

Влияние профиля осевой температуры на профиль осевой скорости в высокочастотном индукционном разряде

А. В. Герасимов, А. П. Кирпичников

Казанский государственный технологический университет, г. Казань, Россия

Проведено численное исследование влияния распределения осевой температуры на профиль осевой скорости в высокочастотном индукционном (ВЧИ) разряде. Полученные результаты подтверждают теорему авторов о неподвижной точке ВЧИ-разряда для реальных ВЧИ-разрядов, у которых распределение осевой температуры несимметрично относительно плоскости центрального сечения плазмоида за счет прокачки плазмообразующего газа через разрядную камеру ВЧИ-плазмотрона.

В работе [1] в рамках обычной теплофизики получен результат, заключающийся в том, что внутри каждого высокочастотного индукционного разряда существует по крайней мере одна точка, в которой все три компоненты скорости плазмообразующего газа обращаются в нуль, и эта точка соответствует той точке на оси разряда, в которой значение его осевой температуры максимально. Этот вывод получил название теоремы о неподвижной точке ВЧИ-разряда.

Строго говоря, однако, этот результат безоговорочно справедлив лишь для разрядов, профиль осевой температуры которых симметричен относительно плоскости центрального сечения плазмоида, тогда как в реальных ВЧИ-разрядах профиль температуры, как правило, несимметричен относительно этого сечения за счет прокачки через разряд плазмообразующего газа.

Аналізу влияния прокачки газа через плазмотрон на положение неподвижной точки в разряде и посвящена данная работа.

Рассмотрим уравнение баланса энергии ВЧИ-плазмы

$$\sigma E_{\Phi}^2 = -\nabla \lambda \nabla T + \rho c_p V \nabla T + \mu \Phi + Q_R, \quad (1)$$

где σ — электропроводность;

ρ — плотность;

c_p — теплоемкость;

μ — вязкость плазмы;

T — температура;

Φ — диссипация;

V — поле скорости в разряде;

E_{Φ} — напряженность электрического поля в разряде;

Q_R — потери на излучение в разряде.

Для модели реального индуктора в уравнении (1) пренебрежем членом, учитывающим вязкую диссипацию Φ . Кроме того, принимается усло-

вие цилиндрической симметрии, т. е. $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$.

Коэффициент теплопроводности λ и значение удельной электропроводности σ в приосевой области плазмоида полагаем постоянными, поскольку профиль температуры в ней имеет характер "плато", т. е. температура изменяется незначительно. Член, учитывающий потери на излучение в этой области в двухмерной постановке задачи в соответствии с соображениями, изложенными в [2], запишем как

$$Q_R(r, z) = \sigma E_{\Phi}^2(r, z) + Q_R(0, z).$$

Это означает, что вся джоулева энергия, выделяющаяся в центральной зоне разряда, выносятся оттуда излучением.

С учетом вышеизложенного уравнение энергии (1) примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_R(0, z) + \rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (2)$$

где r — радиальная координата;

z — продольная координата;

v_r и v_z — соответственно, радиальная и продольная составляющие поля скорости в разряде.

Рассмотрим уравнение (2), которое с учетом выражения [3–5]

$$E_{\Phi}(r, z) = E_{\Phi}(r, 0) \cos(bz),$$

где $b = \frac{1}{L} \arccos \left(\frac{H_z(0, L)}{H_z(0, 0)} \right)$ — константа, завися-

щая от граничных условий;

H_z — продольная составляющая напряженности магнитного поля в нагруженном плазмой индукторе;

L — длина плазмоида,

можно переписать как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_R(0,0) \cos^2(bz) + \rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Уравнение (3) справедливо для любых $z \leq L$ и для всех значений r вплоть до расстояний порядка одной трети радиуса плазменного сгустка.

На оси разряда всегда выполнены условия $v_r = \frac{\partial T}{\partial r} = 0$, и поскольку $\lambda = \lambda(T)$, то и

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

В этом случае уравнение (3) на оси разряда при $r = 0$ переходит в равенство

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - Q_R(0,0) \cos^2(bz) = \rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Раскрывая неопределенность типа $\frac{0}{0}$ в первом слагаемом этого выражения по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2},$$

так что на оси при $r = 0$

$$\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - Q_R(0,0) \cos^2(bz) = \rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z},$$

откуда

$$v_z(0,z) = \frac{\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - Q_R(0,0) \cos^2(bz)}{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z}},$$

или, поскольку $\frac{\partial \lambda(T)}{\partial z} = \frac{\partial \lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z}$,

$$v_z(0,z) = \frac{\lambda \left(2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - Q_R(0,0) \cos^2(bz)}{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z}} \quad (4)$$

Как видно, зная распределение температуры в приосевой области плазмоида, а также значения плотности, удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности, можно найти продольную составляющую поля скорости $v_z(0,z)$ вдоль оси разряда.

При модельных расчетах значения осевой температуры удобно задавать с использованием эллиптического интеграла первого рода [6]

$$F(\varphi/\alpha) = \int_0^\varphi \left(1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \theta \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta,$$

где φ — амплитуда;

α — модулярный угол.

В этом случае модельная температура

$$T(r,z) = \left(1 - \frac{Ar^2}{R^2} \right) T(z),$$

где

$$T(z) = T(0,0) + (T_{\max} - T(0,0)) \frac{\frac{z}{2L} - \frac{F\left(\frac{z}{2L} \cdot 90/\alpha\right)}{K}}{\frac{z_0}{2L} - \frac{F\left(\frac{z_0}{2L} \cdot 90/\alpha\right)}{K}},$$

то есть

$$T(r,z) = \left(1 - \frac{Ar^2}{R^2} \right) \times \left\{ T(0,0) + (T_{\max} - T(0,0)) \frac{\frac{z}{2L} - \frac{F\left(\frac{z}{2L} \cdot 90/\alpha\right)}{K}}{\frac{z_0}{2L} - \frac{F\left(\frac{z_0}{2L} \cdot 90/\alpha\right)}{K}} \right\} \quad (5)$$

где $T(0,0)$ — температура на границе разряда;

T_{\max} — максимальная осевая температура разряда;

R — радиус разряда;

K — полный эллиптический интеграл первого рода;

A — некоторая положительная константа;

$$z_0 = \frac{2L}{90} \arcsin \left\{ \sqrt{1 - \frac{8100}{K^2} \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \right\} - \text{значение про-}$$

дольной координаты, в которой температура максимальна.

Моделирование температурных полей по формуле (5) позволяет получить несимметричный относительно плоскости центрального сечения плазмоида профиль температуры, при котором результат, полученный авторами в работе [1], вообще говоря, неочевиден. Выбор модельной функции в виде (5) обусловлен в данном случае тем обстоятельством, что эта функция, во-первых, должна быть несимметричной относительно точки ее максимума и, во-вторых, не должна содержать точек перегиба, т. е. быть выпуклой всюду в области изменения ее аргумента, а этим двум условиям как раз и удовлетворяет выбранная нами для аппроксимации аксиальной составляющей поля температур функция (4). Значение постоянной A положительно, поскольку на оси плазоида температура в разряде минимальна.

Значения плотности, удельной теплопроводности и теплоемкости плазмы являются функ-

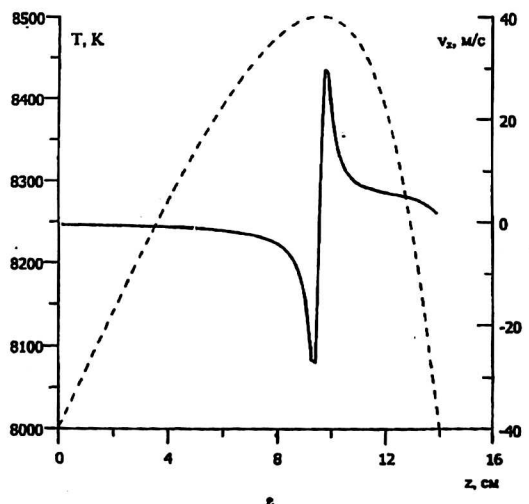
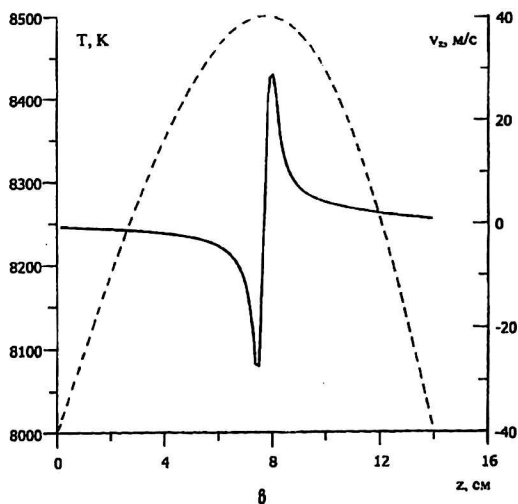
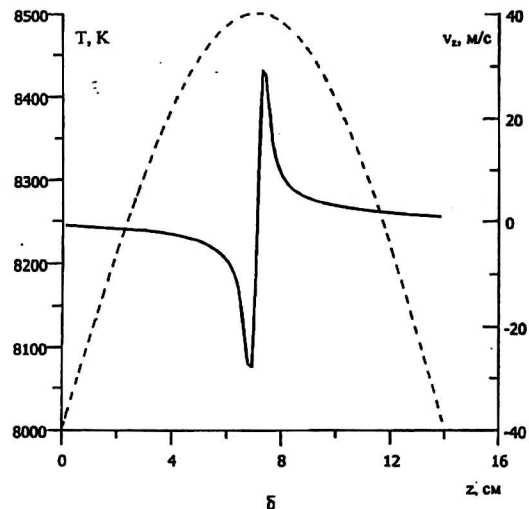
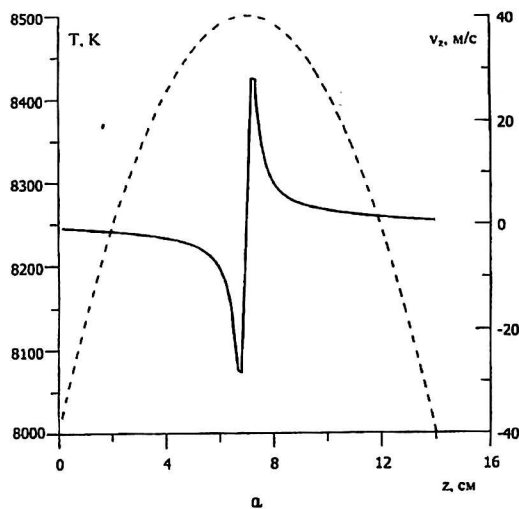
циями температуры, берутся из [7] и аппроксимируются полиномами Чебышева [8].

Это обеспечивает гладкость и непрерывность функций λ , ρ , c_p и, кроме того, позволяет корректно осуществить расчет величины $\frac{\partial \lambda}{\partial T}$ в выражении (4).

Первые производные, входящие в уравнение (4), аппроксимировались центральными разностями, а вторые производные — разностью второго порядка.

Расчет продольной составляющей поля скоростей проводился в 141 сечении вдоль оси плазоида (длина расчетной области — 7 см, шаг сетки — 0,1 см) с помощью различных значений модулярного угла α .

Результаты расчетов продольной составляющей поля скорости, а также распределения температур, для которых проводился расчет, представлены на рисунке.



Распределение температуры (T ---) и продольной составляющей поля скорости (v_z —) вдоль оси разряда при значении модулярного угла:

$a - \alpha = 0^\circ$; $b - \alpha = 20^\circ$; $g - \alpha = 50^\circ$; $r - \alpha = 80^\circ$

Из рисунка видно, что точка, в которой осевая скорость обращается в нуль, соответствует максимуму температуры. При смещении максимума температуры вдоль оси вместе с ним смещается и нулевая точка осевой скорости.

Заключение

Полученные результаты распространяют теорему о неподвижной точке ВЧИ-разряда [1] на реальные ВЧИ-разряды, у которых распределение осевой температуры несимметрично относительно плоскости центрального свечения плазмоида за счет прокачки плазмообразующего газа через разрядную камеру ВЧИ-плазмотрона.

Литература

1. Герасимов А. В., Кирпичников А. П. Неподвижная точка высокочастотного индукционного разряда// Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37. № 3. С. 504.

2. Eckert H. U. Analysis of thermal induction plasmas dominated by radial conduction losses// J. Appl. Phys. 1970. V. 41. № 4. P. 1520.

3. Кирпичников А. П. О структуре квазистационарного электромагнитного поля ВЧ-индукционного разряда при атмосферном давлении// Известия вузов. Физика. 1994. № 2. С. 77.

4. Кирпичников А. П. Структура квазистационарного электромагнитного поля высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазменного стутка// Теплофизика высоких температур. 1995. № 1. Т. 33. С. 139.

5. Кирпичников А. П., Герасимов А. В. Структура высокочастотного индукционного разряда вблизи оси плазмоида в случае индуктора конечных размеров/ Плазмотехнология-95: Сб. научных трудов. — Запорожье, 1995. С. 28.

6. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1977.

7. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока/ Под ред. чл.-кор. АН СССР А. С. Предводителя. — М. — Л.: Госэнергоиздат, 1961.

8. Хемминг Р. В. Численные методы/Для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968.

Influence of a profile of axial temperature on profile of axial velocity in the high-frequency induction discharge

A. V. Gerasimov, A. P. Kirpichnikov
Kazan State Technology University, Kazan, Russia

In the paper present the numerical research of influence of allocation of axial temperature on a profile of axial velocity in high-frequency inductive discharge. The received results confirm the theorem of the authors of a fixed point of the high-frequency induction discharge for actual high-frequency induction discharge, at which the allocation of axial temperature is displaced concerning a plane of central section of a plasmoid at the expense of circulation of plasma forming gas through the discharge cabinet high-frequency induction of a plasma generator.