УДК 539.3+539.219.2

Устойчивость распространения и влияние неоднородности материала на траекторию трещины

И. А. Миклашевич
Белорусская государственная политехническая академия, Минск, Беларусь

Проведен анализ устойчивости решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего траекторию распространения трещины в неоднородных средах. Показано, что типы критических точек, возникающих в системе, зависят от неоднородности среды как вдоль траектории трещины, так и в направлении перпендикулярном траектории. Рассмотрена траектория трещины в средах с выбранными типами неоднородности. Приведены критерии устойчивости развития, пригодные для прогнозирования поведения материала при разрушении.

Распространение макроскопической трещины имеет ряд особенностей, происхождение и природа которых не вполне ясны до настоящего времени. Это связано с отклонением трещины как реального физического объекта от модели идеальной трещины, даваемой классической теорией упругости и пластичности (модели типа Баренблатта — Дагдейла). Известно, что для композитов направление распространения трещины не совпадает с нормалью к направлению приложенных нагрузок [1]. Фрактальный характер процесса разрушения [2, 3], эффекты перколяции [4, 5], стохастизация траектории [6, 7] также не получают объяснения на основании классических моделей без привлечения дополнительных искуственных предположений. Теория этих эффектов требует более глубокой разработки физических оснований процесса разрушения и распространения трещины.

Как известно [8], в идеальном случае при простом одноосном растяжении вдоль оси y пластины из однородного упругого материала начальная трещина $-\varepsilon < x < \varepsilon$ будет распространяться вдоль оси x прямолинейно. Если нагружение сложное или материал неоднородный, то траектория будет зависеть от истории нагружения, поврежденности [1, 9, 10]. При этом в принципе можно, решая задачу последовательными малыми пересчетами, определить взаимовлияние напряженного состояния на траекторию трещины и наоборот. Эксплуатация многих изделий происходит в условиях достаточно стабильных граничных условий, однако траектория трещины при этом может быть криволинейной вследствие неоднородности, более того, непредсказуемой. Это требует рассмотрения вопроса устойчивости развития трещины. Кроме того, проблемы устойчивого распространения трещины представляют интерес в связи с необходимостью создания композиционных материалов с заданными эксплуатационными свойствами.

Рассмотрим неограниченную пластину в плоскости XOY, которая состоит из двух жестко скрепленных полупластин: $x \le 0$ — однородная изотропная среда, $x > 0$ — неоднородная изотропная среда. Пластина растягивается вдоль оси y, начальная трещина расположена вдоль оси x $(-\varepsilon < x < \varepsilon)$ $y = 0$ (рис. 1). Обозначим упругие модули однородной среды λ_0, μ_0, неоднородной — $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$.

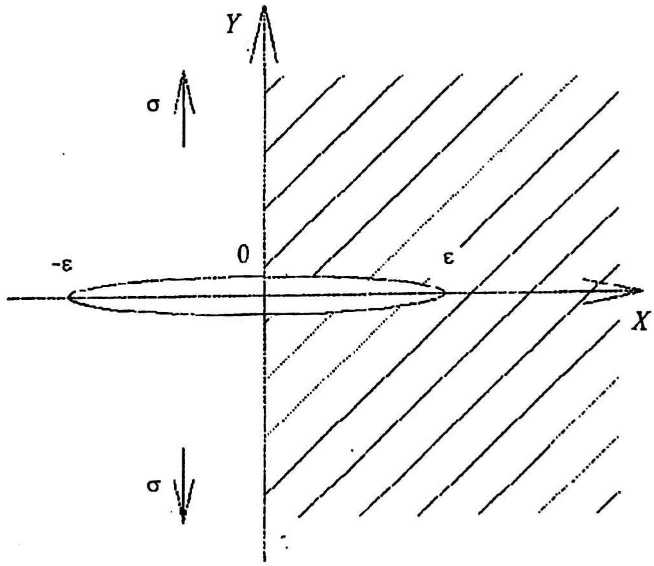


Рис. 1. Модель начальной трещины в среде

Траекторию трещины будем искать на основании вариационного принципа теории трещин в виде [8]

$$\delta \int_{\mu_0}^{\mu_A} (2\gamma - P_1 u_1) ds = 0; \quad (2\gamma - P_1 u_1) = F(x, y, \dot{y}),$$

где n_i — направляющий косинус внешней нормали к поверхности трещины; u_i — смещение берегов трещины; σ_{ij} — тензор напряжений материала, уравнение траектории трещины $y = y(x)$, $P_i = \sigma_{ij} n_j$.

Компоненты тензора напряжений на площадках, положение которых совпадает с поверхностью трещины, будут с плотностью поверхностной энергии материала γ. Так как в данном случае рассматриваем простое нагружение, то кривизна траектории в неоднородной пластине будет зависеть только от распределения неоднородности. Уравнение Эйлера для сформулированной задачи имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\left[\sqrt{1+y'^2}\,(2\gamma - P_i u_i)\right]\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{1+y'^2}\,(2\gamma - P_i u_i)\right] = 0. \qquad (1)$$

Из формулы (1) можно получить уравнение для траектории $y(x)$ в виде

$$\begin{aligned} &\frac{y''}{A} B + y' y'' \left(\frac{\partial}{\partial y'} B - \frac{\partial}{\partial y} B\right) + y' \frac{\partial}{\partial x} B + y'^2 B + \\ &+ A\left[-\frac{\partial}{\partial y} B + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} B + y' \frac{\partial^2}{\partial y^2} B + y'' \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} B\right] = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

В уравнении (2) введены обозначения $A = 1 + y'^2$, $B = 2\gamma - P_i u_i$.

Если полагать функционал $F(x, y)$ и траекторию трещины достаточно гладкой (без учета фрактального характера распространения трещины), то можно выбрать шаг разбиения для расчета траектории достаточно малым. Тогда отклонения траектории трещины на следующем шаге от направления распространения на предыдущем будет мало $y' << 1$. В этом случае с учетом условия γ = const уравнение (2) сводится к существенно нелинейному уравнению в виде [11—15]

$$y''-y' f_1(x,y)(1+y'^2)+f_2(x,y)(1+y'^2)^2=0, \quad (3)$$

где введены обозначения

$$f_1(x,y)=\frac{\partial \ln Q(x,y)}{\partial x},\quad f_2(x,y)=\frac{\partial \ln Q(x,y)}{\partial y},\quad Q=(\sigma_{ij}n_i u_j)^{-1},\quad y'=\frac{dy}{dx}.$$

В зависимости от конкретного вида неоднородности решения уравнения допускают, в том числе, существование режимов стохастизации [6, 7]. Исследуем устойчивость решений уравнения (3).

Поскольку в данной задаче будем интересоваться реализацией, а не процессом, то временную зависимость не рассматриваем. Обозначим $z = y'$, тогда (3) перепишется в виде системы уравнений

$$\begin{cases} y'=z, \\ z'=zf_1(1+z^2)-f_2(1+z^2)^2. \end{cases} \quad (4)$$

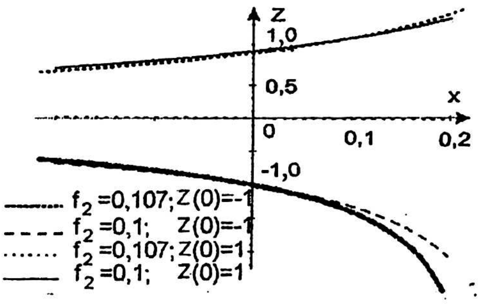
В общем виде второе уравнение системы (4) есть уравнение с разделяющимися переменными, но учет сложной функциональной зависимости f_1, f_2 значительно усложняет ситуацию. Орбиты уравнения (4) в фазовой плоскости даются выражением

$$\frac{dz}{dy}=\frac{zf_1(1+z2)-f_2(1+z^2)^2}{z}=f_1(1+z^2)-f_2\frac{(1+z^2)^2}{z}. \quad (5)$$

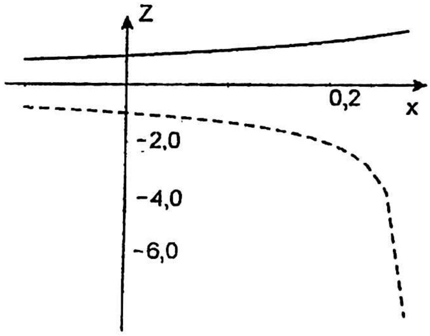
Решение уравнения (5) существенно зависит от вида неоднородности среды. Эта зависимость существенна, так как напряженно-деформированное состояние есть функция физико-механических характеристик среды, в которой распространяется трещина, $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(s_{ijkl})$. Если считать, что свойства среды гладко изменяются поперек траектории распространения трещины, то при анализе можно пренебречь членами порядка выше второго. В этом случае имеем

$$\frac{dz}{dy}=f_1(1+z^2)-f_2\left(\frac{1}{z}+4+6z\right). \quad (6)$$

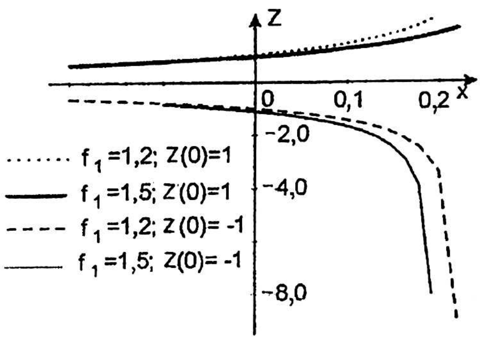
Прямое аналитическое интегрирование уравнения (6) не приводит к обозримым результатам. Однако соответствующим подбором неоднородности (параметры f_1, f_2) мы имеем возможность регулировать тип критических точек в фазовой плоскости. Это отвечает различному характеру распространения трещины. Так, например, устойчивый фокус может соответствовать стягиванию (коагуляции) микротрещин в одну магистральную трещину. Неустойчивые узловые точки вдоль траектории распространения будут отвечать распаду магистральной трещины на поле микротрещин (микроповреждений), что можно интерпретировать как стохастизацию траектории [6, 7]. С точки зрения технологии более логичным представляется регулировка параметра f_2 (неоднородности вдоль оси *Y*). Она оказывает очень сильное влияние на фазовые траектории уравнения. Поведение решений второго уравнения системы (4) показано рис. 2, *а—в*. Правые границы оси *OX* выбраны вблизи точки резкой потери устойчивости системой (значения отклонения выходят за физически обоснованные границы). Видно сильное разбегание пучка траекторий с незначительным ростом параметра f_2. Значение $z = 0$ устойчиво практически при всех комбинациях параметра. Слабое отклонение от оси OX ($y^{\max}(x) \approx 0{,}05$ при $y(0) = 0$) наблюдается на рис. 2, *а* (пунктирная кривая). Такое решение существует при $f_1 = 1{,}0$, $f_2 = 0{,}1$. Это можно объяснить возможной стохастизацией поведения траектории при заданном наборе параметров.



а



б



в

Рис. 2. Поведение траектории при заданном наборе параметров:
а — $f_1 = 1{,}0$; *б* — $f_1 = 1{,}0$, $f_2 = 0{,}093$; *в* — $f_2 = 0{,}1$

Рассмотрим необходимые условия создания материала с ускоренным переходом от стадии распространения диффузных микротрещин к стадии магистральной трещины. При конструировании композиционного материала таким образом, что

$$f_2 = z^2 / \left(1 + 4z + 6z^2\right), \tag{7}$$

имеем положительный аттрактор, критической точкой является $z = 0$ при условии $f_1 = 0$. При изменении f_1 изменяется характер фазовой траектории, система (5) должна иметь решение типа неустойчивый фокус.

Строго говоря, заключение о возможности линейного анализа критических точек нелинейной системы (4) требует дополнительных исследований. Так, например, для выполнения условия существования стабильных и нестабильных многообразий необходимо [13] удовлетворение дополнительных условий

$$\lim_{\|z \to 0\|} \frac{\left\| f_2\left(\frac{1}{z} + 4 + 6z\right) + f_2 \right\|}{\|z\|} = 0,$$

что налагает требование $f_2 = o(z^2)$, которому условие (7) не удовлетворяет. В этом случае необходимо положить

$$f_2 = z^{\alpha}/(1 + 4z + 6z^2),$$

где $\alpha = 2 - \varepsilon$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon = 0$, при дополнительном условии $f_2 = o(z)$. Технологическими методами выбирая величину α, можно регулировать скорость перехода в стадию разрушения путем распространения магистральной трещины.

Выводы

1. Типы неустойчивости трещины зависят от закона изменения свойств материала как вдоль траектории распространения трещины, так и в поперечном направлении в малой окрестности трещины.

2. Зависимость траектории от свойств материала в двух направлениях позволяет в значительной степени регулировать характеристики траектории путем создания композитов заданной детерминированной структуры.

3. Стохастизация траектории трещины в слоистой среде ведет к невозможности прогнозирования ее распространения, а следовательно, невозможности на стадии проектирования и изготовления изделия принять меры к увеличению его трещиностойкости. С другой стороны, стохастизация трещины, допускающая ее распространение по расслоению, обеспечивает трещиностойкость изделия, поскольку вязкость разрушения сдвигом больше, чем разрушения отрывом.

Литература

1. *Болотин В. В.* //ДАН. 2001. Т. 376. С. 760–762.
2. *Balankin A. S.* // Enging. Fract. Mech. 1997. V. 57, № 2/3. P. 135—203.
3. *Cherepanov G. P., Balankin A. S., Ivanova V. S.* // Ibid. 1995. V. 51. № 6. P. 997—1033.
4. *Sokolov I. M.* //Uspekhi Fiz. Nauk. 1986. V. 15. № 2. P. 221—248.
5. *Баланкин А. С.* // ДАН России. 1992. Т. 322. № 5. С. 869—874.
6. *Miklashevich I. A., Chigarev A. V.*//8 International conference of fracture. Ukraine 93. Part 1. Kiev, 1993. P. 227.
7. *Miklashevich I. A., Bialiatskaja L. N., Chigarev A. V.* // Proceedings of IX Annual Seminar NPCS'2000 "Nonlinear phenomena in complex systems: Fractals, Chaos, Phase Transitions, Self-Organization", Minsk, 2000. P. 206—214.
8. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. — М.: Наука, 1985. — 504 с.
9. *Банинчук М. В.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 197—199.
10. *Molski K. L.*// Zeszyty Naukowe politechniki bialostockiej 2000, Nauki techniczne № 134. Mechanika z. 22. P. 143—159.
11. *Чигарев А. В., Миклашевич И.А.* // Доклады АН Беларуси. 1995. Т. 39. № 2. С. 114—118.
12. *Миклашевич И. А.* // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 3. С. 408—418.
13. *Verhulst F.* Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Berlin: Springer Verlag, 1990.
14. *Чигарев А. В., Чигарев Ю. В.* // Акуст. журнал. 1978. Т. XXIV. Вып. 5. С. 765—771.
15. *Сагдеев Р. З., Заславский Г. М.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988. — 368 с.

Stability of propagation and influence of a material inhomogenity on the trajectory of a crack

I. A. Miklashevich
The Byelorussian State Polytechnic Academy, Minsk, Byelorussia

The analyse of stable solution of non-linear second-order differential equation describing the trajectory of a crack propagation in inhomogeneous media is halted. It is shown, that the types of critical points appeared in a system depend on inhomogenity of a medium, as along a trajectory of a growth, so in a direction a perpendicular trajectory. The trajectory of a crack in mediums with selected types of a heterogeneity surveyed. The stability criterions of development, suitable for prediction of behaviour of a material are reduced at fracture.

* *
*