

УДК 533.537

## **Новые результаты геометризованной теории плотных электронных пучков**

**(Обзор)**

*В. А. Сыровой*

ГУП "Всероссийский электротехнический институт, им. В. И. Ленина",  
Москва, Россия

*Обсуждаются новые результаты геометризованной теории — наиболее нового раздела современной оптики плотных электронных пучков. Они связаны с моделями высших приближений для непараксиальных осесимметричных и ленточных, нерелятивистских и релятивистских потоков применительно к проблемам расчета электронно-оптических систем (ЭОС) перспективных пучково-плазменных приборов (ППП) СВЧ и мощных электронно-лучевых вентилях (ЭЛВ). Для пространственных электростатических потоков в геометризованном варианте рассматривается как обратная задача (синтез), так и прямая постановка (анализ) о распространении пучка в заданном внешнем поле, традиционно решаемая с применением лобовых численных методов интегрирования исходных уравнений в частных производных. Аппаратом геометризованных моделей являются обыкновенные дифференциальные уравнения.*

Геометризованная теория плотных релятивистских потоков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле представляет собой наиболее новый раздел корпускулярной оптики, основанный на новой форме уравнений пучка. Предыстория ее развития и основные результаты, полученные к 1999 г., обсуждались в работе [1].

Под геометризованными понимаются уравнения пучка, записанные в заранее неизвестной неортогональной системе координат  $x^i$ , связанной с геометрией потока. Возможны два варианта геометризации: в первом из них оси  $x^1$  совпадают с траекториями частиц, во втором — поверхности  $x^2 = \text{const}$  являются трубками тока. Уравнения пучка при этом включают элементы метрического тензора  $g_{ik}$  системы  $x^i$ , которые удовлетворяют условиям эвклидовости пространства — системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Анализ упомянутой совокупности соотношений [1] в первом варианте геометризации приводит к заключению о возможности включения пространственных траекторий в качестве координатных линий  $x^1$  в существенно неортогональную систему с пятью отличными от нуля элементами метрического тензора, имеющего в трехмерном случае шесть независимых компонент, при произвольном задании шестого элемента  $g_{12}$ , ответственного за неортогональность осей  $x^1, x^2$ . Для потенциальных электростатических течений система имеет “наименее неортогональный” вид, при котором  $g_{12} = g_{13} \equiv 0, g_{23} \neq 0$ .

Во втором варианте геометризации к продольной компоненте скорости  $v^1$  вдоль оси  $x^1$  добавляется компонента  $v^3$ , трансформирующаяся в осесимметричном случае в азимутальную, в результате чего система становится “более ортогональной” за счет тождества  $g_{13} \equiv 0$ .

Уравнения для физических параметров потока и компонент  $g_{ik}$  дополняются дифференциальными соотношениями, выражающими декартовы координаты  $y^j$  через криволинейные  $x^i$ .

Оказалось, что “наиболее естественное” предположение о нулевом значении произвольной функции  $g_{12}$  приводит к ограничениям по ориентации магнитного поля на катоде, свойственным традиционной параксиальной теории, которая формулируется в ортогональной системе: магнитное поле должно быть направлено либо по нормали, либо по касательной к стартовой поверхности.

В осесимметричном случае систему геометризованных уравнений удалось представить в виде соотношения на трубке тока  $x^2 = \text{const}$ , в которое входят только продольные производные, и системы эволюционных уравнений для физических и геометрических параметров задачи. В левой части каждого из этих уравнений стоит производная по поперечной координате  $x^2$ , а правая часть образована функциями и их продольными производными.

Так, для плоскосимметричных электростатических нерелятивистских потоков соотношение на трубке тока  $x^2 = \text{const}$  имеет вид:

$$\frac{u^2}{h_1} \left( \frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} = - \frac{\varphi_{,1}}{h_1} \frac{h_{2,1}}{h_1} - h_2 \left[ 2k_1^2 u^2 + \frac{1}{h_1} \left( \frac{\varphi_{,1}}{h_1} \right)_{,1} \right] + \frac{h_{20} J}{u}; \quad (1)$$

$$g_{11} \equiv h_1^2, \quad g_{22} \equiv h_2^2.$$

Эволюционная система образована уравнениями:

$$\begin{aligned}
 Z_{,2} &= -h_2 \sin \theta, \quad R_{,2} = h_2 \cos \theta, \quad \varphi_{,2} = h_2 E_v, \quad E_v = k_1 u^2; \\
 \theta_{,2} &= \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad h_{1,2} = -h_1 h_2 k_1, \quad u_{,2} = -h_2 k_1 u, \quad k_{1,2} = h_2 k_1^2 + \frac{1}{h_1} \left( \frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}; \\
 E_{v,2} &= h_2 \left[ k_1 E_v - \frac{1}{h_1} \left( \frac{\varphi_{,1}}{h_1} \right)_{,1} \right] - \frac{h_{2,1}}{h_1} \frac{\varphi_{,1}}{h_1} + \frac{h_{20} J}{u}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь и ниже  $\varphi, u$  — потенциал и продольная компонента скорости, соответственно;  $J$  — плотность тока эмиссии;  $k_1, k_2$  — главные кривизны трубок тока;  $Z, R$  — координаты в плоскости течения или в меридиональной плоскости;  $\theta$  — угол наклона трубки тока к оси  $Z$ ;  $E_v$  — нормальная к трубке тока компонента электрического поля; нижний индекс после запятой означает частную производную по соответствующей координате ( $\varphi_{,1} \equiv \partial\varphi/\partial x^1$ ,  $\varphi_{,2} \equiv \partial^2\varphi/\partial x^2\partial x^1$ ,  $\varphi_{,x} \equiv \partial\varphi/\partial x$ ); нижний индекс ноль относит величины к стартовой поверхности  $x^1 = 0$ , а верхний индекс ноль в скобках — к базовой трубке тока  $x^2 = 0$ .

Упомянутая трансформация исходной системы позволила сформулировать метод синтеза непараксиальных релятивистских потоков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле, основанный на наращивании на базовую трубку тока с известными распределениями параметров нескольких узких полос [1].

В отличие от традиционной асимптотической теории параксиальных и приповерхностных пучков с малым геометрическим параметром  $\epsilon$ , уравнения которой получаются отбрасыванием ряда членов высших порядков, выходящих за рамки принятой точности, уравнения геометризованной теории представляют собой точные соотношения. При описании “узких” пучков формулируется способ выделения такого фрагмента без попытки упростить уравнения, сделав их при этом приближенными.

Как общие соображения (связь системы координат с действительными характеристиками исходных уравнений) [1], так и результаты тестирования [2] показывают, что геометризованный формализм при исследовании “узких” пучков позволяет описывать существенно непараксиальные конфигурации с неоднородным распределением параметров по сечению потока.

Обсуждаемые ниже новые результаты связаны с высшими приближениями геометризованной теории. Общий алгоритм получения  $n$ -го приближения сводится к  $n$ -кратному дифференцированию соотношения типа (1) по  $x^2$ , исключению возникающих при этом поперечных производных с помощью эволюционной системы вида (2) и записи результата на базовой трубке тока  $x^2 = 0$ , где в качестве продольной координаты  $x^1$  используется длина дуги обходящей  $l$ ; при этом  $h_1 \equiv 1$ .

В результате решение имеет вид фрагмента ряда Тейлора по поперечной координате, например

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi_{,2}^{(0)} y + \frac{1}{2} \varphi_{,22}^{(0)} y^2 + \dots, \quad x^2 \equiv y. \tag{3}$$

Высшие производные в формуле (3) возникают при дифференцировании уравнений (2) эволюционной системы по  $x^2$ , исключении из правых частей возникающих соотношений поперечных производных с помощью той же системы и записи результата при  $x^2 = 0$  с  $x^1 \equiv l$ .

Начальные данные (в общем случае асимптотики) для уравнений высших порядков, а также поперечные производные плотности тока эмиссии  $J$ , входящие в правые части этих уравнений, следуют из локального рассмотрения области вблизи стартовой поверхности  $x^1 = 0$ .

В введённом выше определении номер  $n$  приближения совпадал с порядком поперечной производной функции  $h_2$ , используемой в модели. Заметим, что порядки производных у  $h_2$  и  $J$  при этом одинаковы. В результате уравнение (1), записанное при  $x^2 = 0$ , определяет нулевое приближение геометризованной теории, а модель, включающая  $h_{2,2222}$ ,  $J_{,2222}$  — четвертое. В традиционной параксиальной теории для пучков с прямой осью нулевому приближению геометризованной теории соответствует первое параксиальное приближение, а четвертому — третье, которое никогда не рассматривалось.

Решение типа (3) в виде фрагмента ряда Тэйлора по поперечной координате по своим свойствам выгодно отличается от асимптотического ряда при традиционном параксиальном подходе, когда новый член часто не улучшает, а портит результат.

Ряд Тэйлора имеет равномерную ошибку по продольной координате, что особенно важно для потоков с высокой компрессией. Построение высших приближений геометризованной теории позволяет установить связь формы катода и распределения плотности тока эмиссии с конфигурацией базовой трубки тока и распределением потенциала на ней. Информация такого рода дает возможность исследовать принципиально новые варианты магнетронно-инжекторных пушек для ППП, проанализировать проблемы оптимальной посадки пучка на коллектор в ЭЛВ, сформулировать внутреннюю и внешнюю задачи синтеза для формально "тонких" пространственных электростатических пучков, а также построить модель распространения такого пучка в заданном трехмерном электростатическом поле.

### Тестовые задачи

Наиболее яркую демонстрацию эффектов, связанных с построением решения в виде асимптотического ряда, дает задача о расчете формирующих электродов для ленточной вырезки из плоского диода в параксиальном приближении. Эта задача формулируется следующим образом:

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = 0; \quad y = 0 : \varphi_e = U = x^{4/3}, \quad (\varphi_{,y})_e = 0.$$

Здесь  $x, y$  — декартовы координаты, индексом  $e$  отмечены значения на границе потока.

Решение определяется рядом

$$\varphi = \sum_{k=0} \varphi_{2k} \varepsilon^{2k}, \quad \varphi_0 = U, \quad \varphi_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} U^{(2k)} y^{2k}.$$

В третьем приближении для потенциала получаем:

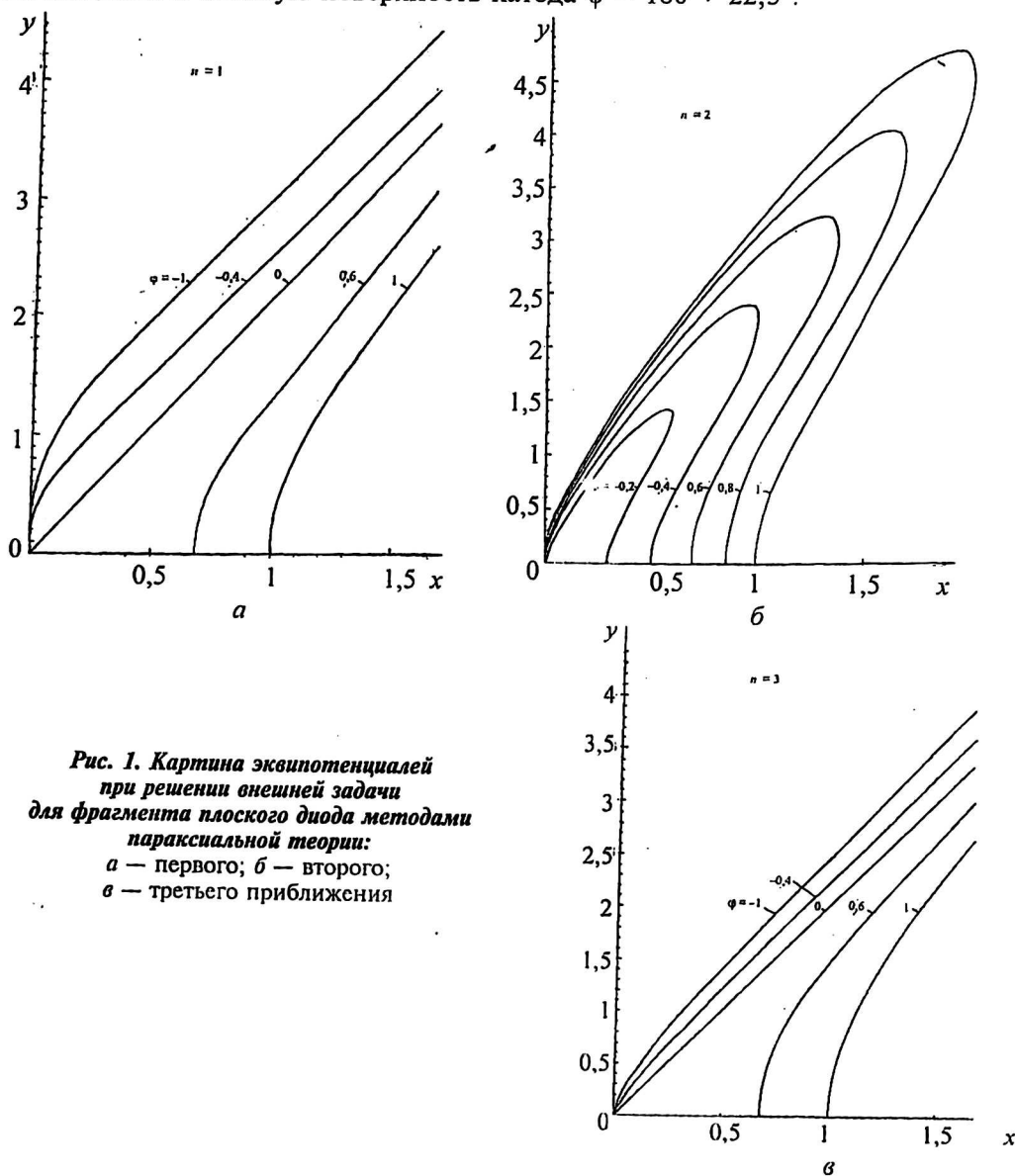
$$\varphi = U - \frac{1}{2!} U'' y^2 + \frac{1}{4!} U^{(4)} y^4 - \frac{1}{6!} U^{(6)} y^6 = UF(\psi);$$

$$U = x^{4/3} = (R \cos \psi)^{4/3}, \quad \theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \psi; \quad (4)$$

$$F(\psi) = 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \cdot \frac{4}{9} \theta^2 + \varepsilon^4 \frac{1}{4!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{10}{9} \theta^4 - \varepsilon^6 \frac{1}{6!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{88}{9} \theta^6.$$

Уравнения эквипотенциалей  $\varphi = \text{const}$  следуют из (4), причем для  $\varphi = 0$  имеем  $F(\psi) = 0$ . (5)

Известно, что нулевая эквипотенциаль точного решения изображается лучом, составляющим с границей пучка угол  $\psi = 67^{\circ},5'$ . Из формулы (5) видно, что линия  $\varphi = 0$  при параксиальном подходе остается лучом, угол наклона которого, однако, зависит от номера приближения. В первом приближении для  $\theta^2$  получаем значение  $9/2$ , что дает угол  $\psi = 64^{\circ},76'$ . Сохранение членов порядка  $\epsilon^4$  приводит к неожиданному результату: возникающее для  $\theta^2$  квадратное уравнение не имеет действительных корней. Нулевая эквипотенциаль в этом случае вырождается в точку  $x = y = 0$ . Сохранение членов порядка  $\epsilon^6$  дает кубическое уравнение с единственным действительным корнем  $\theta^2 \approx 4,2$ , что соответствует углу наклона  $\psi = 64^{\circ}$ . Картина поля в первом ( $n = 1$ ), втором ( $n = 2$ ) и третьем ( $n = 3$ ) приближениях изображена на рис. 1. Наиболее близким к точному решению оказывается низшее параксиальное приближение, но и оно не дает возможности правильно рассчитать отрицательные эквипотенциали и боковую поверхность катода  $\psi = 180 + 22,5^{\circ}$ .



**Рис. 1. Картина эквипотенциалей при решении внешней задачи для фрагмента плоского диода методами параксиальной теории: а — первого; б — второго; в — третьего приближения**

Таким образом, в оптике плотных пучков результаты высших приближений традиционной параксиальной теории представляют, как правило, сомнительную ценность, а их громоздкость не оправдывается уточнениями, которые они могут обеспечить.

В качестве тестовой задачи для оценки точности решения в форме ряда Тэйлора рассмотрим плоское нерелятивистское течение [3] со спирального катода по спиральным траекториям. Известно, что слабым местом любых приближенных и численных методов являются области с высокими градиентами: формы мучка (высокая компрессия) или параметров потока в поперечном сечении. Учитывая это, применим третье приближение геометризованной теории, которая дает точные значения трех первых производных плотности тока эмиссии  $J$ , к сходящемуся спиральному потоку. При точной экспоненциальной зависимости  $J$  от поперечной координаты  $x^2 \equiv q$  имеем

$$\bar{J} = e^{-2b_2q} = 1 - 5b_2q + \frac{25}{2}b_2^2q^2 - \frac{125}{6}b_2^3q^3.$$

Для  $b_2 = 0,4$  и  $q = \pm 0,3$  (относительная ширина потока 0,6 при перепаде плотности тока на кромках катода  $e^{1,2} = 3,32$ ) получаем приближенные значения

$$\bar{J} = 1 \mp 0,6 + 0,18 \mp 0,036,$$

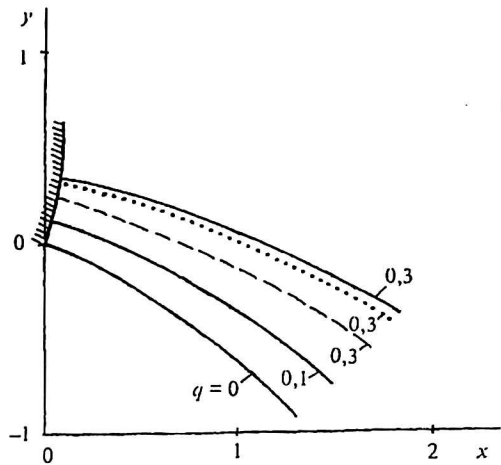
дающие во втором и третьем приближениях на верхней (+) и нижней (-) кромках катода ошибку  $\delta_+ = 5,7; 0,87 \%$ ;  $\delta_- = 2,3; 0,33 \%$ . Применение преобразования Шенкса [4] уменьшает эти величины до  $\delta_+ = 1,88; 0,11 \%$ ;  $\delta_- = 1,92; 0,16 \%$ .

Плотность тока эмиссии в рассматриваемом решении является наиболее быстро меняющейся величиной. Достаточно сказать, что приближенное значение потенциала имеет ту же ошибку, что и  $J$  при  $q = \pm 0,3$ , для пучка с поперечными размерами  $q = \pm 0,75$ , траектории в случае сходящегося потока при компрессии порядка 70 вычисляются во втором и третьем приближениях с ошибкой 0,25 и 0,04 %, соответственно, а координаты катода — с ошибкой менее 0,2 %. Таким образом, максимальная погрешность расчета параметров потока при использовании третьего приближения не превышает 0,2 %.

Рассмотрение расходящегося спирального потока в [2] обнаружило (рис. 2), что основным дефектом геометризованных моделей нулевого приближения для непараксиальных потоков являются ошибки при построении эмитирующей поверхности и вычислении плотности тока эмиссии  $J$  (первая точка приближенного решения на рис. 2 расположена на приближенно вычисленном катоде). При прочих равных условиях траектории представляют собой наиболее консервативные элементы модели, в то время как получение  $J$  связано с вычислением вторых продольных производных потенциала. Естественным шагом, компенсирующим указанные недостатки, является построение комбинированных моделей, сочетающих расчет траекторий в нулевом приближении с уточненным описанием прикатодной области.

**Рис. 2. Тестовая задача о расчете потока со спиральными траекториями со спирального катода:**

— точное решение;  
 - - - традиционная параксиальная теория;  
 ..... геометризованная теория нулевого приближения.  
 $q = 0$  — базовая трубка тока; при  $q = 0,1$  — два приближенных решения с графической точностью не отличимы от точного



### Комбинированные модели

К настоящему времени комбинированные модели построены для сплошного нерелятивистского пучка в специально ориентированном внешнем магнитном поле [5], допускающем использование ортогональной системы; для кольцевых незакрученных релятивистских течений при отсутствии внешнего магнитного поля для случая, когда базовая трубка тока находится в середине пучка, что позволяет рассматривать в два раза более широкие потоки, но требует работы в неортогональной системе ввиду ненулевого собственного азимутального магнитного поля на базовой поверхности [6]; для кольцевых нерелятивистских течений в магнетронно-инжекционной пушке при произвольной ориентации внешнего магнитного поля [7], требующей использования неортогональных координат.

Поясним принципы построения комбинированных моделей на примере магнетронно-инжекционной пушки, введя следующие обозначения для разложений вблизи катода  $x^1 = 0$  приведенных ниже функций:

$$h_1 = a_0(1 + \bar{a}_1 x^{1/3} + \bar{a}_2 x^{2/3} + \dots), \quad h_2 = b_0(1 + \bar{b}_3 x^{3/3} + \bar{b}_4 x^{4/3} + \dots), \quad h_3 = R,$$

$$g_{12} = b_0(G_2 x^{2/3} + G_3 x^{3/3} + \dots), \quad \varphi = \varphi_4 x^{4/3}(1 + \bar{\varphi}_5 x^{1/3} + \bar{\varphi}_6 x^{2/3} + \dots), \quad (6)$$

$$Y = f_5 l^{5/3} + f_6 l^{6/3} + \dots, \quad X = l - \frac{25}{42} f_5^2 l^{7/3} - \frac{5}{4} f_5 f_6 l^{8/3} + \dots, \quad X^{12} + Y^{12} = 1, \quad x \equiv x^1.$$

Здесь  $X = X(l)$ ,  $Y = Y(l)$  — параметрические уравнения базовой трубки тока, причем  $X$ ,  $Y$  — локальные декартовы координаты, направленные по нормали и касательной к катоду в точке старта.

Соотношение на трубке тока при  $x^1 \equiv l (h_1 \equiv 1)$  в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{u^2}{\sin \theta_{12}} [h_{2,11} - h_2 \theta_{12,1}^2 - \cos \theta_{12} g_{12,11}] = \left[ \frac{1}{\sin \theta_{12}} (\varphi_{,1} + \bar{\kappa}_2 \omega^2) - 2\omega M \right] \times$$

$$\times (h_{2,1} - \cos \theta_{12} g_{12,1}) - h_{2,1} \omega M \sin^2 \theta_{12} + h_2 \sin \theta_{12} [-2(k_1^2 u^2 + k_2^2 \omega^2) +$$

$$+ k_1 k_2 (u^2 + \omega^2) + \bar{\kappa}_2 \varphi_{,1} - \varphi_{,11} + 2k_2 H_l \omega - H_l^2 + \omega \sin \theta_{12} M_{,1}] +$$

$$+ \frac{h_{20} h_{30} J}{h_3 u} + \frac{h_{20} h_{30} L_0}{h_3} [H_l + 2(k_1 - k_2) \omega]; \quad H_l = L + M \cos \theta_{12}, \quad \bar{\kappa}_2 \equiv k_2 \operatorname{tg} \theta. \quad (7)$$

Здесь  $\omega$  — азимутальная компонента скорости;  $L, M$  — косоугольные проекции магнитного поля на оси  $x^1, x^2$ ;  $\theta_{12}$  — угол между осями  $x^1, x^2$ .

После интегрирования уравнения (7) при заданных распределениях  $\varphi, L, M$  и параметрах  $J, \bar{b}_3$  использование эволюционных уравнений для  $Z, R$  позволяет рассчитать конфигурацию трубок тока в нулевом приближении:

$$R = R^{(0)}(l) + R_2^{(0)}(l)y, \quad Z = Z^{(0)}(l) + Z_2^{(0)}(l)y, \quad x^2 \equiv y; \quad (8)$$

$$Z_2 = h_2 \cos \vartheta, \quad R_2 = h_2 \sin \vartheta, \quad \vartheta = \theta + \theta_{12}.$$

Здесь  $R^{(0)}(l), Z^{(0)}(l)$  — параметрические уравнения базовой трубки тока в системе  $Z, R$ . Для коррекции формул (8) вблизи катода  $x^1 = 0$  используются функции  $X(l), Y(l)$  из (6), вычисляемые в ходе более подробного рассмотрения прикатодной области.

Плотность тока эмиссии и кривизна катода  $\kappa_{10}$  описываются разложениями вида

$$J = J^{(0)} + J_{,2}^{(0)}y + \frac{1}{2}J_{,22}^{(0)}y^2 + \frac{1}{6}J_{,222}^{(0)}y^3, \quad \kappa_{10} = -\bar{b}_3^{(0)} + \kappa_{10,2}^{(0)}y + \frac{1}{2}\kappa_{10,22}^{(0)}y^2. \quad (9)$$

Выражение для градиента  $J$  следует из рассмотрения эволюционного уравнения для  $\varphi_2$  как баланс членов порядка  $x^{4/3}$  в случае произвольной продольной координаты, а для  $\kappa_{10}$  — из определения этой величины:

$$\frac{1}{b_0} \frac{J_{,2}}{J} = -5 \frac{a_{0,2}}{a_0 b_0} - \frac{15}{2} \bar{a}_1 \frac{G_2}{a_0^2}, \quad \kappa_{10} = -\frac{\bar{b}_3}{a_0}. \quad (10)$$

Входящие в формулы (9) производные получаются дифференцированием выражений (10) и определены через  $a_{0,222}, a_{0,22}, a_{1,22}, L_{0,2}, M_{0,2}, \bar{b}_{3,2}, \bar{b}_{3,22}$ . Первые три функции следуют из локального рассмотрения эволюционных уравнений высших порядков относительно  $h_{1,222}, h_{1,22}$ . Производные от компонент магнитного поля дают уравнения Максвелла. Функция  $\bar{b}_{3,2}$  следует из баланса членов порядка  $x^{7/3}$  эволюционного уравнения для  $\varphi_2$  в случае произвольной продольной координаты при структурировании левой части этого уравнения  $\varphi_{7,2}$  за счет функции  $\varphi_7$ , содержащей  $a_k$ , которая получается из соотношения на траектории (7), также записанного для произвольной координаты  $x^1$ :

$$\bar{\varphi}_7 = \frac{2}{3} \bar{a}_3 + \frac{8}{15} a_0 (\kappa_{10} + \kappa_{20}), \quad \kappa_{20} = -\frac{\sin \theta_0}{R_0}. \quad (11)$$

Недиагональный элемент метрического тензора  $g_{12}$  выбирается, исходя из требования регуляризации следующих функций и их поперечных производных, задействованных в модели:  $\varphi, \varphi_2, \varphi_{22}; h_1, h_{1,2}, h_{1,22}, h_{1,222}; k_1, k_{1,2}, k_{1,22}$ . При эмиссии в  $p$ -режиме регуляризация означает, что разложения приведенных наборов должны начинаться с  $x^{4/3}, x^0, x^{-1/3}$ , соответственно. В результате для  $G_k$  в (6) имеем

$$G_2 = \frac{3}{4} a_0^3 \bar{L}_0 \bar{M}_0; \quad G_3 = \frac{3}{2} \bar{a}_1 G_2;$$

$$G_4 = \left( \frac{7}{5} \bar{a}_2 + \frac{7}{16} \bar{a}_1^2 \right) \frac{G_2}{a_0^2} - \frac{3}{4} \bar{a}_1 \frac{a_{0,2}}{a_0 b_0} - \left( \frac{3}{10} \bar{L}_0^2 - \frac{3}{4} \bar{M}_0^2 \right) G_2; \quad (12)$$

$$\bar{L}_0 \equiv \frac{L_0}{V_2}, \quad \bar{M}_0 \equiv \frac{M_0}{V_2}, \quad V_2 = \left( \frac{9}{2} a_0^2 J \right)^{1/3}.$$

Полученное описанным выше способом выражение для  $\bar{b}_{3,2}$ , содержащее  $a_k \neq 0$ , позволяет выполнить дифференцирование по  $x^2$  и записать результат на базовой трубке тока  $x^1 \equiv l$  без рассмотрения соотношения на траектории высшего приближения относительно  $h_{2,22}$ .

Построенная модель магнетронно-инжекционной пушки обеспечивает управление формой катода и токоотбором с него. Функции  $\kappa_{10}$ ,  $\kappa_{10,2}$ ,  $\kappa_{10,22}$  выражаются через произвольные элементы  $\bar{b}_3$ ,  $f_9$ ,  $\bar{\varphi}_{13}$ , соответственно, а  $J_2$ ,  $J_{22}$ ,  $J_{222}$  зависят от произвольных параметров  $f_6$ ,  $\bar{\varphi}_{10}$ ,  $f_{12}$ . Распоряжаясь этими величинами, можно добиться любых наперед заданных значений для  $\kappa_{10}$ ,  $J$  и их производных. Например, для того чтобы поверхность катода была конусом, достаточно потребовать выполнения равенств

$$\bar{b}_3 = \bar{b}_{3,2} = \bar{b}_{3,22} = 0 \tag{13}$$

Плотность тока при учете третьей производной будет однородной при

$$a_{0,2} = a_{0,22} = 0, \quad \frac{a_{0,222}}{b_0^3} + \frac{3}{2} \frac{\bar{a}_{1,22}}{b_0^2} G_2 = 0.$$

Оценить точность модели можно, рассматривая функции  $J$  и  $\kappa_{10}$ , близкие к реализованным в магнетронно-инжекционных пушках для гиротронов [8]. Так, для случая слабо неоднородного магнитного поля

$$H \sim R^\alpha, \quad J \sim R^{1+3\alpha}, \quad \alpha = -0,1 \tag{14}$$

для пояска  $0,7 \leq R \leq 1,3$  на коническом катоде, средняя точка которого соответствует  $R = 1$ , относительная ошибка  $\delta$  вычисления  $J$  с использованием приближения (9) составляет  $\delta(0,7) = 1,13 \%$ ,  $\delta(1,3) = 0,48 \%$ .

В качестве модельной формы эмиттера возьмем кривую

$$R = Z^{1/\sqrt{3}}, \tag{15}$$

изображенную на рис. 3. При  $Z = 1$  она имеет наклон в  $30^\circ$ , а в пределах пояска  $0,7 \leq Z \leq 1,3$  отличается от конуса с ошибкой  $\delta(0,7) = 1,56 \%$ ,  $\delta(1,3) = 0,82 \%$ . В рамках приближения (9) отличие от точной кривой (15) составляет  $\delta(0,7) = 0,2 \%$ ,  $\delta(1,3) = 0,1 \%$ . Заметим, что отношение ширины пояска  $d$  к радиусу его центра  $R$  в пушках для гиротронов [8] имеет величину  $d/R = 0,125$ , а на рис. 3  $d/R = 0,75$ .

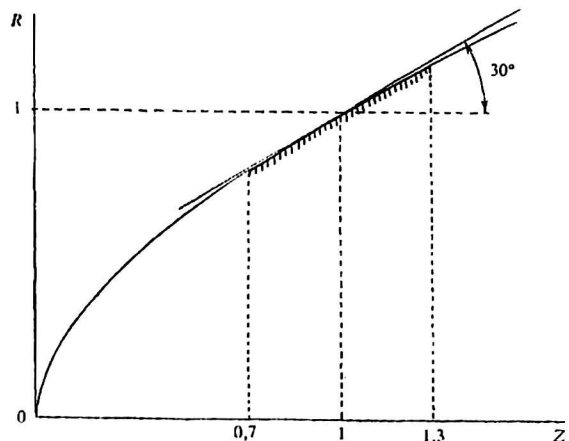


Рис. 3. Геометрия катода и эмиттирующий пояс при оценке точности комбинированной модели магнетронно-инжекционной пушки

### Модели высших приближений

Результаты тестирования, обсуждавшиеся в разделе "Тестовые задачи", стимулируют интерес к высшим приближениям теории, однако их построение в общем случае релятивистских потоков в произвольно ориентированном магнитном поле представляет с технической точки зрения довольно сложную задачу, что видно уже по теории первого приближения в работе [9]. Целесообразным поэтому представляется рассмотрение отдельных частных случаев, характеризующихся существованием ряда упрощающих факторов и имеющих в то же время практический интерес.

К таким частным случаям относятся: теория третьего приближения для сплошного релятивистского пучка в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле [5] (упрощающий фактор — базовая трубка тока, выродившаяся в ось симметрии  $Z$  системы); теория третьего приближения для незакрученного релятивистского трубчатого пучка при отсутствии внешнего магнитного поля (упрощающий фактор — внутренняя поверхность потока с нулевым собственным азимутальным полем в качестве базовой поверхности; система координат локально ортогональна не только на катоде, но и на базовой трубке тока) [6]; теория четвертого приближения для криволинейных и плоскосимметричных ленточных нерелятивистских потоков в специальном магнитном поле [7] (упрощающие факторы: нерелятивистские скорости, плоская геометрия трубок тока при возможной трехмерности траекторий, ортогональность системы); теория третьего приближения для криволинейных ленточных и плоскосимметричных релятивистских пучков в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле [8] (упрощающие факторы: плоская геометрия трубок тока, вырождение базовой поверхности в плоскость симметрии).

Проиллюстрируем теорию второго приближения соотношениями на базовой трубке тока для плоскосимметричных нерелятивистских электростатических течений [7]:

$$\begin{aligned} Lh_2 &\equiv u^2 h_{2,11} + \varphi_{,1} h_{2,1} + \varphi_{,11} = \frac{h_{20} J}{u} \equiv F, \\ Lh_{2,22} + A_{2,22} h_{2,11} + A_{1,22} h_{2,1} + A_{0,22} h_{2,2} &= F_{,22}. \end{aligned} \quad (16)$$

Коэффициенты  $A_k$  определены формулами:

$$A_2 = \frac{u^2}{h_1^2}, \quad A_1 = -\frac{h_{1,1}}{h_1^3} u^2 + \frac{1}{h_1^2} \varphi_{,1}, \quad A_0 = 2k_1^2 u^2 + \frac{\varphi_{,11}}{h_1^2} - \frac{h_{1,1}}{h_1^3} \frac{\varphi_{,1}}{h_1}. \quad (17)$$

Коэффициенты уравнения второго приближения в (16) описываются выражениями:

$$\begin{aligned} A_{2,22} &= 2uu_{,22} - u^2 h_{1,22}, \quad A_{1,22} = -u^2 h_{1,221} - \varphi_{,1} h_{1,22} + \varphi_{,221}, \\ A_{0,22} &= 4u^2 k_{1,2}^2 - \varphi_{,11} h_{1,22} + \varphi_{,2211} - \varphi_{,1} h_{1,221}, \quad F_{,22} = F \left( -\frac{u_{,22}}{u} + \frac{J_{,22}}{J} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференцирование эволюционной системы (2) даст следующие значения входящих в формулы (18) производных:

$$u_{,22} = -uh_2 h_{2,11}, \quad \varphi_{,22} = h_2 E_{v,2}, \quad E_{v,2} = 2k_{1,2} \varphi, \quad h_{1,22} = -h_2 k_{1,2}.$$

### Оптимизация параметров электронного потока на коллекторе ЭЛВ

Цель математического моделирования электронно-оптических систем ЭЛВ с ленточными пучками, проводящегося путем применения программ траекторного анализа [13], состоит в том, чтобы добиться минимизации отклонений от однородной плотности тока и от нормального падения электронов на собирающую поверхность, реализованную в виде наиболее технологичного эквипотенциального цилиндрического коллектора. Достижение этой цели обеспечит равномерную тепловую нагрузку и сведет к минимуму количество отраженных и вторичных электронов. Исследователи не видят принципиальных препятствий к построению идеального варианта, когда упомянутые отклонения на цилиндрическом коллекторе с постоянным потенциалом полностью отсутствуют.

Геометризованная теория четвертого приближения для нерелятивистских электростатических плоскосимметричных потоков [11] позволяет ответить на вопрос, не противоречат ли сформулированные выше требования законам природы [14]. Поскольку рассмотрение ведется в ортогональной системе  $x^1, x^1$ , то в качестве коллектора используем координатную линию  $x_1 = x_c^1$ , на которой будут выполнены условия ортогональной посадки электронного пучка. Проанализируем варианты дополнительных условий, которым можно удовлетворить на этой поверхности. Формулы типа (3) для кривизны  $\kappa^1$  линий  $x^1 = \text{const}$ , потенциала  $\varphi$  и плотности тока  $\rho u$ , которая имеет только одну продольную компоненту, в рамках четвертого приближения определены следующими фрагментами тэйлоровских разложений:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_{1c} + \frac{1}{2!} (\kappa_{1,22})_c y^2 + \frac{1}{4!} (\kappa_{1,2222})_c y^4; \\ \varphi &= \varphi_c + \frac{1}{2!} (\varphi_{,22})_c y^2 + \frac{1}{4!} (\varphi_{,2222})_c y^4 + \frac{1}{6!} (\varphi_{,222222})_c y^6; \\ \rho u &= (\rho u)_c + \frac{1}{2!} [(\rho u)_{,22}]_c y^2 + \frac{1}{4!} [(\rho u)_{,2222}]_c y^4. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция  $h_{2,2222}$  позволяет также вычислить производные  $R_{,22222}$  и  $Z_{,222222}$ , участвующие в определении параметрических уравнений траекторий  $Z = Z(l, y)$ ,  $R = R(l, y)$  с  $x^2 \equiv y$  в качестве параметра.

Требую, чтобы линия  $x^1 = x_c^1$  была цилиндром

$$\kappa_{1c} = \text{const}, \quad (\kappa_{1,22})_c = (\kappa_{1,2222})_c = 0,$$

приходим к равенствам вида:

$$\begin{aligned} I_{g2} &= I_{g2} [(h_{2,221})_c, (h_{2,22})_c, (\varphi_{,1})_c, (\varphi_{,11})_c] = 0, \\ I_{g4} &= I_{g4} [(h_{2,22221})_c, (h_{2,2222})_c, (\varphi_{,111})_c, (\varphi_{,1111})_c] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно, в рамках точности модели постоянная кривизна ортогональной к траекториям поверхности может быть обеспечена за счет выбора первой и второй, а затем третьей и четвертой производных потенциала в расположенной на линии симметрии точке с потенциалом  $\varphi_c$ . И потенциал, и плотность тока при  $x^1 = x_c^1$  будут переменными величинами, закон изменения которых определяется формулами из (19). Для решения, удовлетворяющего условиям (20), через точку с потенциалом  $\varphi_c$  можно, разумеется, про-

вести эквипотенциаль, которая будет иметь переменную кривизну, неортогональную посадку пучка и неоднородное распределение плотности тока.

Аналогичным образом требование эквипотенциальности для линии  $x^1 = x_c^1$  приводит к обращению в нуль трех функционалов  $I_{\varphi 0}$ ,  $I_{\varphi 2}$ ,  $I_{\varphi 4}$ , которые включают наборы  $(h_{2,1}, h_2, \varphi_{,1}, \varphi_{,11})_c$ ,  $(h_{2,221}, h_{2,22}, \varphi_{,111}, \varphi_{,1111})_c$ ,  $(h_{2,2221}, h_{2,2222}, \varphi_{,11111}, \varphi_{,111111})_c$ .

Требование однородного распределения плотности тока при  $x^1 = x_c^1$  дает два функционала  $I_{J2}$ ,  $I_{J4}$  с наборами  $(h_{2,221}, h_{2,22}, \varphi_{,111}, \varphi_{,1111})_c$ ,  $(h_{2,2221}, h_{2,2222}, \varphi_{,11111}, \varphi_{,111111})_c$ .

Проведенный анализ показывает, что при ортогональной посадке пучка на коллектор допустимо выполнение не более одного дополнительного условия: заданная форма, эквипотенциальность, однородность плотности тока. Физические последствия каждого из них могут иметь разную цену, учитываемую посредством весовых коэффициентов в функционале

$$I = K_g |I_{g2}^2 + I_{g4}^2| + K_\varphi |I_{\varphi 0}^2 + I_{\varphi 2}^2 + I_{\varphi 4}^2| + K_J |I_{J2}^2 + I_{J4}^2|.$$

Численные эксперименты, направленные на его минимизацию, могут выявить варианты, оптимальные с точки зрения практической реализации ЭОС ЭЛВ. Работа с аппаратом теории требует умения задавать распределение потенциала на оси симметрии системы, соответствующее ее физическим особенностям (ускорение, торможение, минимум потенциала перед коллектором) и притом имеющее непрерывные шестые производные.

### Магнитное сопровождение

В предыдущем разделе показано, как геометризованная теория может дать ответ на принципиальные вопросы о выполнении ряда условий на поверхности коллектора, которые исследователи этой проблемы по соображениям “здорового смысла” считали достижимыми, но которые в действительности никогда не могут быть реализованы.

Еще одним примером такого рода является понятие “идеального магнитного сопровождения” [11], при котором траектории электронов совпадают с магнитными силовыми линиями или трубки тока — с соответствующими поверхностями магнитного поля.

Известно, что на одномерные потоки в плоском, цилиндрическом и сферическом диодах не влияет однородное или убывающее с ростом радиуса радиальное магнитное поле, которое, однако, окажет определенное стабилизирующее воздействие на поток в случае его возмущения. На этом эффекте основаны некоторые модели с бесконечным сопровождающим магнитным полем, вынуждающим частицы двигаться по параллельным прямым.

В перечисленных случаях можно говорить об “идеальном” магнитном сопровождении, однако эти простые задачи не имеют большого практического значения и не требуют применения аппарата геометризованной теории. Ответ на вопрос о возможности идеального магнитного сопровождения в случае произвольных пространственных потоков следует из рассмотрения геометризованных уравнений трехмерного пучка [15]. Применительно к двумерным течениям совпадение трубок тока и силовых линий в плоскости  $Z, R$  имело бы место при  $M \equiv 0$ . Это требование предопределяет систему и тем самым дает отрицательный ответ на поставленный вопрос.

Максимальная близость к идеальному варианту достигается при выполнении условия  $M \equiv 0$  не во всем поле течения, а лишь на базовой трубке тока и при обращении поперечной компоненты магнитного поля в нуль на эмитирующей поверхности:  $M_0 \equiv 0$ . Именно этот режим следует иметь в виду, говоря о магнитном сопровождении.

### Геометризованная теория пространственных электростатических электронных пучков

В работе [16] при использовании неортогональной системы  $x^i$ , связанной с траекториями потока, рассмотрена задача расчета узкого пространственного релятивистского пучка в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле. В пространственном случае представление геометризованных уравнений в виде соотношения на трубке тока и эволюционной системы оказывается невозможным. В пространственном случае представление геометризованных уравнений в виде соотношения на трубке тока и эволюционной системы оказывается невозможным. При этом геометризованные уравнения могут быть представлены в виде соотношения на траектории, содержащего только производные по продольной координате  $x^1$ , и системы эволюционных уравнений первого порядка для диагональных элементов метрического тензора  $g_{aa} \equiv h_a^2$  ( $a$  — фиксирующий индекс) и углов наклона  $\nu_i, \psi_i, i = 1, 2, 3$ , определяющих ориентацию в пространстве криволинейных осей  $x^i$ . Там же наметен путь получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих поток, причем форма сечения и распределение потенциала в пучке определены как линейные функции поперечных координат  $x^\alpha$  ( $\alpha = 2, 3$ ), что в принятой терминологии соответствует геометризованной теории нулевого приближения.

В работе [17] подробно исследованы наиболее простые нерелятивистские электростатические потоки, алгоритмы расчета которых могут быть перенесены на более сложные случаи. Математическая модель, базирующаяся на отказе от лобового применения численных методов к уравнениям в частных производных, должна сводиться к системе обыкновенных уравнений, разрешенных относительно старших производных, которая может быть проинтегрирована с использованием стандартных алгоритмов. Рассмотрение этого вопроса [16] не доведено до такого результата.

Заметим, что для задачи синтеза лобовое использование численных методов невозможно из-за их отсутствия, поскольку эта задача сводится к задаче Коши для уравнений, имеющих как действительные, так и комплексные характеристики [1].

Кроме того, если в рамках нулевого приближения для двумерных систем существовали эволюционные уравнения, определяющие потенциал  $\phi$  и нормальное поле  $E_n$ , то в пространственном случае на границе потока можно вычислить только потенциал. В результате отсутствует необходимая информация для решения задачи о расчете формирующих электродов.

Перечисленные пробелы устранены в работе [17] за счет построения теории первого приближения для трехмерных электростатических потоков. Рассмотрение ведется в системе координат, для которой  $g_{12} = g_{13} \equiv 0, g_{23} \neq 0$  [1]. Модель описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого и шестого порядков, первая из которых не зависит от второй, и включает две произвольные функции продольной координаты и ряд произвольных параметров.

Как и во всякой геометризованной теории, физическая задача оказалась решенной, как только была сконструирована метрика системы координат, связанной с траекториями потока. В нулевом приближении это сводилось к вычислению на оси функций  $g_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 2, 3$ , в первом — к построению производных  $g_{\alpha\beta, \gamma}$ ,  $g_{11, \alpha\beta}$ ,  $\gamma = 2, 3$ .

Рассмотрение первого приближения позволяет определить главные кривизны катода и плотность тока эмиссии  $J$  с учетом первых и вторых производных, соответственно, и получить необходимую информацию для решения внешней задачи. Так, для  $J$  имеем:

$$\bar{J}_{, \alpha} = -5\bar{a}_{0, \alpha}, \quad \bar{J}_{, \alpha\beta} = -5\bar{a}_{0, \alpha\beta} + 30\bar{a}_{0, \alpha}\bar{a}_{0, \beta}; \quad \bar{f}_{, \alpha} \equiv \frac{f_{, \alpha}}{h_{\alpha}f}, \quad \bar{f}_{, \alpha\beta} \equiv \frac{f_{, \alpha\beta}}{h_{\alpha}h_{\beta}f}.$$

Знание поперечных производных потенциала с сохранением квадратичных членов

$$\varphi_{, \alpha} = -2h_{1, \alpha}\varphi, \quad \varphi_{\alpha\beta} = -2(h_{1, \alpha\beta} - 3h_{1, \alpha}h_{1, \beta})\varphi$$

позволяет вычислить как потенциал, так и нормальное поле на границе потока при заданном начальном контуре сечения.

При решении внешней задачи можно ориентироваться на два алгоритма [18]. В первом — тонкий пучок представляется как квазицилиндр и от системы  $l, s, q$  ( $s, q$  — нормаль, бинормаль), связанной с осевой кривой, осуществляется переход к деформированной системе  $\zeta, x, y$ , в которой симметризуется связанная с поперечными координатами часть лапласиана, а все операции с “быстрыми” поперечными координатами, участвующими в описании существенно неоднородной особенности вблизи кромки катода, удается включить в оператор нулевого приближения, что делает его более емким и позволяет надеяться, что этим приближением можно будет ограничиться. Дополнительное выделение степенного множителя в потенциале и отнесение сомножителя к квазиконстантам приводит решение к действительной части определенного интеграла, комплексный интеграл которого образован за счет аналитического продолжения функций, определяющих форму сечения.

Вторая возможность связана с нерегуляризованным параксиальным решением, при котором в ортогональной системе  $l, x, y$ , связанной с осью пучка, в уравнении Лапласа отбрасываются члены с продольными производными.

И в первом, и во втором вариантах необходимо знать приближенные конформные отображения сечения пучка на какую-либо каноническую область. Алгоритмы построения таких отображений разработаны для контуров, близких к многоугольникам. В этом случае решение при втором подходе может быть выражено через элементарные функции.

### Геометризованная теория распространения электронного пучка в заданном электростатическом поле

Эволюция релятивистского пучка с произвольным начальным сечением и однородным распределением плотности тока в заданном внешнем электромагнитном поле исследована в работе [19] на основе традиционной параксиальной теории трехмерных потоков первого приближения. Разработанный подход был применен к расчетам многопучковых многослойных и однослойных систем, в которых микропучок распространялся в поле эффективного сплошного или кольцевого макропотока, описывающего взаимодействие

микроструй. Итоги теории многопучковых взаимодействующих систем подведены в работе [20].

В начале статьи упоминалось, что геометризованный формализм имеет ряд преимуществ перед традиционной параксиальной теорией. Он позволяет исследовать ситуации, в которых эта теория не может быть применена [1] (произвольная ориентация магнитного поля, высокая компрессия), а при прочих равных условиях и заданной точности обеспечивает описание в 2—3 раза более широких потоков. Использование высших приближений открывает возможность исследования непараксиальных течений, причем неоднородность плотности тока эмиссии учитывается уже нулевым приближением.

Построенная в [17] модель первого приближения, реализующая синтез пучков с произвольным сечением при параболическом по поперечным координатам распределении плотности тока, описывается двумя системами обыкновенных дифференциальных уравнений, причем — как это всегда бывает — система нулевого приближения не зависит от функций первого приближения. Построение модели стало возможным в результате формулировки эволюционных уравнений для метрики, позволяющих отходить от оси пучка в поперечном направлении.

Цель работы [21] состоит в том, чтобы распространить геометризованный формализм на решение прямой задачи — задачи об эволюции пучка в заданном внешнем поле, которая традиционно относится к компетенции программ траекторного анализа, основанных на лобовом применении численных методов к исходным уравнениям в частных производных.

По сравнению с подходом из [19] можно ожидать расширения возможностей в смысле отказа от требований параксиальной теории: узости пучка и однородности параметров в поперечном сечении. При рассмотрении [17] были выявлены две произвольные функции продольной координаты  $\psi_2$  и  $\psi_{2,2}$ . Эти функции, аналогичные двум произвольным траекторным функциям в [19], использованы для согласования с внешним полем при приравнении интенсивностей квадруполей в разложении потенциала вблизи оси пучка заданным полевым значениям.

Геометризованные уравнения в отличие от приближенных уравнений параксиальной теории с рядом отброшенных “малых” членов являются точными соотношениями. Поэтому в работе [17] решалась задача о выделении “узкого” фрагмента, но не было необходимости в каких-либо дополнительных предположениях о “малости” пространственного заряда. В параксиальном синтезе ось пучка может проходить через произвольную точку поперечного сечения, если с самого начала мы не интересуемся явным выделением вклада собственных полей, как это сделано в [22]. Так, в работе [23] в качестве оси была принята граница потока. Однако, если рассматривается задача анализа [19], то ось пучка определяется как траектория центрального электрона, на который не действуют собственные поля: продольные — в силу предположений параксиальной теории и поперечные — в силу специального расположения оси в точке, где эти силы отсутствуют. Последний эффект упоминался в [22], но не обсуждался подробно.

При геометризованном рассмотрении задачи анализа мы будем вынуждены принять предположения традиционной параксиальной теории (без отбрасывания членов в уравнениях) об относительной малости плотности пространственного заряда и “медленности” изменения поля в продольном направлении, чтобы иметь возможность рассчитать ось пучка как траекторию отдельного электрона. (По-видимому, можно построить итерационный процесс уточненного расчета оси.) Здесь, тем не менее, реализуется ситуация,

определенная выше словами “при прочих равных условиях”, когда преимущества геометризованного подхода проявляются в полной мере.

Модель распространения пучка в заданном электростатическом поле основана на теории первого приближения и описывается связанной системой обыкновенных дифференциальных уравнений 12-го порядка. Требования “подстройки” под внешнее поле за счет формы сечения путем специализации произвольных функций  $\psi_2$ ,  $\psi_{2,2}$  привели к тому, что система нулевого приближения зависит от функций первого приближения. В определенном смысле реконструирована ситуация, которая имеет место с исходными уравнениями пучка, в которых “слабые” и “сильные” эффекты не разделены, а их взаимодействие учитывается автоматически.

В нулевом приближении сечение пучка испытывает однородную деформацию: текущие поперечные координаты линейно зависят от координат точки старта  $s_0$ ,  $q_0$ . В первом приближении зависимость от  $s_0$ ,  $q_0$  носит квадратичный характер.

Выше говорилось, что ось пучка должна проходить через “центр” сечения, в котором действие сил пространственного заряда равно нулю. Если начальный контур сечения определяется функцией  $r_0(\psi)$  с периодом  $\pi$ , где  $r_0^2 = s_0^2 + q_0^2$ ,  $\psi$  — полярный угол, то однородная деформация не выводит функцию  $r_0(\psi)$  из этого класса. В него, в частности, попадает скругленный прямоугольник, имеющий дополнительную симметрию  $r_0(\psi) = r_0(\pi - \psi)$ . Для подобных начальных контуров ось пучка гарантированно проходит через “центры” сечений. При неоднородной плотности тока необходимо потребовать дополнительной симметрии и от этой функции.

Для произвольного сечения совмещение оси с “центром” при  $x^1 = 0$  не гарантирует ее дальнейшего прохождения через эти точки. В первом приближении контур  $r^2(\psi)$  описывается формулой, в которой члены, пропорциональные  $r_0^3$ , нарушают симметрию нулевого приближения и приводят таким образом к смещению оси. Оценка важности этого эффекта возможна при рассмотрении конкретных задач.

### Заключение

Геометризованная теория высших приближений, как показывают результаты тестирования, в двумерном случае позволяет описывать ситуации, для которых не существует других способов рассмотрения: непараксиальные релятивистские потоки с высокой компрессией в произвольно ориентированном внешнем магнитном поле; кольцевые потоки в магнетронно-инжекторных пушках для ППП с широким эмитирующим пояском, трансформирующиеся вблизи оси симметрии системы в сплошные; плоские непараксиальные потоки в ЭЛВ, где второе приближение традиционной параксиальной теории имеет сомнительную ценность из-за свойств асимптотического ряда по малому геометрическому параметру.

Комбинированная модель для магнетронно-инжекторных пушек включает управление формой катода и токоотбором с него за счет варьирования локальных параметров, определяющих базовую трубку тока и потенциал на ней.

Геометризованный формализм при возможности применения параксиальной теории и заданном уровне ошибки обеспечивает расчет в 2—3 раза более

широких потоков при учете неоднородности параметров в сечении пучка уже в нулевом приближении. Аппаратом геометризованных моделей являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Первое приближение геометризованной теории позволяет рассмотреть задачу о синтезе формально “узкого” трехмерного нерелятивистского электростатического пучка (две системы обыкновенных уравнений четвертого и шестого порядков, разрешенных относительно старших производных, с двумя произвольными функциями продольной координаты), а также задачу о распространении такого пучка в заданном внешнем электростатическом поле (связанная система обыкновенных уравнений двенадцатого порядка).

Исследование задач анализа методами параксиальной теории и геометризованной теории узких пучков показывает, что при изучении трехмерных проблем (в частности, многопучковых структур) обращение к лобовому численному интегрированию исходных уравнений может иметь более привлекательные альтернативы в виде этих подходов.

Геометризованная теория позволяет сформулировать своеобразные “теоремы несуществования”; она говорит о принципиальной невозможности “идеального” магнитного сопровождения, когда геометрия потока идентична геометрии магнитного поля, и о невозможности ортогональной посадки пучка на эквипотенциальный коллектор заданной формы с однородным распределением плотности тока. Обе идеи представлялись вполне разумными.

Геометризованная теория оперирует с другими понятиями, противоречащими соображениям “здравого смысла”. Например, “разумно” было бы работать в ортогональной системе; произвольно распоряжаться в ходе решения способом отсчета продольной координаты на оси пучка; произвольно задавать как эту ось, так и распределения физических параметров на ней. Перечисленные соображения также оказываются ошибочными [1].

Привыкнуть к тому, что любое действие с системой координат неизбежно приводит к физическим последствиям, достаточно трудно. Так, в модели на стр. 37—38 при, казалось бы, безобидном предположении о начальной ортогональности осей в точке старта, приводящем к вырождению коэффициента при старшей производной в уравнении для  $g_{33}$ , начинаешь думать о том, хорошо ли это в принципе, то ли уравнение используется для определения  $g_{33}$ , что же будет, если система стремится к ортогональности. Не менее безобидное предположение о начальной ориентации осей, совпадающей с ориентацией декартовой системы, дает дополнительное вырождение в уравнении для  $u_{2,1}$  — производной угла наклона оси  $x^1$  к плоскости  $x, y$ .

Все эти сомнения лежат в подсознательном желании работать с ортогональной системой, в то время как в действительности неортогональность  $g_{23} \neq 0$  является “способом существования” трехмерных электростатических потоков: где нет неортогональности, там нет и пучка, за исключением, возможно, особых точек. Таким образом, геометризованная теория не только открывает перспективы решения ряда задач, к которым ранее нельзя было подступиться, но и способствует устранению выработанных шаблонов мышления.

## Л и т е р а т у р а

1. Сыровой В. А. // РЭ. 1999. Т. 44. № 6. С. 645.
2. Ваишковский А. В., Неганова Л. А., Сыровой В. А. // Прикл. физика. 1998. № 3—4. С. 33.
3. Сыровой В. А. // РЭ. 2000. Т. 45. № 9. С. 1114.
4. Сыровой В. А. // Там же. 1991. Т. 36. № 8. С. 1545.
5. Сыровой В. А. // Там же. 1998. Т. 43. № 3. С. 336.
6. Сыровой В. А. // Там же. 2000. Т. 45. № 12. С. 1501.
7. Сыровой В. А. // Там же. В печати.
8. Мануилов В. Н., Райский Б. В., Цимринг Ш. Е., Солюнова Е. А. // Прикл. физика. 1998. № 3—4. С. 95.
9. Сыровой В. А. // РЭ. 1997. Т. 42. № 9. С. 1134.
10. Сыровой В. А. // Там же. 2000. Т. 45. № 11. С. 1377.
11. Сыровой В. А. // Там же. 2001. Т. 46. № 5. С. 617.
12. Сыровой В. А. // Там же. С. 618.
13. Переводчиков В. И., Шапенко В. Н., Акимов П. И. // Там же. 1997. Т. 42. № 3. С. 361.
14. Сыровой В. А. // Там же. В печати.
15. Сыровой В. А. // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 4. С. 625.
16. Сыровой В. А. // РЭ. 1999. Т. 44. № 5. С. 615.
17. Сыровой В. А. // Там же. В печати.
18. Сыровой В. А. // Там же. 1994. Т. 39. № 7. С. 1190.
19. Сыровой В. А. // Там же. 1992. Т. 37. № 9. С. 1692.
20. Сыровой В. А. // Прикл. физика. 1997. № 2—3. С. 69.
21. Сыровой В. А. // РЭ. В печати.
22. Сыровой В. А. // Там же. 1988. Т. 33. № 7. С. 1492.
23. Данилов В. Н., Дроздов С. С. // Там же. 1977. Т. 22. № 8. С. 1706.

## New results of geometrized theory of dense electron beams

(The review)

V. A. Syrovoy

The Lenin's All-Russian Electrical Engineering Institute, Moscow, Russia

*In this paper we consider new results of the geometrized theory which one is the newest partition of modern optics of dense electron beams. The datals results are connected to models of higher approximations for not paraxial axisymmetrical and belt, nonrelativistic and relativistic streams with reference to problems of calculation of electron-optical systems (EOS) for perspective microwave beam-plasma devices (BPD) and powerful electron-beam valves (EBV). The dimensional electrostatic streams in the geometrized version are studied both within the framework of a rever-tive problem (synthesis) and within the framework of a direct formulation (analysis) with propagation of a beam in a given external field, which is traditionally decided with application of the frontal numerical methods of integration of input equations in partial derivatives. The apparatus of the geometrized models is ordinary differential equations.*