

УДК 539.1

Симплектический интегратор для моделирования движения частицы в сложных магнитных полях

Е. Б. Левичев, П. А. Пиминов

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

Магнитное поле сильнополевых "змеек" для генерации синхротронного излучения обычно имеет сложное пространственное распределение, и изучать движение частиц в таком поле аналитически практически невозможно. Рассмотрен простой и надежный симплектический алгоритм для численного моделирования движения частицы в сложном магнитном поле. Входные значения для численного интегрирования — двумерный массив значений поля — могут быть взяты из результатов измерения или моделирования магнита. В качестве примера рассмотрено движение заряженной частицы через трехполюсную сверхпроводящую "змейку" с максимальным полем 7 Тл.

Циклические ускорители заряженных частиц неизбежно содержат участки с нелинейным магнитным полем, и при моделировании движения частицы в таких полях возникает вопрос о выборе метода интегрирования. Вопрос этот связан с тем, что такие методы, в общем, не всегда обеспечивают симплектическое (сохраняющее фазовый объем) преобразование координат при пошаговом решении уравнений движения.

Настоящая работа посвящена практической реализации простого и быстрого симплектического алгоритма для численного изучения движения заряженной релятивистской частицы в произвольном магнитном поле, неоднородном по всем трем координатам. В качестве примера рассматривается случай сильнополевого сверхпроводящего вигглера ("змейки"), установленного в прямолинейном промежутке циклического ускорителя — источника синхротронного излучения.

Напомним, что преобразование переменных динамической системы $F(\bar{q}, \bar{p})$ в $2N$ -мерном фазовом пространстве симплектично, если [1]

$$M^T J M = J,$$

где M — якобиан преобразования F ,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

а I — единичная матрица размерности N . Как следствие, $\det M = 1$.

Эволюция гамильтоновой системы в фазовом пространстве описывается симплектическим преобразованием координат. Поскольку симплектичность подразумевает сохранение интегральных инвариантов Пуанкаре, этим обеспечивается автоматическое выполнение теоремы Лиувилля о сохранении плотности потока фазовых траекторий системы.

Несимплектические алгоритмы (например, популярный метод Рунге-Кутты) не обеспечивают выполнение равенства $\det M = 1$ и приводят при численном исследовании консервативных систем к ложному затуханию или раскачке колебаний, что вызывает подавление слабых реальных и возникновение несуществующих динамических эффектов.

Алгоритм интегрирования

В настоящее время разработано достаточно много численных интеграторов, обеспечивающих симплектичность преобразования координат [2]. Для нашего случая мы выбрали простую и надежную схему Верле [3]. Рассмотрим гамильтониан системы в виде

$$H(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + V(\bar{q}).$$

Согласно Верле, переход от координат (q_i, p_i) в момент времени t к координатам (\bar{q}_i, \bar{p}_i) в момент времени $t + \Delta t$ осуществляется с помощью канонического преобразования

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = \bar{p}_i + \Delta t \frac{\partial H(q, \bar{p})}{\partial q_i}, \quad (1)$$

$$\bar{q}_i = \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_i} = q_i + \Delta t \frac{\partial H(q, \bar{p})}{\partial \bar{p}_i}$$

с производящей функцией $F(q, \bar{p}, \Delta t) = q \bar{p} + \Delta t H(q, \bar{p})$. Ранее такая схема применялась к рассмотрению движения частицы в спиральном ондуляторе, для которого магнитное поле может быть описано аналитически [4]. Ниже мы рассматриваем реализацию этого алгоритма для случая задания произвольного магнитного поля двумерным массивом значений, полученных экспериментально или с помощью моделирования модели магнита.

Движение заряженной частицы в циклическом ускорителе принято рассматривать в 6-мерном фазовом пространстве $(x, p_x, z, p_z, -l, p_{-l})$, где x и z — поперечные координаты (радиальная и аксиальная), l — длина траектории рассматриваемой частицы, а $p_{-l} = \Delta p / p_0$ — сопряженный ей канонический импульс. При данных обозначениях гамильтониан релятивистской частицы в магнитном поле имеет вид [4]

$$H = -\frac{e}{p_0} A_s - \sqrt{(1 + p_{-1})^2 - \left(p_x - \frac{e}{p_0} A_x\right)^2 - \left(p_z - \frac{e}{p_0} A_z\right)^2}, \quad (2)$$

где $A_{x,z,s}$ — соответствующие компоненты векторного потенциала магнитного поля.

Здесь необходимо сделать замечание. Для циклических ускорителей принята т. н. сопровождающая система координат, движущаяся со средней скоростью пучка вдоль некоторой опорной замкнутой орбиты. Поскольку опорная орбита изменяет свое направление в магнитном поле, приходится учитывать зависимость направления ортов такой криволинейной системы координат (Серре-Френе) от мгновенной кривизны орбиты. При этом выражения, описывающие движение частицы в "змейке", для которой обычно такая орбита может быть найдена только численно, принимают весьма сложный вид (см. например [5]).

Однако при компьютерном моделировании нет необходимости использовать сопровождающую систему координат, тем более, что узнать замкнутую орбиту в общем случае мы можем, только рассмотрев движение частицы вдоль всего кольца ускорителя с учетом различного рода возмущений. Изучая движение частицы в поле "змейки", проще выбрать естественную систему — декартовую, для которой продольная ось s совпадает с осью "змейки". Это тем более удобно, что моделирование или измерение магнитного поля делается именно в такой системе координат.

Для такой декартовой системы координат с нулевой кривизной и записан гамильтониан (2).

Для применения схемы Верле и упрощения записи:

- разложим корень в (2) по степеням малости, учитывая, что все слагаемые под корнем в релятивистском случае много меньше единицы (это единственное упрощение, которое делается);

- выберем калибровку векторного потенциала $A_x = 0$ (именно такой выбор наиболее удобен для наших исходных данных, см. ниже);

- введем обозначения $u = eA_z / p_0$, $w = eA_s / p_0$.

При вышеперечисленных условиях применение общей схемы (1) к гамильтониану (2) позволяет разрешить преобразование в явном виде и приводит к следующим выражениям, связывающим значения переменных в моменты времени s и $s + \Delta s$:

$$\bar{z} = z + \Delta z = z + \Delta s \left(\frac{p_z - u + \Delta s w_z}{1 - \Delta s u_z} \right), \quad \bar{p}_z = p_z + \Delta z u_z + \Delta s w_z, \quad (3)$$

$$\bar{p}_x = p_x + \Delta z u_x + \Delta s w_x, \quad \bar{x} = x + \Delta s \bar{p}_x,$$

где введено обозначение $u_y = \partial u / \partial y$ и аналогично для w . Выражения (3) для простоты выписаны для $p_{-1} = \Delta p / p_0 = 0$, однако не составляет труда получить их и для общего случая произвольного импульса частицы. Для этого нужно произвести следующую замену:

$$\Delta s \rightarrow \frac{\Delta s}{1 + \Delta p / p_0} \quad \text{и} \quad w \rightarrow w(1 + \Delta p / p_0). \quad (4)$$

После такой замены преобразование (3) может быть использовано для изучения движения частицы с учетом синхротронных колебаний.

Как несложно видеть из вида производящей функции (1), ошибка приведенного алгоритма имеет порядок Δs^2 . Можно продолжить построение алгоритма интегрирования для более высоких порядков по Δs , однако такой выигрыш, в точности использующий более сложные уравнения, потребует увеличения процессорного времени счета. Та же точность может быть получена с помощью простых выражений (3), если уменьшать шаг интегрирования.

Представление исходных данных

Магнитное поле сверхпроводящей змейки имеет сложное трехмерное распределение, которое невозможно описать аналитически и которое на практике получается либо с помощью численного моделирования, либо путем измерения. Кажется естественным и удобным напрямую брать результаты измерения или моделирования в качестве исходного массива данных для интегрирования уравнений движения частицы. Обычно распределение магнитного поля "змейки" измеряется горизонтальной линейкой, состоящей из N датчиков Холла, перемещаемой вдоль оси "змейки" с некоторым шагом. Получаемый массив значений магнитного поля $B_z(x_i, z = 0, s_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, где M — число шагов, может быть использован для вычисления векторного потенциала, необходимого для реализации алгоритма (3).

Запишем компоненты векторного потенциала для случая магнитного поля, обладающего горизонтальной плоскостью симметрии, в следующем виде [6]:

$$A_x = 0 \text{ (из условия калибровки);}$$

$$A_z(x, z, s) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{z,n+1,2m+1}(s) x^{n+1} z^{2m+1}; \quad (5)$$

$$A_s(x, z, s) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{s,n+1,2m}(s) x^{n+1} z^{2m}.$$

Магнитное поле также может быть представлено в виде ряда

$$B_z(x, z, s) = \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{z,n,2m}(s) x^n z^{2m}; \quad (6)$$

$$B_s(x, z, s) = \sum_{n,m=0}^{\infty} b_{s,n,2m+1}(s) x^n z^{2m+1}; \quad (7)$$

$$b'_{z,n,2m} = (2m + 1)b_{s,n,2m+1},$$

где $b' = db / ds$.

С одной стороны, коэффициенты ряда (6) и их продольные производные, определяющие коэффициенты ряда (7), могут быть найдены численно из массива значений магнитного поля $B_z(x_i, z = 0, s_j)$, с другой стороны — уравнение Максвелла $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ позволяет связать коэффициенты (6) и (5) рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} (2m + 1)(n + 1)a_{z,n+1,2m+1} &= b'_{z,n,2m}, \\ (n + 1)a_{s,n+1,2m} &= -b_{z,n,2m} \end{aligned} \quad (8)$$

и, таким образом, решить задачу нахождения компонент векторного потенциала по дискретному набору значений вертикального магнитного поля, измеренному (или рассчитанному численно) в плоскости симметрии "змейки".

Выражения (8) и (3) были запрограммированы и использованы для симплектического интегрирования движения заряженной частицы в поле сверхпроводящей "змейки".

Использование алгоритма

В качестве примера рассмотрим случай моделирования движения частицы в поле 3-полюсной сверхпроводящей "змейки" с максимальным полем 7 Тл. Такая "змейка" была спроектирована и изготовлена в ИЯФ СО РАН для источника синхротронного излучения [8]. "Змейка" представляет собой набор магнитов с плоскопараллельными полюсами (в нашем случае имеются три магнита), позволяющих получить жесткое рентгеновское излучение из центрального магнита с максимальным полем. Интеграл поля вдоль оси "змейки" равен нулю, чтобы не исказить замкнутую орбиту пучка. Однако наличие сильной продольной вариации и нелинейных компонент поля возмущает движение пучка и приводит к появлению большого количества нелинейных резонансов, которые могут привести к потере частиц пучка. Поэтому постановка "змейки" на накопитель заряженных частиц требует тщательного изучения ее влияния на параметры установки.

Магнитное поле "змейки" было измерено с помощью матрицы датчиков Холла, размещенных горизонтально и перемещаемых вдоль оси "змейки" в медианной плоскости специальным высокоточным механизмом. Полученный таким образом массив значений $B_z(x_i, z = 0, s_j)$ использовался в качестве входных значений, как это было описано выше.

На рис. 1 показано распределение поля вдоль оси "змейки": видно, что магнитное поле сильно неоднородно. Нелинейные компоненты присутствуют и в поперечном распределении магнитного поля.

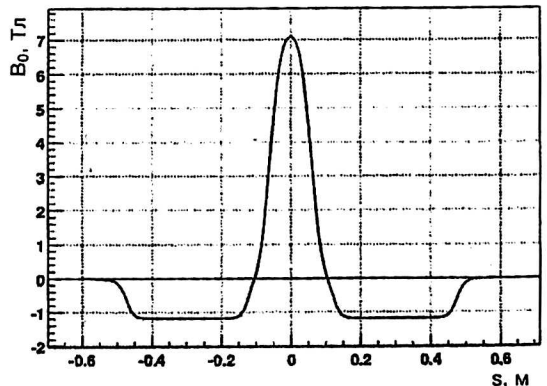


Рис. 1. Распределение вертикального магнитного поля вдоль оси "змейки"

Описываемый симплектический интегратор был реализован на языке C++ и включен в программу, моделирующую движение частицы в циклическом ускорителе. В качестве последнего мы рассмотрели источник синхротронного излучения на энергию 1,7 ГэВ, состоящий из восьми идентичных ячеек периодичности. Каждая ячейка представляет собой стандартный ахроматический поворот из двух поворотных магнитов и набора квадрупольных линз.

"Змейка" ставится в один из прямолинейных промежутков ахроматического поворота и, тем самым нарушает 8-кратную симметрию кольца. По массиву измерений магнитного поля "змейки" (512 шагов в продольном направлении) численным образом строится дискретный набор значений коэффициентов ряда компонент векторного потенциала.

Кроме нелинейностей, вносимых "змейкой", рассматривались также секступольные линзы для компенсации натурального хроматизма. Поскольку длина таких линз много меньше длины волны бетатронных колебаний, их можно рассматривать как дельта-функцию, что позволяет проинтегрировать соответствующие уравнения движения в явном виде.

Горизонтальный фазовый портрет движения частицы невозмущенного полем "змейки" показан на рис. 2. Частица "запускалась" на некотором начальном азимуте с отклонением по горизонтали и ее движение прослеживалось в течение 10 000 оборотов.

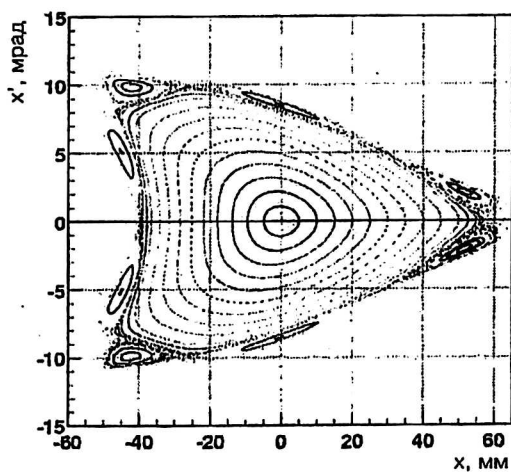


Рис. 2. Горизонтальные фазовые траектории невозмущенного движения

На рис. 2 видны регулярные фазовые кривые, и только на границе динамической апертуры имеется резонанс восьмого порядка и стохастический слой вокруг него. Горизонтальная динамическая апертура (т. е. область устойчивого движения пучка) в этом случае $\approx (-40, +50)$ мм.

Рис. 3, а и б показывает структуру горизонтального фазового пространства для тех же условий, что на рис. 2, но с "включенной" сверхпроводящей "змейкой". Из сравнения фазовых портретов, во-первых, можно сделать вывод о том, что "змейка" вносит сильное возмущение в движение частицы: динамическая апертура уменьшилась до размера ± 35 мм, и внутри ее появились достаточно мощные резонансы 5-, 6- и 7-го порядка. Во-вторых, сравнивая рис. 3, а и б, можно видеть результат несимплектичности алгоритма Рунге-Кутты 4-го порядка. Регулярные кривые отчетливо видны на рис. 3, б, на рис. 3, а превращаются в размытые слои, которые на больших амплитудах создают ложное впечатление наличия сильной стохастической компоненты.

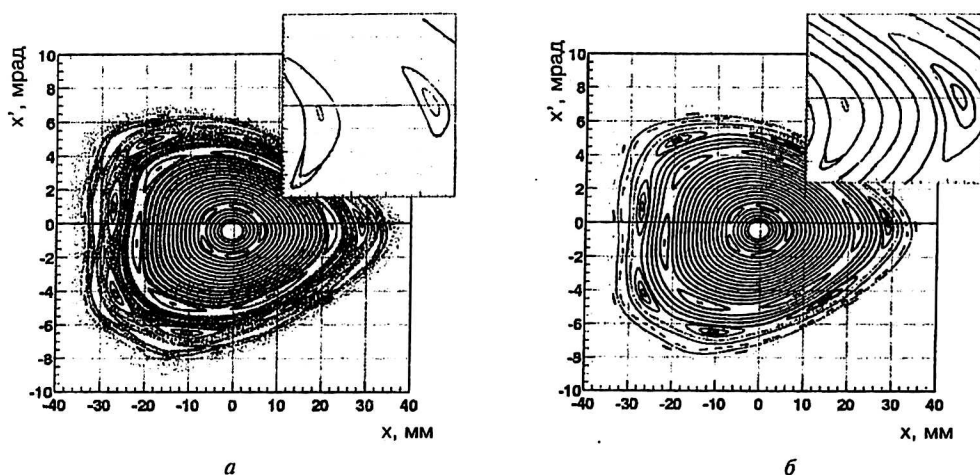


Рис. 3. Горизонтальные фазовые траектории с учетом поля "змейки":
 а — интегрирование методом Рунге-Кутты; б — интегрирование симплектическим методом

Другое важное свойство используемого симплектического алгоритма — скорость счета. В то время как для получения фазовой траектории из 10 000 оборотов методом Рунге-Кутты требуется 59 с процессорного времени (IBM PC Pentium 630 МГц), использование симплектического алгоритма позволяет уменьшить это время до 22 с. Для сравнения можно сказать, что расчет 10 000 оборотов частицы без "змейки" (но с нелинейностями секступольных линз) требует 1 с процессорного времени.

Заключение

Разработан и реализован симплектический метод интегрирования, позволяющий изучать движение релятивистской заряженной частицы в сложном нелинейном магнитном поле сверхпроводящей "змейки". В качестве привлекательных сторон метода можно отметить следующее:

- метод сохраняет плотность потока фазовых траекторий;
- не требуется использования сложной криволинейной системы координат, привязанной к орбите пучка в поле "змейки";
- преобразование координат получено в явном виде и не требует численного решения неявных уравнений;
- уравнения преобразования являются достаточно простыми и обеспечивают высокую скорость реализации.

Литература

1. Goldstein H. Classical Mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley, NY 1960.
2. San-Serna J. M. Symplectic Integrators for Hamiltonian Problems: an Overview. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
3. Verlet L. // Phys. Rev. 1967. № 98. P. 159.
4. Forest E., Ohmi K. KEK Report 92-14, September 1992.
5. Courant E. D., Snyder H.S. // Ann. Phys. USA. 1958. № 3.
6. Smith L. ESG TECH. Note-24.
7. Gardner C. J. The Vector Potential In Accelerator Magnets // Particle Accelerators, 1991, V. 35. P. 215—226.
8. Borovikov V. et. al. Proposal of superconducting 7 Tesla wiggler for LSU-CAMD // NIM A 405. 1998. P. 208—213.

The symplectic integrator for simulation of driving the corpuscle in composite magnetic fields

E. B. Levichev, P. A. Piminov

Budker's Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, Russia

The strong magnetic field of "S-turns" for generation of synchrotron emission has usually composite spatial distribution, and practically it is impossible to study the motion of corpuscles in such field analytically. In the paper the simple and reliable symplectic algorithm for numerical modeling the motion of a corpuscle in a composite magnetic field is surveyed. The input values for numerical integration — a bivariate array of field values — can be taken from results of measuring of simulation of a magnet. The motion of a charged particle through the triple-pole superconducting "S-turn" with a field maximum of 7 Telsa is surveyed as an example.