линза создает действительное изображение плоскости предмета  $z = z_0$  в плоскости  $z = z_{g1}$  внутри второй линзы, которое, в свою очередь, переносится 2-й линзой в плоскость  $z = z_{g2}$

Пусть частица вылетает из плоскости предмета  $z = z_0$  под углом  $\alpha$  к оси симметрии. В плоскости гауссова изображения  $z = z_{g1}$  первой линзы с учетом сферической aberrации 3-го порядка частица пройдет через точку с радиальной координатой  $M_1 C_3 \alpha^3$ , при этом угол наклона к оси  $\beta$  плоскости гауссова изображения будет определяться угловым увеличением первой линзы:  $\text{tg} \beta = \Gamma_1 \text{tg} \alpha$ , где  $M_1$ ,  $\Gamma_1$ ,  $C_3$  — линейное увеличение, угловое увеличение и коэффициент сферической aberrации 3-го порядка первой линзы.

Вторая линза дублета переносит изображение первой линзы в плоскость своего гауссова изображения  $z = z_{g2}$ , в котором, во-первых, произойдет линейное увеличение сферической aberrации 1-й линзы, во-вторых, добавится сферическая aberrация 2-й линзы, так что можно записать следующее уравнение:

$$M_1 M_2 C_3 \alpha^3 = M_2 M_1 C_3 \alpha^3 + M_2 C_3 \beta^3.$$

Из последнего равенства следует выражение для сферической aberrации 3-го порядка дублета статических линз  $C_3$

$$C_3 = C_{31} + C_{32} \frac{\Gamma_1^3}{M_1}. \quad (1)$$

Учитывая инвариант Гельмгольца-Лагранжа, для дублета с первой одиночной линзой можно получить выражение

$$C3 = C3_1 + C3_2 \frac{1}{M_1^4}.$$

На первый взгляд может показаться, что и для дублета осесимметричных изотраекторных линз сферическая аберрация должна рассчитываться таким же образом. Однако более внимательное рассмотрение вопроса показывает, что вклад в сферическую аберрацию изотраекторного дублета вносит и пространственно-временная аберрация второй линзы [5, 6]. Дело в том, что частицы, вылетевшие из плоскости предмета одновременно, из-за нелинейности поля проходят через плоскость гауссова изображения 1-й линзы неодновременно. Соответственно, в плоскости гауссова изображения 2-й линзы формируется добавочное смещение, расчет которого ниже и произведен.

Действительно, пусть потенциал на оси 1-й линзы есть

$$U = U_{\max} \left( \frac{t_{\min}}{t} \right)^2 u_1 \left( \frac{z}{L_1} \right),$$

причем  $t \geq t_{\min}$ ,  $L_1$  — длина первой линзы. Пусть далее все длины выражаются через длину 1-й линзы, которая в безразмерных длинах будет начинаться на оси симметрии  $Oz$  в точке  $z = 0$  и заканчиваться в точке  $z = 1$ . Пусть из источника частиц, отделенного расстоянием  $d$  от входа в 1-ю линзу, в момент времени  $t = 0$  испускаются частицы с удельным зарядом  $\eta$ , скоростями  $v$  и начальными углами вылета  $\alpha$ , причем самые быстрые из них приходят в линзу не ранее момента  $t_{\min}$ .

На входе в линзу начальные данные будут таковы:

$$\begin{aligned} t_0 &= d/(v \cdot \cos \alpha), \\ z_0 &= 0, \quad \dot{z}_0 = v \cdot \cos \alpha, \\ \rho_0 &= d \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad \dot{\rho}_0 = v \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

а параксиальные уравнения движения в линзе примут вид

$$\ddot{\rho} = -\frac{k_1^2}{t^2} u_1''(z) \rho, \tag{2}$$

$$\ddot{z} = +\frac{2k_1^2}{t^2} u_1'(z), \tag{3}$$

где  $k_1$  — изотраекторное возбуждение линзы, определяемое выражением

$$k_1^2 = -\left( \eta U_{\max} (t_{\min})^2 \right) / (2L_1^2).$$

После введения безразмерного времени  $\tau$  с помощью формулы

$$\tau = \frac{t}{t_{\min}} \frac{v \cdot \cos \alpha}{v_{\max}}, \tag{4}$$

где  $v_{\max}$  — максимальная скорость частиц, вылетающих из источника и связанная с параметром  $t_{\min}$  очевидным соотношением  $t_{\min} = d/v_{\max}$ , уравнения движения в силу их однородности по времени не изменятся, а начальные данные упростятся

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 1, \\ z_0 &= 0, \dot{z}_0 = d, \\ \rho_0 &= d \operatorname{tg} \alpha, \dot{\rho}_0 = d \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

В силу линейности уравнения (2) и специфики начальных данных, системе уравнений (2)—(3) будет удовлетворять единственная пара функций вида  $\rho = \operatorname{tg} \alpha \cdot \rho_1(\tau, d)$  и  $z = z(\tau, d)$ . Параксиальные частицы будут покидать линзу независимо от угла  $\alpha$  в один и тот же момент  $\tau_k(d)$ , такой, что  $z_1(\tau_k, d) = 1$ . В этот момент времени координаты и проекции скорости частицы есть  $z_k = 1$ ,  $\dot{z}_k = \dot{z}_{1k}(d)$ ,  $\rho_k = \operatorname{tg} \alpha \cdot \rho_1(\tau_k, d)$ ,  $\dot{\rho}_k = \operatorname{tg} \alpha \cdot \dot{\rho}_1(\tau_k, d)$ .

Траектория частицы за линзой будет прямой, определяемой уравнением

$$\rho = \rho_k + \frac{\dot{\rho}_k}{\dot{z}_k} (z - 1).$$

Плоскость гауссова изображения 1-й линзы будет плоскостью, в которой траектории пересекут ось  $Oz$  независимо от начального угла вылета. Координатой плоскости гауссова изображения будет  $z_{g1} = 1 + p$ , где  $p = -\dot{z}_{1k}(d) \rho_1(\tau_k, d) / \dot{\rho}_1(\tau_k, d)$ .

Докажем, что в параксиальном приближении можно считать, что частицы стартуют одновременно (по безразмерному времени  $\tau$ ) из плоскости гауссова изображения 1-й линзы с той скоростью, с которой они реально покидают 1-ю линзу, влетая в дрейфовое пространство. Другими словами, в параксиальном приближении можно заменить одновременный старт частиц из источника в плоскости  $z = z_0$  на одновременный же старт частиц из мнимого (или действительного) источника, находящегося в плоскости гауссова изображения  $z = z_{g1}$  1-й линзы. В самом деле, легко определить, что последнее событие происходит в момент  $\tau_1$ , не зависящий от угла  $\alpha$  и определяемый соотношением

$$\tau_1 = \tau_k + p / \dot{z}_{1k}.$$

С учетом замены переменной (4) безразмерное время старта определит величину размерного времени старта частиц из плоскости гауссова изображения 1-й линзы

$$t_1 = (\tau_k + p / \dot{z}_{1k}) t_{\min} \frac{v_{\max}}{v \cos \alpha} = (\tau_k + p / \dot{z}_{1k}) \frac{d}{v \cos \alpha}.$$

Анализ показывает, что указанный подход справедлив для любых взаимных конфигураций линз дублета. Так, на рисунке, *б* изображена еще одна возможная комбинация линз, для которой плоскость гауссова действительного изображения лежит внутри 2-й линзы.

Вычислим разброс по времени вылета частиц  $\tau_1$  из плоскости гауссова изображения 1-й линзы, возникающий при учете сферической aberrации 3-го порядка 1-й линзы. С учетом нелинейных поправок осесимметричного поля вблизи оси симметрии, определяющих коэффициент aberrации 3-го порядка, уравнения (2)—(3) заменяются уравнениями

$$\ddot{\rho} = -\frac{k_1^2}{r^2} \left[ u_1''(z) \rho - \frac{\rho^3}{8} u_1^{IV}(z) \right], \quad (5)$$

$$\ddot{z} = + \frac{2k_1^2}{f^2} \left[ u_1'(z) - \frac{\rho^2}{4} u_1'''(z) \right]. \quad (6)$$

Разыскивая решение системы нелинейных уравнений (5)—(6) с теми же начальными данными, что и параксиальной системы (2)—(3), в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \rho_1(\tau, d) + \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \rho_3(\tau, d), \\ z &= z_1(\tau, d) + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot z_2(\tau, d), \end{aligned}$$

можно для неизвестных функций  $\rho_3$  и  $z_2$ , удовлетворяющих, очевидно, нулевым начальным данным, получать систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_3 &= - \frac{k_1^2}{f^2} \left[ u_1''(z_1) \rho_3 - \frac{\rho_1^3}{8} u_1^{IV}(z_1) + \rho_1 u_1'''(z_1) z_2 \right], \\ \ddot{z}_2 &= + \frac{2k_1^2}{f^2} \left[ u_1''(z_1) z_2 - \frac{\rho_1^2}{4} u_1'''(z_1) \right]. \end{aligned}$$

Время вылета из 1-й линзы в параксиальном приближении  $\tau_k$  и с учетом продольной сферической аберрации  $\tau_f$  определяются двумя разными уравнениями

$$\begin{aligned} z_1(\tau_k) &= 1, \\ z_1(\tau_f) + \operatorname{tg}^2 \alpha z_2(\tau_f) &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Из двух последних уравнений можно выразить  $\tau_f$  в форме ряда  $\tau_f = \tau_k + \tau_0 \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots$ , где константа  $\tau_0$  получается (после элементарного разложения в ряд Тейлора условия (7)) в виде

$$\tau_0 = -z_2(\tau_k) / \dot{z}_1(\tau_k) = -z_2(\tau_k) / \dot{z}_{1k}.$$

Следовательно, плоскость гауссова изображения 1-й линзы с учетом поправки на сферическую аберрацию 3-го порядка частица покинет не в момент, определяемый параксиальным решением, а позже на величину

$$\Delta \tau = \tau_f - \tau_k = -\operatorname{tg}^2 \alpha z_2(\tau_k) / \dot{z}_{1k}.$$

Последняя формула отвечает реальному времени

$$\Delta t = (\tau_f - \tau_k) \frac{d}{v \cos \alpha} = - \frac{d}{v \cos \alpha} \operatorname{tg}^2 \alpha z_2(\tau_k) / \dot{z}_{1k}. \quad (8)$$

Из-за неодновременности старта частиц в плоскости гауссова изображения 2-й линзы возникнет пространственно-временная аберрация 1-го порядка, определяемая формулой [5, 6]

$$\Delta \rho = C_{\rho 2} M_2 v_1 \sin \beta \Delta t, \quad (9)$$

где коэффициент пространственно-временной аберрации 1-го порядка для 2-й линзы есть  $C_{\rho 2} = -1 + \Gamma_2 M_{\rho 2} / M_2$ ,  $M_{\rho 2}$  — продольное увеличение второй линзы,  $v_1$  — реальная скорость, с которой покидает первую линзу частица, влетевшая в нее со скоростью  $v$ .

Подставляя в формулу (9) величину  $\Delta t$  из (8) и выделяя член, пропорциональный клубу начального угла вылета  $\alpha$ , можно получить вклад в сферическую аберрацию 3-го порядка, возникающий из-за нестационарности линз дублета и отсутствующий в случае дублета статических линз:

$$\Delta\rho = -C_{i2}M_2\Gamma_1 \frac{v_1}{v} d \frac{z_2(\tau_k)}{\dot{z}_{1k}} \alpha^3.$$

Отношение скоростей частицы до влета и после вылета из 1-й линзы в последней формуле может быть заменено выражением  $\dot{z}_{1k}/d$ , так что окончательно, с учетом формулы (1), коэффициент сферической aberrации 3-го порядка дублета осесимметричных изотраекторных линз несколько упрощается и принимает окончательный вид

$$C_3 = C_{31} + C_{32} \frac{\Gamma_1^3}{M_1} - C_{i2} \frac{\Gamma_1}{M_1} z_2(\tau_k). \quad (10)$$

Полученное выражение дает численный алгоритм для расчета сферической aberrации дублета. Сначала необходимо решить параксиальные уравнения для 1-й и 2-й линз, затем рассчитать сферическую aberrацию отдельно 1-й и 2-й линз, затем решить систему уравнений в вариациях (5)–(6) для 1-й линзы, после чего численно найденную величину  $z_2(\tau_k)$  подставить в окончательное выражение (10) и получить ответ. Конечно, особенно полезна полученная формула при изучении дублетов линз с аналитически заданным потенциалом на оси, когда необходимо подбирать параметры линз таким образом, чтобы устранялась сферическая aberrация дублета изотраекторных осесимметричных электрических линз, каждая из которых обладает ненулевой сферической aberrацией 3-го порядка.

---

*Работа поддержана грантом Министерства образования РФ, проект E00-3.5-284.*

#### Л и т е р а т у р а

1. Друде П. Оптика. — Л. — М.: ОНТИ, 1935.
2. Хокс П., Каспер Э. Основы электронной оптики. — М.: Мир, 1993.
3. Глазер В. Основы электронной оптики. — М.: ГТТИ, 1957.
4. Scherzer O. // Optik. 1947. В. 2. Н. 2. S. 114.
5. Матышев А. А. Изотраекторная корпускулярная оптика. — СПб.: Наука, 2000.
6. Матышев А. А. // Прикладная физика. 2000. № 2. С. 149.

## On spherical aberration of systems of axisymmetric isotrajectory lenses

A. A. Matyshev

St.-Petersburg State Technical University, St.-Petersburg, Russia

*The method of calculation of the 3-rd order spherical aberration of the pair of axisymmetric isotrajectory electric lenses is described.*