УДК 537.312.62

Особенности силового взаимодействия идеально проводящего замкнутого контура с магнитным полем

В. А. Шувалов
Центральный НИИ машиностроения, г. Королев, Московская обл., Россия

Проведено исследование характера сил взаимодействия с магнитным полем, замкнутых идеально проводящих контуров с током, т. е. таких, омическое сопротивление которых равно нулю. Установлено, что с развитием сверхпроводящих технологий созданы технические возможности реализации таких электромеханических объектов. Получено выражение силовой функции идеально проводящего контура во внешнем магнитном поле, которое отличается от известного [1] наличием дополнительного члена. Это отличие определяется свойством замкнутых контуров без омического сопротивления сохранять полный магнитный поток постоянным и, как следствие, наведением в них при движении незатухающих индукционных токов. На примерах показаны особенности силового взаимодействия таких контуров с магнитным полем.

В задачах движения электромеханических систем в магнитных полях и построения уравнений движения важную роль играет силовая функция, определяющая силы, действующие в системе. Известное классическое выражение такой функции для традиционного замкнутого контура во внешнем магнитном поле выводится в работе [1] в предположении, что ток в контуре остается постоянным при перемещении его в магнитном поле. Такая абстракция является распространенным приемом в теоретических построениях. Однако необходимо обратить внимание на то, что в технике такие электромеханические объекты не существуют. Реализация замкнутого контура традиционного исполнения (из проводника с омическим сопротивлением) предполагает наличие в нем источника тока. Только в этом случае возможно существование незатухающего тока в контуре. Успехи в технологии сверхпроводящих материалов (в которых омическое сопротивление равно нулю) позволили создать замкнутый идеально проводящий электрический контур, ток в котором циркулирует без источника, но величина его существенно зависит от внешнего магнитного поля. При движении таких контуров во внешнем поле токи в них существенно изменяются, что обусловлено свойством замкнутых идеально проводящих контуров сохранять полный магнитный поток постоянным. Это свойство, по существу, является следствием закона электромагнитной индукции. Действительно, пусть магнитный поток Φ внешнего поля $\boldsymbol{H}$ проходит через замкнутый контур. При движении его изменяется поле $\boldsymbol{H}$, а следовательно поток Φ, что приводит к наведению индуктивного тока, т. е. $d(\Phi + Li) = -Ri\,dt$. Но для идеально проводящего (или сверхпроводящего) контура омическое сопротивление $R = 0$, следовательно $\Phi + Li = \text{const}$ (здесь L — индуктивность контура; i — индуктивный ток).

Таким образом, при изучении движения электромеханичесrих систем, содержащих замкнутые идеально проводящие контуры, пользоваться классической силовой функцией [1] неправомерно, поскольку она получена в предположении, что токи являются постоянными в процессе движения. Ниже получим выражение силовой функции идеально проводящего контура в магнитном поле с учетом зависимости тока от изменения внешнего магнитного потока через идеальный контур.

Рассмотрим идеальный контур l, в котором циркулирует первоначальный транспортный ток I_1, во внешнем поле $\boldsymbol{H}$. На рис. 1 показана схема задачи и обозначения. Методический подход к определению силовой функции намеренно сохраним такой же, как в работе [1]. Это позволит сравнить результаты и обнаружить особенности полученного выражения.

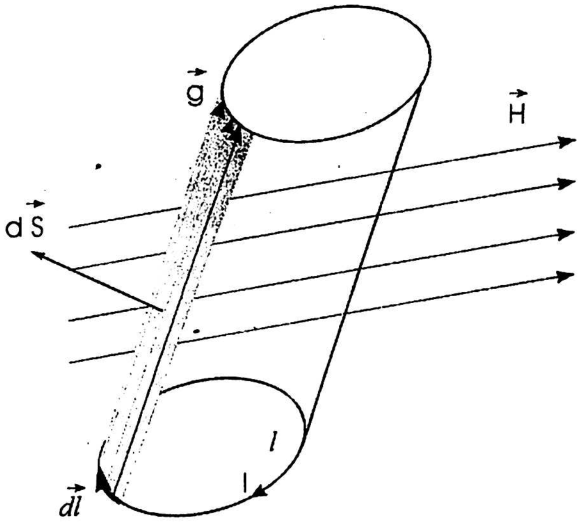

Рис 1. Схема взаимодействия идеального контура с магнитным полем

В соответствии с рис. 1 вычислим элементарную работу, совершаемую силами магнитного поля при произвольном бесконечно малом перемещении $\boldsymbol{g}$ элемента контура $\boldsymbol{dl}$. Она может быть определена соотношением

$$(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}) = I\,\boldsymbol{g}\,[\boldsymbol{dl}\,\boldsymbol{H}], \tag{1}$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на элемент контура;
I — полный ток в контуре (сумма первоначального транспортного тока и наведенного индуктивного тока).

Полная работа контура δA при произвольном бесконечно малом перемещении $\boldsymbol{g}$ всех его элементов, определяется интегрированием выражения (1) по всему замкнутому контуру l, т. е.

$$\delta A = \oint(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{F}) = \oint I\boldsymbol{g}[\boldsymbol{dl},\ \boldsymbol{H}] = \oint I\boldsymbol{H}[\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{dl}]. \tag{2}$$

Величину полного тока I представим как алгебраическую сумму первоначального транспортного тока I_1 и наведенного при перемещении индукционного тока ΔI_1, обусловленного внешним полем $\boldsymbol{H}$, в виде

$$I = I_1 + \Delta I_1.$$

Индукционный ток в контуре можно определить следующим образом:

$$\Delta I_1 = -\Phi/L, \tag{3}$$

где L — индуктивность контура;
Φ — магнитный поток внешнего поля $\boldsymbol{H}$, проходящий через контур l.

Знак минус отражает тот факт, что индукционный ток вызывает связанный с ним магнитный поток противоположного знака.

Далее обозначим $[\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{dl}] = \boldsymbol{dS}$ — элемент площади, описанной элементом контура $\boldsymbol{dl}$ при его перемещении $\boldsymbol{g}$. Тогда выражение (2) с учетом (3) принимает вид

$$\delta A = \int_{\Sigma}(I_1 - \Phi / L)(\boldsymbol{dS},\ \boldsymbol{H}), \tag{4}$$

где Σ — площадь, описанная всеми элементами контура при его перемещении $\boldsymbol{g}$.

Скалярное произведение $(\boldsymbol{dS},\ \boldsymbol{H}) = d\Phi$ представляет собой элементарное изменение магнитного потока вектора $\boldsymbol{H}$ через контур l, равное величине потока, проходящего через площадь, описанную элементом контура $\boldsymbol{dl}$ при его перемещении $\boldsymbol{g}$. Учитывая обстоятельство (4), можно записать

$$\delta A = \int_{\Phi}^{\Phi+\delta\Phi}(I_1 - \Phi / L)d\Phi,$$

где $\delta\Phi$ — изменение потока вектора $\boldsymbol{H}$, проходящего через площадь, описанную всеми элементами контура l при его перемещении $\boldsymbol{g}$.

Считаем, что все изменения полного тока в контуре обусловлены индукционными токами и, следовательно, можно положить $I_1 = \text{const}$. Тогда интеграл (4) без учета величин второго порядка малости вычисляется в конечном виде

$$\delta A = (I_1 - \Phi/L)\delta\Phi. \qquad (5)$$

Введем функцию

$$U = -\Phi(I_1 - \Phi/2L). \qquad (6)$$

Она позволяет приращение работы (5) и обобщенные силы F_i, действующие по координатам g_i, получить в виде выражений

$$\delta A = -\delta U/I_1 = \text{const}; \quad F_i = -\partial U/\partial g_i.$$

Силовая функция (6) зависит от механических координат, поскольку первоначальный транспортный ток в ней остается постоянным (замкнутый контур), а все изменения магнитного потока (и полного тока) обусловлены только изменением механических координат. Рассматриваемые электромеханические идеально проводящие объекты обладают важными особенностями. Перемещение их в магнитном поле сопровождается возникновением индукционных токов, однако в силу равенства нулю омического сопротивления энергия магнитного поля идет только на приращение механической энергии. Следовательно, идеально проводящий контур в магнитном поле, с точки зрения механики, является консервативной системой, и функция (6) в отличие от известной силовой функции [1] определяет потенциальную энергию этой системы.

Запишем выражение (6) в следующем виде:

$$U = -I_1\,\Phi + \Phi^2/2L.$$

Отсюда видно, что полученное выражение (6) отличается от известной функции ($U = -I\Phi$) [1, 2] дополнительным слагаемым $\Phi^2/2L$, которое связано с незатухающими индукционными токами (следствие идеальной проводимости замкнутого контура). Наличие активного сопротивления обнуляет его, и функция переходит в классическую. В электромеханике идеально проводящих контуров дополнительный член в (6) определяет особенности силового взаимодействия и динамику таких контуров, которые продемонстрируем ниже на простых примерах.

Пример 1. Рассмотрим плоскую прямоугольную идеально проводящую рамку с транспортным током I, которая может вращаться (рис. 2) в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Определим положения равновесия этой рамки и устойчивость этих положений с помощью функции (6). Магнитный поток поля $\boldsymbol{H}$ (см. рис. 2) через рамку вычисляется следующим образом:

$$\Phi = HS\cos\vartheta,$$

где S — площадь рамки;

ϑ — угол между вектором $\boldsymbol{H}$ и положительной нормалью к площади рамки $\boldsymbol{n}$.

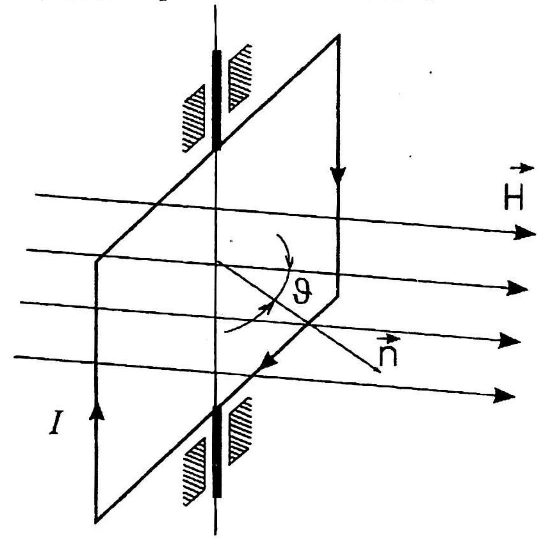

Рис 2. Взаимодействие идеально проводящей рамки с внешним магнитным полем

Для этой системы силовая функция (6) запишется в виде

$$U = -HS\cos\vartheta\,[I - (HS\cos\vartheta)/2L],$$

где L — индуктивность рамки.

Обобщенная сила, соответствующая координате ϑ, будет вращающим моментом N, который стремится повернуть рамку относительно оси вращения

$$N = -\frac{dU}{d\vartheta} = -HS\sin\vartheta[I - (HS\cos\vartheta)/L].$$

Положения равновесия рамки наблюдаются при следующих координатах:

$$\vartheta_1 = 0; \quad \vartheta_2 = \pi; \quad \vartheta_{3,4} = \pm\arccos(IL/HS).$$

Вторая производная от силовой функции имеет вид

$$d^2U/d\vartheta^2 = HS\cos\vartheta[I - (HS\cos\vartheta/L)] + $$
$$+ (HS\sin\vartheta)^2/L.$$

При взаимодействии обычной рамки (имеющей те же параметры, что и рассматриваемая) с магнитным полем $\boldsymbol{H}$ возникают два состояния равновесия: $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$, причем первое является устойчивым, а второе — нет [1]. В нашей задаче первые два положения равновесия будут неустойчивыми, если $(IL/HS) \le 1$, но тогда появляются два устойчивых положения, соответствующих координатам $\vartheta_{3,4} = \pm\arccos(IL/HS)$. Если же $(IL/HS) > 1$, то идеально проводящая рамка имеет те же положения равновесия, что и обычная, но динамика ее будет другой.

Пример 2. Рассмотрим идеально проводящий замкнутый контур с индуктивностью L и первоначальным транспортным током I_0 в поле магнитного диполя M. Будем считать, что ось x проходит через центр контура и является продолжением вектора M. Положение контура характеризуется независимыми координатами x и ϑ (рис. 3). В такой постановке запишем силовую функцию (6) в виде

$$U = \Phi_0\left(I_0 - \frac{\Phi_0}{2L}\right).$$

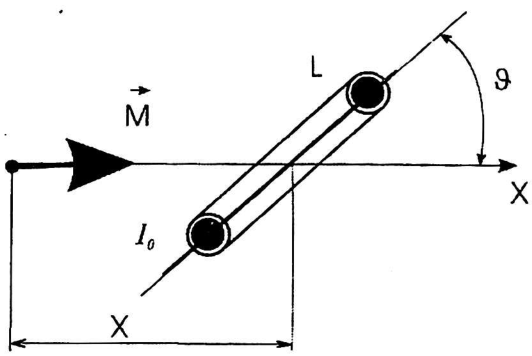

Рис 3. Схема аксиального взаимодействия идеального контура с магнитным диполем

Магнитный поток поля диполя через площадь контура S_0 определим следующим образом:

$$\Phi_0 = \frac{MS_0 \sin\vartheta}{2\pi x^3}. \tag{7}$$

Здесь считаем, что эффекты, связанные с неоднородностью поля диполя, не повлияют на качественный результат (т. е. размеры контура "малы"). Положение равновесия (x_p, ϑ_p) наблюдается при условии $I_0 L = \Phi_0$, или с учетом (7) получим зависимость

$$x_p = \sqrt[3]{MS_0 \sin\vartheta_p / 2\pi L I_0}.$$

Отсюда видно, что каждому равновесному углу ϑ_p соответствует свое положение центра контура x_p. Исследуем вопрос об устойчивости положения равновесия. Для этого воспользуемся критерием Сильвестра и запишем соответствующую матрицу

$$C = \begin{Bmatrix} (\partial\Phi_0/\partial x)^2 & (\partial\Phi_0/\partial x, \partial\Phi_0/\partial\vartheta) \\ (\partial\Phi_0/\partial\vartheta, \partial\Phi_0/\partial x) & (\partial\Phi_0/\partial\vartheta)^2 \end{Bmatrix}.$$

Диагональные миноры $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 0$ и $C \geq 0$, т. е. матрица не является положительно-определенной. Более того, в пространстве координат (x, ϑ) условию равновесия соответствует множество точек, каждая из которых будет нейтральной по отношению к соседней.

Таким образом, функция (6) отличается от известного выражения для неидеальных контуров [1, 2] тем, что имеет дополнительный член, который вносит заметные особенности в характер магнитного взаимодействия; электромеханика объектов с замкнутым идеально проводящими контурами не соответствует традиционной, поэтому при решении динамических задач необходимо учитывать специфический характер взаимодействия таких контуров с магнитным полем.

Литература

1. *Тамм И. Т.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.

2. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. — М.: Иностр. лит-ра, 1954.

Peculiarities of force interaction between a perfect conducting closed-loop circuit and a magnetic field

V. A. Shouvalov
Central Research Institute of Machinebuilding, Korolev, Russia

The article analyzes a nature of forces of interaction between a magnetic field and current-containing closed-loop perfect conducting circuits having a zero ohmic resistance. It is shown that currently the development of superconducting technologies provides for technical feasibility of implementing the electromechanical devices of this type. An expression is derived for a force function of a perfect conducting circuit in an external magnetic field which differs from a known one [1] by an additional term. The distinction is defined by a property of ohmic resistanceless closed-loop circuits to maintain constant a total magnetic flux and hence to retain induction of continuous induced currents in the circuits. Examples show specific features of force interaction between such circuits and a magnetic field.