

Физика плазмы и плазменные технологии

УДК 621.382

Электромагнитные волны в плазменных волноводах

Часть III*. Эффективные граничные условия и теория поверхностных волн в волноводах с тонкой трубчатой плазмой

М. В. Кузелев, Р. В. Романов, А. А. Рухадзе
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

Получены и обоснованы эффективные граничные условия для электромагнитного поля медленных поверхностных волн тонкой трубчатой магнитоактивной плазмы в металлическом волноводе. Полученные граничные условия позволяют при описании поверхностных волн не решать уравнений поля в плазменной области волновода. Это делает возможным аналитически исследовать важные дисперсионные свойства плазменных волноводов при любой величине внешнего магнитного поля. Приведены примеры использования эффективных граничных условий для описания поверхностных волн с нормальным и аномальным законами дисперсии.

Теоретическое исследование электромагнитных волн в круглом волноводе с кусочно-постоянным в поперечном направлении плазменным заполнением во внешнем магнитном поле — сложная и громоздкая задача. Это обусловлено тем, что в плазменной области волновода электромагнитное поле представляется суперпозицией четырех цилиндрических функций комплексного аргумента, что приводит к исключительной сложности дисперсионного уравнения для спектров волн [1–3]. Даже в простейшем случае волновода со сплошным плазменным заполнением исчерпывающее исследование спектров возможно только с применением численных методов [4]. Еще более сложным, даже для записи, не говоря уже о решении, является дисперсионное уравнение в практически важном случае волновода с трубчатым плазменным заполнением [5]. Из-за сложности описания электромагнитных волн плазменного волновода в конечном внешнем магнитном поле их теория в настоящее время еще далека до своего завершения. Есть один важный момент — волновод с трубчатой плазмой малой толщины, когда решение уравнений поля в области плазмы не требуется и некоторые типы плазменных волн описываются аналитически. При этом трубчатая

плазма малой толщины учитывается как некоторые эффективные граничные условия для уравнений поля в вакууме. Этим граничным условиям и их применению в теории поверхностных волн посвящена настоящая работа. Она является продолжением теоретических исследований, результаты которых были опубликованы ранее в работах [6] (см. также обзор [7]).

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим вакуумный металлический волновод кругового поперечного сечения радиуса R , в который помещена тонкая трубчатая плазма со средним радиусом r_p и толщиной $\Delta_p \ll r_p < R$, т. е. плазменное заполнение волновода представляет собой тонкостенную трубку. В таком волноводе, полное математическое описание которого, как уже отмечалось выше, чрезвычайно сложно, существует большое число плазменных и электромагнитных волн различных типов. Среди них имеются поверхностные плазменные волны с фазовой скоростью, меньшей скорости света, две из которых представляют особый интерес для приложений, в частности, для релятивистской плазменной СВЧ-электроники [8]. Цель настоящего исследования — развитие теории этих важнейших волн на уровне некоторых эффективных граничных условий для уравнений поля в вакууме. В работе отдельно рассматрива-

* Части I и II данной статьи опубликованы в журнале "Прикладная физика" № 2 и 3 за 2001 г., соответственно.

ются три системы: волновод в бесконечно сильном внешнем продольном магнитном поле; волновод в отсутствие внешнего магнитного поля; волновод в конечном продольном внешнем магнитном поле.

Хотя первые две системы и являются частными случаями третьей, они представляют немалый самостоятельный интерес, как прикладной, так и методический.

Введем цилиндрические координаты $\{r, \varphi, z\}$. Координатная ось OZ совпадает с осью симметрии волновода. Ограничиваясь рассмотрением азимутально симметричных волн, представим компоненты электромагнитного поля в виде $F(r)\exp(-i\omega t + ik_z z)$, где ω — круговая частота; k_z — продольное волновое число; $F(r)$ — амплитуда любой из компонент векторов поля.

Для компонент поля в вакуумных областях волновода (т. е. при $r < r_p - \Delta_p/2$ и $r_p + \Delta_p/2 < r < R$) используем обозначение $F(r) \equiv F^{(0)}(r)$. Аналогично в плазменной области ($r_p - \Delta_p/2 < r < r_p + \Delta_p/2$) обозначим $F(r) \equiv F^{(p)}(r)$.

Пусть $F(r)$ — любая из компонент электромагнитного поля, непрерывная на границе раздела двух сред. В рассматриваемом волноводе — это внутренняя граница плазменной трубки $r_1 = r_p - \Delta_p/2$ и ее внешняя граница $r_2 = r_p + \Delta_p/2$. Запишем условия непрерывности какой-либо из компонент поля на границах плазмы

$$F^{(0)}(r_1) = F^{(p)}(r_1); F^{(p)}(r_2) = F^{(0)}(r_2). \quad (1.1)$$

Ограничиваясь линейными по малой толщине плазмы Δ_p членами и используя разложение

$$F^{(p)}(r_{1,2}) = F^{(p)}(r_p) \mp \frac{1}{2} \Delta_p \frac{dF^{(p)}}{dr}, \quad (1.2)$$

из (1.1) получим соотношение

$$F^{(0)}(r_2) - F^{(0)}(r_1) = \Delta_p \frac{dF^{(p)}}{dr}. \quad (1.3)$$

Известно, что в вакуумных областях волновода компоненты электромагнитного поля являются линейными комбинациями цилиндрических функций от аргумента $\chi_0 r$,

где
$$\chi_0^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.4)$$

Считая, что выполнено сильное неравенство

$$|\chi_0| \Delta_p \ll 1 \quad (1.5)$$

и учитывая гладкость цилиндрических функций, запишем приближенное соотношение

$$F^{(0)}(r_2) - F^{(0)}(r_1) \approx F^{(0)}(r_p + 0) - F^{(0)}(r_p - 0), \quad (1.6)$$

которое становится точным в пределе $\Delta_p \rightarrow 0$.

Таким образом, окончательно из (1.3) и (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \{F^{(0)}(r_p)\} &\equiv F^{(0)}(r_p + 0) - F^{(0)}(r_p - 0) = \\ &= \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dF^{(p)}}{dr} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) является локальным, поскольку связывает компоненты поля в одной и той же точке r_p , и поэтому его можно использовать в качестве граничного условия. При этом, помимо формальных преобразований, потребуются привлечение каких-либо конструктивных физических соображений. Описание плазмы на языке граничного условия вида (1.7) будем называть приближением бесконечно тонкой плазмы. Подчеркнем, что приближение бесконечно тонкой плазмы, как и исходное разложение (1.2), исходит из рассмотрения волны, поле которых локализовано в объеме плазмы. Таким образом, речь пойдет только о поверхностных волнах.

Заметим, что если правая часть в (1.7) равна нулю, то соответствующая компонента поля непрерывна при переходе через плазму. Это не означает, что данная компонента не возмущена присутствием плазмы в волноводе — разрыв может иметь ее производная. Если же правая часть в (1.7) отлична от нуля, то компонента поля претерпевает разрыв при переходе через плазму. Но это не следует понимать в буквальном смысле как разрыв физически непрерывной величины. Просто соответствующая компонента поля сильно меняется на расстоянии Δ_p , т. е. при переходе через плазменную область волновода. При малой величине толщины плазмы Δ_p такое сильное изменение компоненты поля удобно трактовать как ее разрыв.

2. Бесконечно сильное внешнее магнитное поле

Рассмотрим волновод в бесконечно сильном внешнем магнитном поле. Нас здесь интересуют волны E -типа, у которых отличны от нуля только следующие компоненты электромагнитного поля: E_z, E_r, B_φ . Из уравнений Максвелла следует, что эти компоненты удовлетворяют системе уравнений [9]

$$\begin{aligned} ik_z E_r - \frac{dE_z}{dr} &= i \frac{\omega}{c} B_\varphi, \quad k_z B_\varphi = \frac{\omega}{c} E_r, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\varphi) &= -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{||} E_z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_{||} = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы;

ω_p — электронная ленгмюровская частота.

В вакуумных областях волновода в системе (2.1) следует положить $\varepsilon_{||} = 1$.

Из системы уравнений (2.1) следуют выражения для компонент E_r и B_φ :

$$E_r = -i \frac{k_z}{\chi_0^2} \frac{dE_z}{dr}; \quad B_\varphi = -i \frac{\omega}{c\chi_0^2} \frac{dE_z}{dr}, \quad (2.2)$$

и уравнение для компоненты E_z

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) - \chi_0^2 \varepsilon_{||} E_z = 0. \quad (2.3)$$

Вместе с граничным условием на металлической стенке волновода $E_z(R) = 0$ уравнение (2.3) является задачей на собственные значения для определения спектров волн E -типа. Условие разрешимости этой задачи является точное дисперсионное уравнение для спектров волн $\omega = \omega(k_z)$ [10]:

$$D(\omega, k_z) \equiv \frac{k_p J_1(k_p r_1) + Q J_0(k_p r_1)}{k_p Y_1(k_p r_1) + Q Y_0(k_p r_1)} - \frac{k_p J_1(k_p r_2) + P J_0(k_p r_2)}{k_p Y_1(k_p r_2) + P Y_0(k_p r_2)} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$Q = \chi_0 \frac{I_1(\chi_0 r_1)}{I_0(\chi_0 r_1)}; \quad k_p^2 = -\chi_0^2 \varepsilon_{||}; \quad (2.5)$$

$$P = \varphi_0 \frac{I_1(\chi_0 r_2) K_0(\chi_0 R) + I_0(\chi_0 R) K_1(\chi_0 r_2)}{I_0(\chi_0 r_2) K_0(\chi_0 R) - I_0(\chi_0 R) K_0(\chi_0 r_2)},$$

где $J_l(x)$ и $Y_l(x)$ — функции Бесселя и Неймана;
 $I_l(x)$ — модифицированная функция Бесселя;
 $K_l(x)$ — функция Макдональда порядка l .

Дисперсионное уравнение (2.4) позволяет определить не только спектры частот, но и поперечную структуру волноводного поля. Так, подставляя в (2.3) и (2.2) найденные из (2.4) собственные частоты $\omega(k_z)$, легко получить выражения для компонент собственного вектора $\{E_z(r), E_r(r), B_\varphi(r)\}$. Мы не приводим здесь этих громоздких выражений, ограничиваясь в дальнейшем только их графическим изображением. При этом будем использовать численные решения точного дисперсионного уравнения (2.4).

На рис. 1 изображен закон дисперсии интересующей нас медленной ($\omega < k_z c$) поверхностной плазменной волны, полученный численным решением точного дисперсионного уравнения (2.4) — линия 1. На рис. 2 представлены в зависимости от r компоненты электромагнитного поля этой волны E_z, E_r, B_φ , рассчитанные для точки А (см. рис. 1) дисперсионной кривой ($k_z = 6 \text{ см}^{-1}$). Рисунки построены для волновода и плазмы со следующими параметрами: $R = 2 \text{ см}$, $\omega_p = 10^{11} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$, $r_p = 1 \text{ см}$ и $\Delta_p = 1 \text{ см}$. Кроме того, на рис. 1 пунктиром показана "световая" прямая $\omega = k_z c$, а о кривой 1а говорится ниже. На этом и всех последующих аналогичных рисунках частота измеряется в 10^{10} рад/с , а волновое число — в обратных сантиметрах.

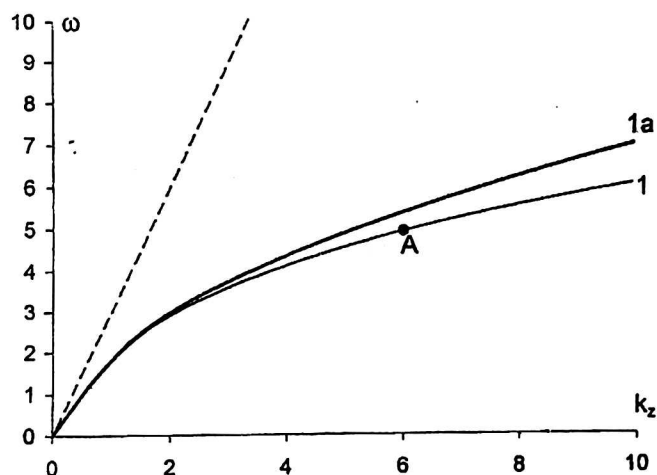


Рис. 1. Дисперсионная кривая низкочастотной медленной поверхностной волны волновода с тонкой трубчатой плазмой в бесконечно сильном внешнем магнитном поле: 1 — решение точного дисперсионного уравнения; 1а — приближение бесконечно тонкой плазмы

Поясним, что из всех медленных ($\omega < k_z c$) волн здесь рассматривается только самая высокочастотная, получившая в литературе название "плазменной кабельной" волны [10, 11]. Эта волна имеет минимальное поперечное волновое число (основная поперечная мода) и максимальную фазовую скорость. Другие плазменные волны при $\Delta_p \ll r_p$ являются существенно более низкочастотными. Их поле локализовано в плазменной области волновода, и в рамках разложения (1.2), как отмечалось выше, описано быть не может.

Из рис. 2, а видно, что в области плазмы компонента E_z меняется слабо, а поэтому для данной волны имеем

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(p)}}{dr} \right) = 0. \quad (2.6)$$

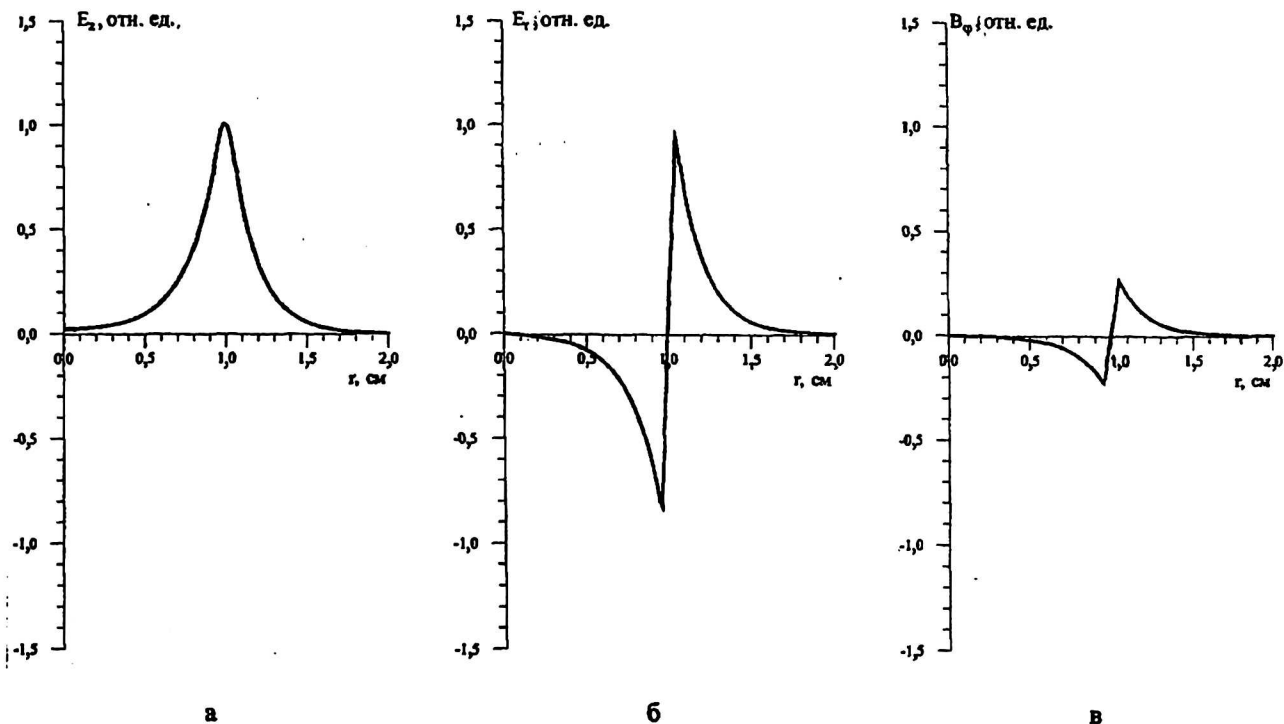


Рис. 2. Компоненты E_z , E_r , B_ϕ (а, б, в) электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 с рис. 1

Компонента же B_ϕ (а также E_r) меняется сильно, что позволяет положить

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dB_\phi^{(p)}}{dr} \right) \neq 0. \quad (2.7)$$

Описанная структура полей обусловлена особенностями поляризации плазмы при возбуждении в ней рассматриваемой волны. В сильном внешнем магнитном поле, когда поперечное движение электронов запрещено, поляризация происходит только за счет их продольного движения. При этом на границах плазменной трубки поверхностных зарядов не образуется, а образуются только возмущения заряда в объеме плазмы. По терминологии теории потенциала рассматриваемая плазма ведет себя как простой слой [12]. Математическим отражением данного факта являются предельные соотношения (2.6) и (2.7).

Из (1.7) и (2.6) имеем первое граничное условие для уравнений поля в вакууме

$$\left\{ E_z^{(0)}(r_p) \right\} = 0. \quad (2.8)$$

Из (1.7), (2.7) и второй формулы (2.2) следует соотношение

$$\left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{d^2 E_z^{(p)}}{dr^2} \right). \quad (2.9)$$

Вторую производную от $E_z^{(p)}$ в (2.9) можно выразить (с учетом неравенства $\Delta_p \ll r_p$) из уравнения (2.3):

$$\frac{d^2 E_z^{(p)}}{dr^2} = \chi_0^2 \varepsilon_{||} E_z^{(p)}. \quad (2.10)$$

Подставляя далее (2.10) в (2.9), имеем

$$\left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = \chi_0^2 \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \varepsilon_{||} E_z^{(p)} \right). \quad (2.11)$$

Вычислим теперь предел в правой части равенства (2.11)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \varepsilon_{||} E_z^{(p)} \right) &= \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left[\left(\Delta_p - \frac{\Delta_p \omega_p^2}{\omega^2} \right) E_z^{(p)} \right] = \\ &= - \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_p \omega_p^2}{\omega^2} E_z^{(p)} \right) = -\Delta_p \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_z^{(0)}(r_p). \end{aligned} \quad (2.12)$$

При вычислении выражения (2.12) учтено, что произведение $\Delta_p \omega_p^2$ пропорционально полному погонному числу электронов плазмы и по смыслу постоянно, а предельное значение $E_z^{(p)}$

в силу физической непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля и соотношения (2.8) есть $E_z^{(0)}(r_p)$.

Таким образом, получаем следующие эффективные граничные условия для описания бесконечно тонкой трубчатой плазмы применительно к рассмотренной плазменной волне

$$\begin{cases} E_z^{(0)}(r_p) = 0, \\ \left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = -\Delta_p \chi_0^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_z^{(0)}(r_p). \end{cases} \quad (2.13)$$

Заметим, что второе граничное условие в (2.13) обычно получают интегрированием уравнения (2.3) по r в окрестностях плазмы при следующей замене в $\varepsilon_{||}$ [10, 12]:

$$\omega_p^2 \rightarrow \Delta_p \delta(r - r_p) \omega_p^2. \quad (2.14)$$

Однако не всегда эффективное граничное условие для описания тонкой плазмы может быть получено простым интегрированием уравнений поля, часто требуется привлечение дополнительных соображений.

Ценность граничных условий (2.13) состоит в том, что при их использовании не нужно решение уравнений поля в плазменной области волновода, что приводит к значительным математическим упрощениям. В качестве примера получим закон дисперсии плазменной волны в приближении бесконечно тонкой плазмы и сравним его с тем, что дает зависимость, представленная на рис. 1. Одновременно выясним, что же теряется при описании плазмы на языке эффективных граничных условий, другими словами, определим степень неточности приближения бесконечно тонкой плазмы. Решение уравнения (2.3) в вакуумных областях (где $\varepsilon_{||} = 1$) имеет вид

$$E_z^{(0)} = \begin{cases} AI_0(\chi_0 r), & r < r_p, \\ B \left[I_0(\chi_0 r) - K_0(\chi_0 r) \frac{I_0(\chi_0 R)}{K_0(\chi_0 R)} \right], & r_p < r < R. \end{cases} \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в граничные условия (2.13) и исключая постоянные A и B , получим следующее известное дисперсионное уравнение для определения спектров частот волн в волноводе с бесконечно тонкой трубчатой плазмой в бесконечно сильном внешнем магнитном поле [10–12]

$$r_p \Delta_p \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \chi_0^2 I_0^2(\chi_0 r_p) \left[\frac{K_0(\chi_0 r_p)}{I_0(\chi_0 r_p)} - \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)} \right] = 1. \quad (2.16)$$

Дисперсионная кривая $\omega(k_z)$, полученная решением уравнения (2.16), приведена на рис. 1 — линия 1а. Дисперсионная кривая построена для тех же конкретных параметров плазмы, что и дисперсионная кривая, полученная путем решения точного уравнения (2.4) (см. рис. 1, линия 1). Видно, что в длинноволновой области, когда выполнено неравенство (1.5), обе кривые совпадают и имеют следующий закон дисперсии

$$\omega = k_z c \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2 r_p \Delta_p \ln(R/r_p)} \right)^{-1/2} \quad (2.17)$$

Однако при нарушении неравенства (1.5) появляется расхождение в ходе кривых. Кривая, полученная без приближения бесконечно тонкой плазмы, при больших k_z асимптотически выходит на ω_p , что обусловлено запирающим полем волны в объеме плазмы. В приближении же бесконечно тонкой плазмы дисперсионная кривая по закону

$$\omega = \omega_p \sqrt{k_z \Delta_p / 2} \quad (2.18)$$

уходит с ростом k_z на бесконечность. Ясно, что зависимость (2.18) при $k_z \Delta_p > 1$ является неверной. В этом и состоит недостаток приближения бесконечно тонкой плазмы. В этом приближении нельзя учесть структурирование распределения поля в объеме плазмы. Но в коротковолновой области при $k_z \Delta_p > 1$ такое структурирование является существенным. Модель бесконечно тонкой плазмы применима только при выполнении неравенства (1.5).

3. Нулевое внешнее магнитное поле

Перейдем к рассмотрению волновода в отсутствие внешнего магнитного поля. Опять интересуемся волнами E -типа с отличными от нуля компонентами E_z , E_r , B_ϕ . Из уравнений Максвелла следует, что эти компоненты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} ik_z E_r - \frac{dE_z}{dr} &= i \frac{\omega}{c} B_\phi; & k_z B_\phi &= \frac{\omega}{c} \varepsilon_\perp E_r; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\phi) &= -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{||} E_z, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_\perp = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ — поперечная диэлектрическая проницаемость плазмы, совпадающая с ее

продольной проницаемостью $\epsilon_{||}$ [9]. В вакуумных областях волновода в системе (3.1) следует принять $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{||} = 1$.

Из системы уравнений (2.1) следуют выражения для компонент E_r и B_{φ}

$$E_r = -i \frac{k_z}{\chi^2} \frac{dE_z}{dr}; \quad B_{\varphi} = -i \frac{\omega}{c\chi^2} \epsilon_{\perp} \frac{dE_z}{dr}, \quad (3.2)$$

и уравнение для компоненты E_z

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) - \chi^2 E_z = 0. \quad (3.3)$$

Здесь $\chi^2 = k_z^2 - \epsilon_{\perp} \omega^2 / c^2$.

Уравнение (3.3) дополняется обычным граничным условием $E_z(R) = 0$. Из получающейся при этом задачи на собственные значения дисперсионное уравнение для спектров симметричных волн E -типа плазменного волновода с трубчатой плазмой без внешнего магнитного поля имеет вид [9, 12, 13]:

$$D(\omega, k_z) = \frac{qI_1(\chi r_1) - QI_0(\chi r_1)}{qK_1(\chi r_1) + QK_0(\chi r_1)} - \frac{qI_1(\chi r_2) + PI_0(\chi r_2)}{qK_1(\chi r_2) - PK_0(\chi r_2)} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь использованы обозначения

$$Q = \frac{I_1(\chi_0 r_1)}{I_0(\chi_0 r_1)}, \quad q = \epsilon_{\perp} \frac{\chi_0}{\chi}; \quad (3.5)$$

$$P = \frac{K_1(\chi_0 r_2)I_0(\chi_0 R) + I_1(\chi_0 r_2)K_0(\chi_0 R)}{K_0(\chi_0 r_2)I_0(\chi_0 R) - I_0(\chi_0 r_2)K_0(\chi_0 R)}.$$

На рис. 3 изображены дисперсионные кривые медленных ($\omega < k_z c$) поверхностных плазменных волн в отсутствие внешнего магнитного поля. Кривые получены численным решением уравнения (3.4) для волновода и плазмы со следующими параметрами: $R = 2$ см, $\omega_p = 10^{11}$ рад·с⁻¹, $r_p = 1$ см и $\Delta_p = 0,1$ см.

Видно, что имеются две поверхностные волны: низкочастотная с нормальным законом дисперсии (кривая 1) и высокочастотная, дисперсия которой с ростом k_z становится аномальной (кривая 2). При $k_z \rightarrow \infty$ обе дисперсионные кривые выходят на частоту $\omega_p / \sqrt{2}$ [9, 12, 13].

На рис. 4 представлены зависимости компонент электромагнитного поля E_z , E_r , B_{φ} низкочастотной волны от r . Поля рассчитаны в точке А (см. рис. 3) дисперсионной кривой 1 ($k_z = 6$ см⁻¹).

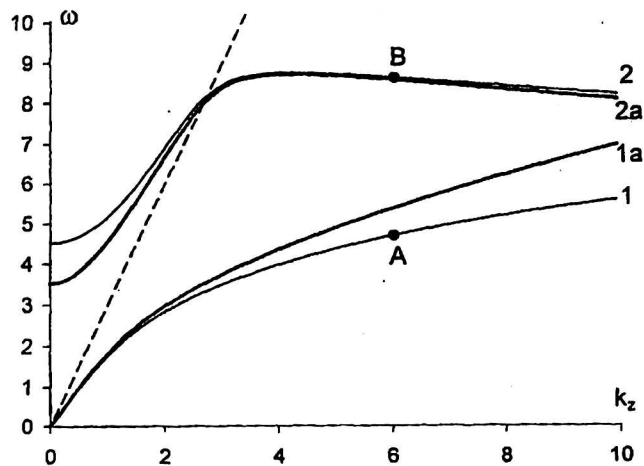


Рис. 3. Дисперсионные кривые медленных поверхностных волн волновода с тонкой трубчатой плазмой в отсутствие внешнего магнитного поля:

- 1 и 1а — низкочастотная волна с нормальным законом дисперсии (1 — решение точного дисперсионного уравнения; 1а — приближение бесконечно тонкой плазмы);
- 2 и 2а — высокочастотная волна с аномальной дисперсией (2 — решение точного дисперсионного уравнения; 2а — приближение бесконечно тонкой плазмы)

Из рис. 4 видно, что компоненты электромагнитного поля низкочастотной волны ведут себя в целом так же, как компоненты поля волны при наличии бесконечно сильного внешнего магнитного поля (см. рис. 2), только в объеме плазмы наблюдаются некоторые различия, которые несущественны из-за малой толщины плазмы. Следовательно, для низкочастотной волны выполнены соотношения (2.6) и (2.7). Тогда, записывая соотношение (1.7) для компонент E_r и B_{φ} , используя вторую формулу (3.2) и уравнение (3.3), получаем для низкочастотной волны граничные условия, в точности совпадающие с (2.13).

Перейдем теперь к рассмотрению высокочастотной поверхностной плазменной волны с аномальной дисперсией (см. рис. 3, кривая 2). На рис. 5 представлены зависимости компонент электромагнитного поля E_z , E_r , B_{φ} этой высокочастотной волны от r . Поля рассчитаны в точке В дисперсионной кривой 2 с $k_z = 6$ см⁻¹ (см. рис. 3). Видно кардинальное отличие от структур, приведенных на рис. 2 и 4. Компонента E_z сильно меняется в объеме плазмы (см. рис. 5, а). Можно утверждать, что на расстоянии Δ_p компонента E_z претерпевает разрыв, а компонента B_{φ} является непрерывной функцией (см. рис 5, в). Описанная структура полей обусловлена особенностями поляризации плазмы в этой волне. В отсутствие внешнего магнитного поля поляризация происходит в основном за счет поперечного движения электронов. При возбуждении

высокочастотной поверхностной волны на границах плазменной трубки формируются поверхностные заряды противоположного знака, а возмущения заряда в объеме плазмы не возникают. По терминологии теории потенциала в данном случае плазма ведет себя как двойной слой [12]. Математическим отражением данного факта являются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(p)}}{dr} \right) \neq 0; \quad (3.6)$$

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dB_\varphi^{(p)}}{dr} \right) = 0. \quad (3.7)$$

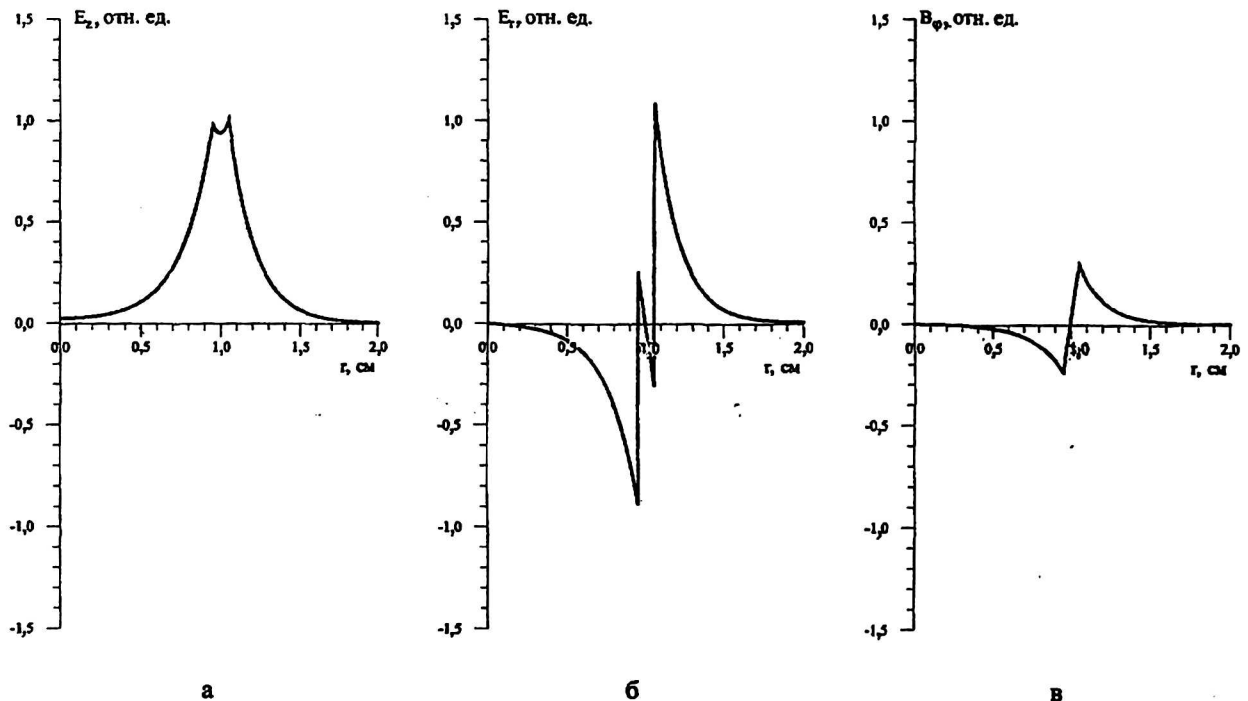


Рис. 4. Компоненты E_z , E_r , B_φ электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 (см. рис. 3)

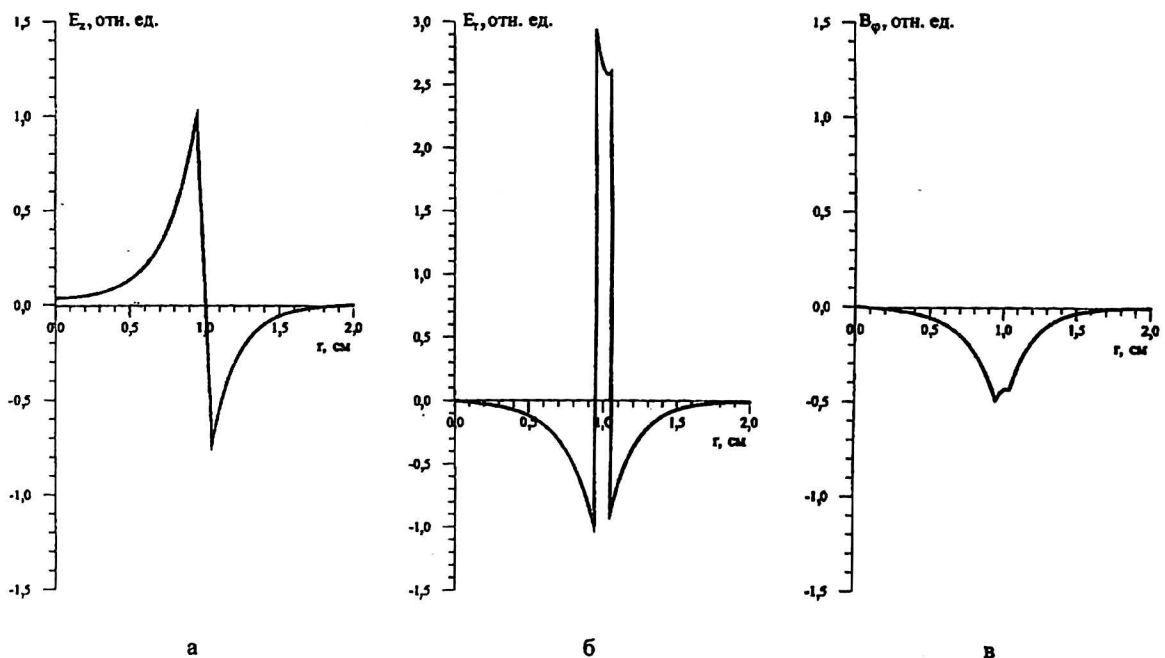


Рис. 5. Компоненты E_z , E_r , B_φ электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки В дисперсионной кривой 2 (см. рис. 3)

Из формулы (1.7), второй формулы (3.2) и соотношения (3.7) следует одно граничное условие

$$\left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = 0. \quad (3.8)$$

Приступим к вычислению предела (3.6). Сначала преобразуем это выражение, используя вторую формулу (3.2),

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(p)}}{dr} \right) = i \frac{c\chi^2}{\omega\epsilon_{\perp}} \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p B_{\phi}^{(p)} \right). \quad (3.9)$$

Учитывая физическую непрерывность компонент B_{ϕ} , подставим в (3.9) вакуумное значение $B_{\phi}^{(0)}(r_p)$ и выразим его через производную от E_z по r . Имеем

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(p)}}{dr} \right) = \frac{\chi^2}{\chi_0^2 \epsilon_{\perp}} \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(0)}}{dr} \right). \quad (3.10)$$

Предельное значение (2.16) ввиду конечности производной равно нулю, что соответствует отсутствию плазмы. Действительно, при $\Delta_p = 0$ противоположные поверхностные заряды на границах плазмы сливаются и в силу квазинейтральности взаимно компенсируют друг друга. Следовательно, предельный переход в (3.10) нужно понимать как уменьшение толщины плазмы до величины, свыше которой плазму тонкой считать нельзя, т. е.

$$\lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(0)}}{dr} \right) = \Delta_p \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p). \quad (3.11)$$

В заключительной части работы мы еще остановимся на структуре осуществляемых предельных переходов.

Подставляя далее (3.10) в (1.7), учитывая (3.11) и принимая во внимание (3.8), получим окончательно следующие граничные условия для описания немагнитной бесконечно тонкой трубчатой плазмы при возбуждении в ней высокочастотной поверхностной волны с аномальной дисперсией

$$\left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = 0; \quad (3.12)$$

$$\left\{ E_z^{(0)}(r_p) \right\} = \Delta_p \frac{\chi^2}{\chi_0^2 \epsilon_{\perp}} \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p).$$

В качестве примера рассмотрим дисперсию высокочастотной поверхностной волны с аномальной дисперсией в отсутствие внешнего магнитного поля и в приближении бесконечно тонкой плазмы. Подставляя решения (2.15) в граничные условия (3.12) и исключая постоянные A и B , получим следующее дисперсионное уравнение высокочастотной поверхностной волны с аномальной дисперсией:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = -r_p \Delta_p \chi^2 I_1^2(\chi_0 r_p) \left[\frac{K_1(\chi_0 r_p)}{I_1(\chi_0 r_p)} + \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)} \right]. \quad (3.13)$$

Для низкочастотной поверхностной волны с нормальным законом дисперсии дисперсионное уравнение сохраняет вид (2.16). На рис. 3 дисперсионные кривые 1а и 2а получены решением уравнений (2.16) и (3.13). Напомним, что на этом же рисунке изображены и дисперсионные кривые — обычные линии 1 и 2, полученные решением точного дисперсионного уравнения (3.4), т. е. без предположения о бесконечно тонкой плазме. Мы опять видим хорошее совпадение результатов. Особенно впечатляет оно для высокочастотной поверхностной волны в области $\omega < k_{zc}$. Действительно, кривые 2 и 2а в этой области частот практически слились. Более того, неплохое качественное совпадение имеется и при $\omega < k_{zc}$, т. е. в частотной области, вообще не намечавшейся здесь к рассмотрению. Что касается низкочастотной поверхностной волны — кривые 1 и 1а, то совпадение даже несколько хуже, чем в случае бесконечно сильного внешнего магнитного поля. Это связано с тем, что при учете конечной толщины плазмы в коротковолновом пределе в случае бесконечного магнитного поля частота выходит на ω_p , а при нулевом магнитном поле — частота стремится к $\omega_p/\sqrt{2}$. Однако в длинноволновой области и для низкочастотной поверхностной волны совпадение спектров практически идеально.

Еще одна иллюстрация адекватности приближения бесконечно тонкой плазмы приведена на рис. 6, где изображены спектры поверхностных волн для тонкой трубчатой плазмы со свободной поверхностью — радиус R в уравнениях (2.16) и (3.13) равен бесконечности. Остальные параметры плазмы такие же, как на рис. 1 и 3. Все обозначения на рис. 6 соответствуют обозначениям, использованным на рис. 3. Видно хорошее совпадение точных и приближенных дисперсионных кривых. Следует отметить, что приближение бесконечно тонкой плазмы правильно передает важное свойство поверхностных волн плазмы со свободной поверхностью —

в длинноволновой части спектра скорости этих волн равны скорости света.

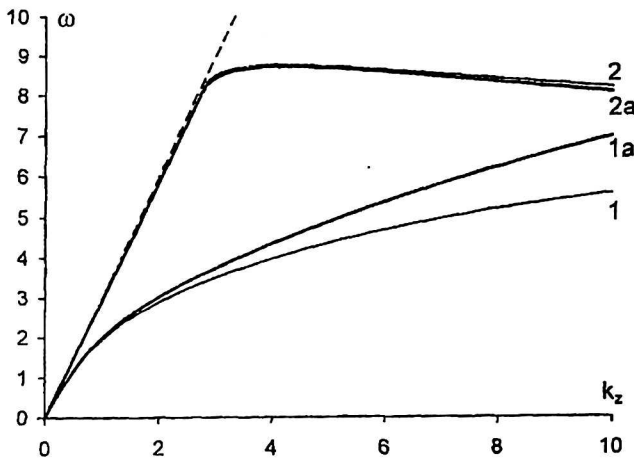


Рис. 6. Спектры поверхностных волн тонкой трубчатой плазмы со свободной поверхностью:

1 и 2 — решение точного дисперсионного уравнения; 1a и 2a — приближение бесконечно тонкой плазмы

До сих пор говоря о высокочастотной поверхностной волне в тонкой плазме без внешнего магнитного поля, мы использовали термин "аномальная дисперсия". Это не совсем точно. Аномальная дисперсия значительна только при выполнении неравенства

$$\frac{\Delta_p}{c/\omega_p} < 1. \quad (3.14)$$

Расчеты, результаты которых представлены на рис. 3—5 и которые обсуждались при получении граничных условий (3.12), выполнены для системы с параметром (3.14), равным 1/3. При увеличении плотности плазмы неравенство (3.14) нарушается и аномальная дисперсия пропадает, точнее, она переходит в область все более коротких длин волн, где приближение бесконечно тонкой плазмы перестает быть применимым. Поэтому целесообразно рассмотреть точность этого приближения в длинноволновой области (см. (1.5)), когда условие (3.14) не выполнено.

На рис. 7 изображены дисперсионные кривые для плазмы, на порядок более плотной, чем на предыдущих рисунках — $\omega_p = 3 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹, а остальные параметры — как на рис. 3. Видно, что в области релятивистских фазовых скоростей волн приближение бесконечно тонкой плазмы является вполне удовлетворительным. Аномальная дисперсия кривых 2 и 2a (см. рис. 7) наблюдается при k_z больших, чем показанных на рисунке.

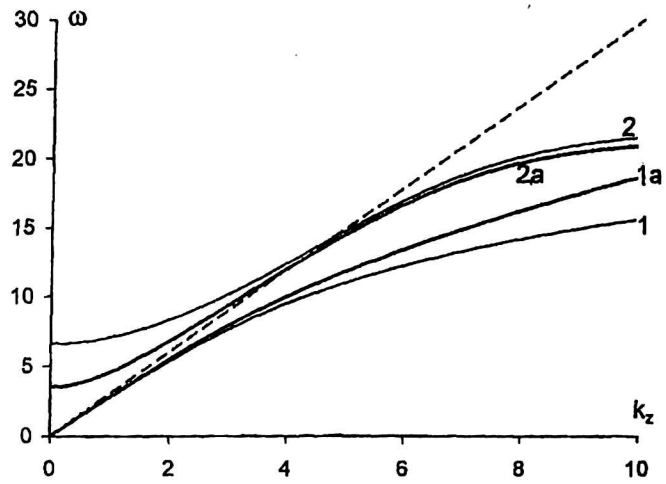


Рис. 7. Спектры поверхностных волн тонкой трубчатой плазмы большой плотности:

1 и 2 — решение точного дисперсионного уравнения; 1a и 2a — приближение бесконечно тонкой плазмы

Завершая рассмотрение тонкой плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля, заметим, что граничные условия (3.12) в отличие от граничных условий (2.13) не могут быть получены интегрированием по r уравнений поля с δ -образным поперечным профилем плазмы (2.14). Действительно, интегрирование третьего уравнения системы (3.1) дает соотношение

$$\{B_\varphi^{(0)}\} = i \frac{\omega}{c} \Delta_p \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_z^{(p)}(r_p). \quad (3.15)$$

Но учитывая, что плазма в высокочастотной поверхностной волне имеет структуру двойного слоя, а также используя рис. 5, а, заключаем, что $E_z^{(p)}(r_p) = 0$. Тогда из (3.15) и второго соотношения (3.2) следует первое граничное условие (3.12). Интегрируя далее второе уравнение (3.1) и учитывая конечность B_φ , получаем $\Delta_p \omega_p^2 E_r^{(p)}(r_p) = 0$. Поскольку погонная плотность плазмы постоянна ($\Delta_p \omega_p^2 = \text{const}$), то имеем один из двух вариантов: либо волны нет вообще, либо $E_r^{(p)}(r_p) = 0$. Первое заключение просто неверно, а второе — противоречит рис. 5, б. То, что граничные условия (3.12) не получаются интегрированием уравнений поля с δ -образным профилем плазмы, имеет простой физический смысл: существование высокочастотной поверхностной волны обусловлено явлениями на границах плазменной трубки, а не тем, что происходит в объеме плазмы.

4. Конечное внешнее магнитное поле

Перейдем к рассмотрению общего случая произвольного внешнего магнитного поля. Диэлектрическая проницаемость холодной электронной плазмы во внешнем магнитном поле имеет вид [9]

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $i, j = r, \varphi, z$,

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad g = -\frac{\omega_p^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)}, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

Ω_e — электронная циклотронная частота.

Как известно, при конечном значении Ω_e электромагнитное поле в плазменном волноводе не расщепляется на независимые поля E - и H -типов [9]. Поэтому требуется исходить из полной системы уравнений для всех шести компонент электромагнитного поля, имеющей вид

$$\begin{cases} ik_z E_r - \frac{dE_z}{dr} = i \frac{\omega}{c} B_{\varphi}; \\ k_z B_{\varphi} = \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\perp} E_r + \left[i \frac{\omega}{c} g E_{\varphi} \right]; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_{\varphi}) = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\parallel} E_z; \\ k_z E_{\varphi} = -\frac{\omega}{c} B_r; \\ ik_z B_r - \frac{dB_z}{dr} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\perp} E_{\varphi} - \left[\frac{\omega}{c} g E_r \right]; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_{\varphi}) = i \frac{\omega}{c} B_z. \end{cases} \quad (4.3)$$

Первые три уравнения системы (4.3) содержат тройку E_z, E_r, B_{φ} компонент поля E -типа, остальные три уравнения содержат тройку B_z, B_r, E_{φ} компонент поля H -типа. Члены, приводящие к зацепке волн разного типа, заключены в системе (4.3) в квадратные скобки.

С помощью уравнений (4.3) поперечные компоненты электромагнитного волноводного поля $E_r, E_{\varphi}, B_r, B_{\varphi}$ выражаются через продольные компоненты E_z, B_z и через их производные по координате r с помощью формул:

$$\begin{cases} E_r = \xi^{-1} \left\{ -ik_z \chi^2 \frac{dE_z}{dr} - g \frac{\omega^3}{c^3} \frac{dB_z}{dr} \right\}; \\ E_{\varphi} = \xi^{-1} \left\{ i \frac{\omega}{c} \chi^2 \frac{dB_z}{dr} - g k_z \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dE_z}{dr} \right\}; \\ B_r = \xi^{-1} \left\{ -ik_z \chi^2 \frac{dB_z}{dr} + g k_z^2 \frac{\omega}{c} \frac{dE_z}{dr} \right\}; \\ B_{\varphi} = \xi^{-1} \left\{ -i \varepsilon_{\perp} \frac{\omega}{c} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_{\perp} c^2} \right) \frac{dE_z}{dr} - g k_z \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dB_z}{dr} \right\}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Здесь $\chi^2 = k_z^2 - \varepsilon_{\perp} \omega^2 / c^2$, $\xi = \chi^4 - g^2 \omega^4 / c^4$.

Подставляя соотношения (4.4) в систему (4.3), получим систему уравнений для продольных компонент электрического и магнитного полей E_z и B_z

$$\begin{cases} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_{\perp} c^2} \right) \Delta_{\perp} E_z - \xi \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} E_z = ik_z \frac{\omega}{c} \frac{g}{\varepsilon_{\perp}} \Delta_{\perp} B_z; \\ \chi^2 \Delta_{\perp} B_z - \xi B_z = -ik_z \frac{\omega}{c} g \Delta_{\perp} E_z, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}$ — поперечная часть оператора Лапласа в цилиндрических координатах.

Уравнения (4.5) дополняются граничными условиями $E_z(R) = E_{\varphi}(R) = 0$. Получаемая при этом задача на собственные значения очень громоздка, особенно в случае трубчатой плазмы, и решается аналитически. Результатом решения являются дисперсионное уравнение и выражения для собственных функций [3, 5], которые ввиду их исключительной сложности здесь не приводятся. Необходимые же для нас результаты их численного исследования даны ниже.

При рассмотрении плазменного волновода в конечном магнитном поле следует различать два случая: сильное внешнее магнитное поле ($\Omega_e > \omega_p$) и слабое ($\Omega_e < \omega_p$).

Начнем со случая сильного магнитного поля, в рамках которого, очевидно, может быть описан и предельный переход $\Omega_e \rightarrow \infty$, т. е. случай бесконечно сильного внешнего магнитного поля.

На рис. 8 изображены характерные дисперсионные кривые поверхностных плазменных волн, полученные решением точного дисперсионного уравнения для плазменного волновода со следующими параметрами: $R = 2$ см; $r_p = 1$ см; $\Delta_p = 0,1$ см; $\omega_p = 10^{11}$ рад·с⁻¹; $\Omega_e = 1,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹. От системы с $\Omega_e = \infty$, дисперсионные кривые которой представлены на рис. 1, рассматриваемый волновод отличается только ко-

нечным значением электронной циклотронной частоты, а остальные параметры прежние. Кривой 1 на рис. 8 изображена дисперсионная зависимость низкочастотной плазменной волны, кривой 2 — высокочастотной плазменной волны.

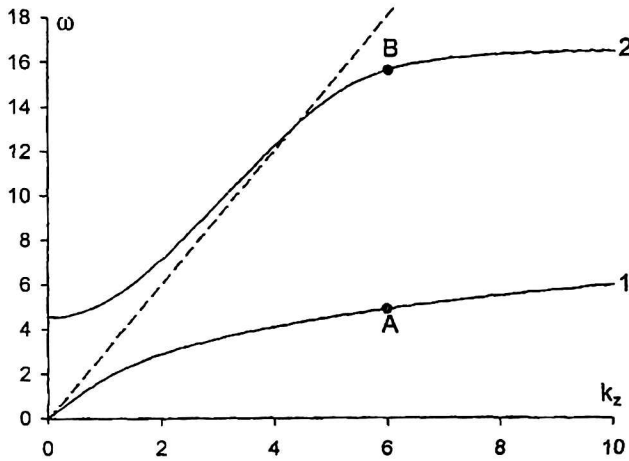


Рис. 8. Дисперсионные кривые поверхностных волн волновода с тонкой трубчатой плазмой, полученные решением точного дисперсионного уравнения при конечном внешнем магнитном поле (случай $\Omega_e > \omega_p$ — сильное магнитное поле):

1 — низкочастотная волна; 2 — высокочастотная волна

Рис. 1 отличается от рис. 8 в первую очередь отсутствием на нем дисперсионной кривой высокочастотной плазменной волны. Но это и понятно: при $\Omega_e \rightarrow \infty$ дисперсионная кривая высокочастотной плазменной волны расположена при бесконечно большой частоте. Дисперсионная кривая низкочастотной плазменной волны на рис. 8 имеет обычный вид. При $\Omega_e > \omega_p$ эта кривая в коротковолновом пределе ($k_z \rightarrow \infty$) асимптотически выходит на ω_p . В приближении бесконечно тонкой плазмы данная асимптотика не может быть описана. Напомним, что приближение бесконечно тонкой плазмы и рассматриваемые здесь эффективные граничные условия предназначены для описания плазменных волн в противоположном длинноволновом пределе (см. (1.5)). Поясним, что из всего множества медленных ($\omega < k_z c$) поверхностных плазменных волн в настоящей работе рассматриваются только основные поперечные моды: одна низкочастотная (см. рис. 8, кривая 1) и одна высокочастотная (см. рис. 8, кривая 2). Получим сначала эффективные граничные условия для полей низкочастотной плазменной волны в приближении бесконечно тонкой плазмы.

Из рис. 1, 3 и 8 с точными дисперсионными кривыми низкочастотной волны видна слабая зависимость этих кривых в длинноволновой области от величины внешнего магнитного поля. На рис. 9 для наглядности совместно изображе-

ны точные дисперсионные кривые, полученные при различных Ω_e : кривая 1 — $\Omega_e = \infty$; 2 — 0; 3 — $1,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹ (о кривой 4 будет сказано ниже). Все остальные параметры волновода и плазмы для кривых на рис. 9 одинаковые (кривые 3 и 4 должны быть сглажены, поскольку их мелкомасштабные пульсации обусловлены чисто техническими (программными) причинами). При достаточно малых k_z (в рассматриваемом конкретном примере при $k_z < 2 \div 3$ см⁻¹) дисперсионные кривые с графической точностью совпадают, а при больших волновых числах начинают слабо расходиться. Это обстоятельство обусловлено малостью толщины плазмы. Причем чем меньше Δ_p , тем в более широкой области k_z совпадают кривые. В случае тонкой плазмы от величины внешнего магнитного поля слабо зависит дисперсия низкочастотных волн и структуры полей оказываются близкими.

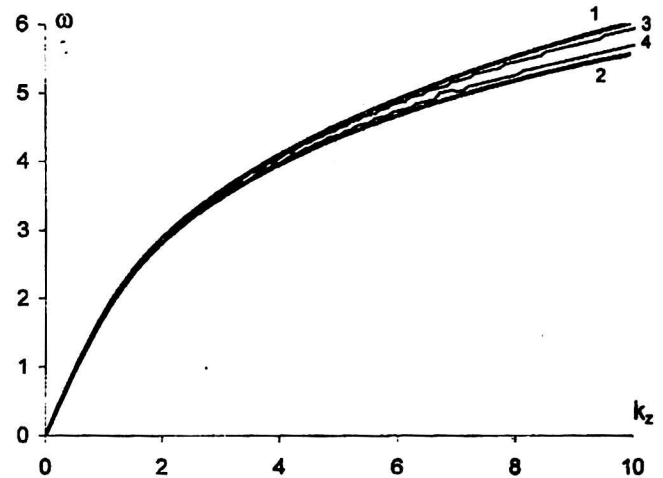


Рис. 9. Точные дисперсионные кривые низкочастотных поверхностных волн волновода с тонкой трубчатой плазмой при различном внешнем магнитном поле Ω_e :

1 — ∞ ; 2 — 0; 3 — $1,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹; 4 — $0,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹

На рис. 10.1 представлены компоненты E_z , E_r , B_p , рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 (см. рис. 8, $k_z = 6$ см⁻¹). Визуально различия между рис. 10.1, 10.2 и рис. 2, относящимся к случаю бесконечно сильного внешнего магнитного поля, обнаружить трудно. Конечно, внешнее магнитное поле проявляется в первую очередь в том, что в поле низкочастотной плазменной волны появляется примесь от поля H -типа. На рис. 10.2 представлены компоненты B_z , B_r и E_p , рассчитанные для той же точки А дисперсионной кривой 1 (см. рис. 8). Из сравнения рис. 10.2 и 10.1 следует, что примесь от поля H -типа невелика, поскольку компоненты B_z , B_r и E_p почти на два порядка меньше компоненты E_z , E_r , B_p , при этом единицы измерения на рис. 10.1 и 10.2 одинаковые.

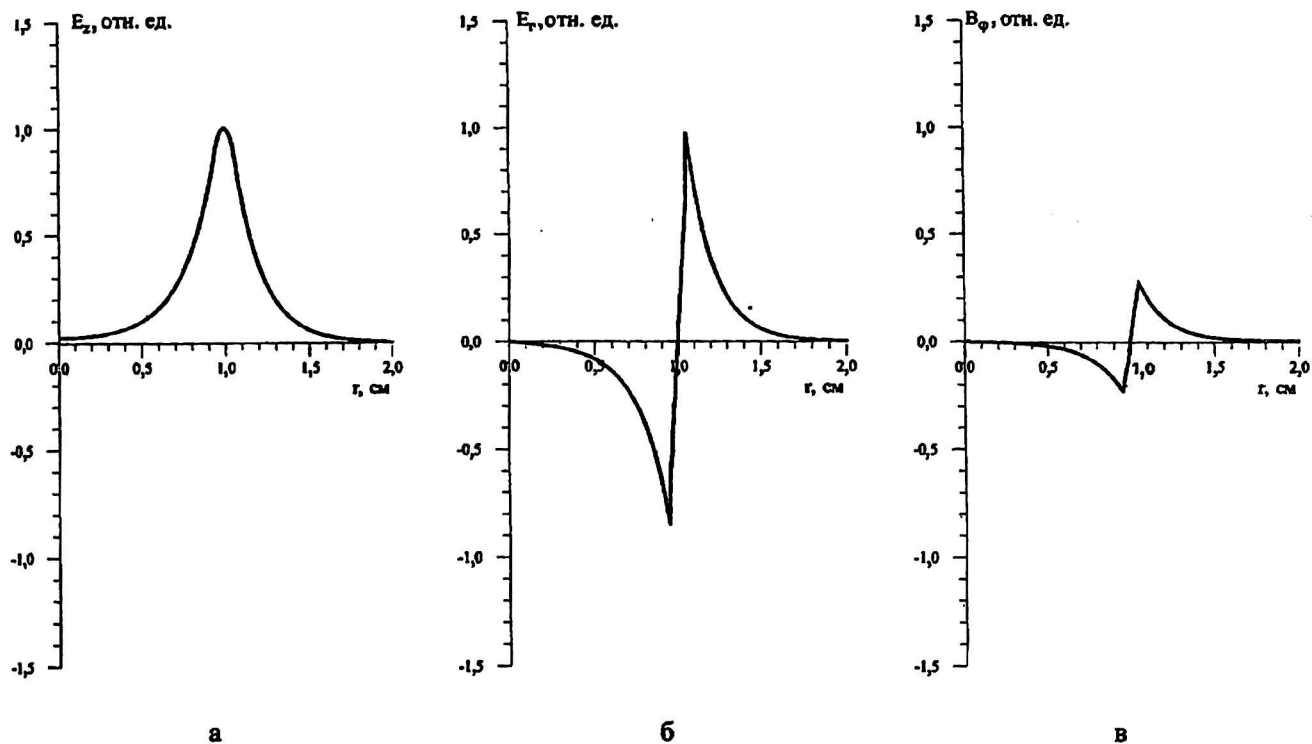


Рис. 10.1. Компоненты E_z , E_r , B_ϕ электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 с рис. 8 (случай $\Omega_e > \omega_p$ — сильное магнитное поле)

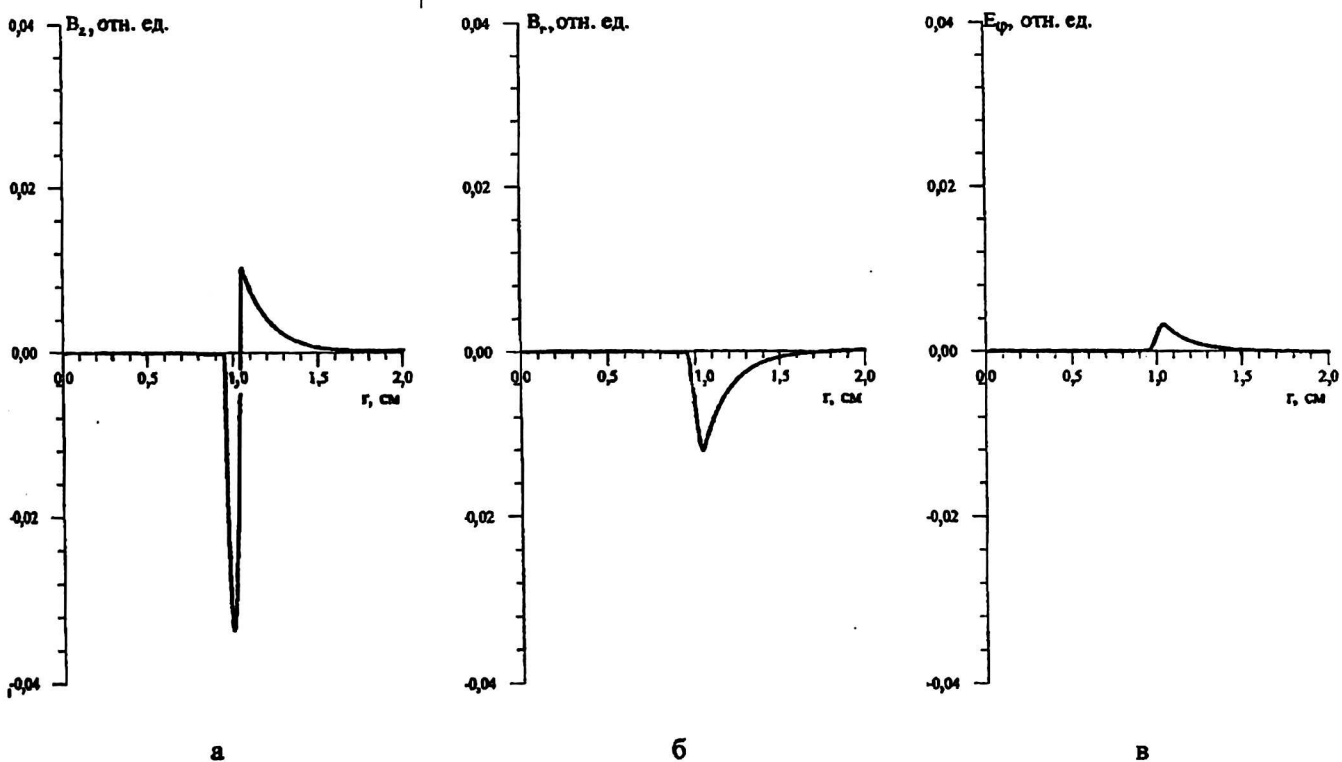


Рис. 10.2. Компоненты B_z , B_r и E_ϕ электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 с рис. 8 (случай $\Omega_e > \omega_p$ — сильное магнитное поле)

Таким образом, в случае тонкой плазмы дисперсия и структура поля низкочастотной поверхностной плазменной волны в длинноволновой части спектра слабо зависят от величины внешнего магнитного поля. С хорошей точностью они такие же, как при $\Omega_e = \infty$. Подчеркнем, что это справедливо только для тонкой плазмы.

Не сложно понять, почему низкочастотная поверхностная волна тонкой плазмы столь нечувствительна к величине внешнего магнитного поля. Как видно из рис. 10.1, поперечная к направлению внешнего магнитного поля компонента E_r внутри плазмы проходит через ноль, меняя при этом знак. Поэтому в среднем (по эффективности воздействия на заряды) E_r в объеме плазмы близка к нулю. Но именно компонента E_r приводит к наведению в плазме азимутального тока, а значит, и к возникновению полей H -типа. Математически это описывается выделенным членом предпоследнего уравнения системы (4.3). Поскольку в объеме плазмы в среднем $E_r \approx 0$, то этот член мал, чем и объясняется малость полей H -типа B_z , B_r и E_ϕ . Из рис. 10.1 также видно, что продольная к направлению внешнего магнитного поля компонента E_r внутри плазмы велика, а следовательно, в основном она определяет характер движения зарядов. Внешнее магнитное поле на такое движение очевидно не влияет, поскольку это движение вдоль магнитного поля. Поэтому закон дисперсии низкочастотной плазменной волны в длинноволновом пределе примерно одинаков при любой электронной циклотронной частоте Ω_e . Сказанное выше выполняется тем лучше, чем меньше толщина плазмы.

Таким образом, в приближении бесконечно тонкой плазмы при рассмотрении низкочастотной плазменной волны можно пренебречь эффектом зацепления полей разных типов и переписать общие уравнения (4.3), оставив в них три уравнения только для компонент E -волны:

$$ik_z E_r - \frac{dE_z}{dr} = i \frac{\omega}{c} B_\phi; \quad k_z B_\phi = \frac{\omega}{c} \varepsilon_\perp E_r; \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\phi) = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{||} E_z.$$

Исключенные же три уравнения можно использовать для оценки примеси полей H -типа. Используя (4.6), выразим компоненты E_r и B_ϕ через E_z и получим для E_z отдельное уравнение

$$E_r = -ik_z \frac{1}{\chi^2} \frac{dE_z}{dr}; \quad B_\phi = -i\varepsilon_\perp \frac{\omega}{c} \frac{1}{\chi^2} \frac{dE_z}{dr}; \quad (4.7)$$

$$\Delta_\perp E_z - \chi^2 \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon_\perp} E_z = 0. \quad (4.8)$$

Соотношения (4.7) и уравнение (4.8) обобщают (2.2), (2.3) и (3.2), (3.3) на случай произвольного внешнего магнитного поля (только при рассмотрении низкочастотной плазменной волны).

Из рис. 10.1, а и 10.1, в следует, что для компонент E_z и B_ϕ выполнены соотношения (2.6) и (2.7). При этом из (1.7) и (2.6) следует первое граничное условие (2.8). Далее из (1.7), (2.7), второй формулы (2.2) и второй формулы (4.7) имеем

$$\left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr} (r_p) \right\} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \varepsilon_\perp \frac{\chi_0^2}{\chi^2} \frac{d^2 E_z^{(p)}}{dr^2} \right). \quad (4.9)$$

Находя из уравнения (4.8) вторую производную от $E_z^{(p)}$ и подставляя ее в (4.9), получим соотношение, в точности совпадающее с (2.11). Определение предельного перехода никаких особенностей, связанных с конечностью внешнего магнитного поля, не имеет. Таким образом, получаем, что для полей низкочастотной поверхностной волны бесконечно тонкой трубчатой плазмы в конечном внешнем магнитном поле справедливы прежние эффективные граничные условия (2.13). Следовательно, и в конечном внешнем магнитном поле справедливо дисперсионное уравнение (2.16), а значит, его решения верно описывают дисперсию низкочастотных поверхностных волн бесконечно тонкой плазмы при различных внешних магнитных полях. Это полностью подтверждают данные рис. 9, на котором показаны дисперсионные кривые, полученные на основании точной математической модели, а также данные рис. 1 и рис. 3, на которых сравниваются точные решения дисперсионного уравнения с решениями в приближении бесконечно тонкой плазмы.

Перейдем теперь к получению эффективных граничных условий для полей высокочастотной плазменной волны. Пока считаем внешнее магнитное поле сильным, т. е. $\Omega_e > \omega_p$. Точная дисперсионная кривая высокочастотной волны для этого случая представлена на рис. 8 кривой 2. В коротковолновой области эта кривая имеет аномальную дисперсию и при $k_z \rightarrow \infty$ выходит на циклотронную частоту Ω_e сверху (на рисунке эта область не показана, так как начинается с больших k_z). Максимальная частота этой волны не превосходит верхнюю гибридную частоту $\Omega_h = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega_e^2}$ (для параметров на рис. 8 $\Omega_h \approx 1,8 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹), а частота отсечки ω ($k_z = 0$) не зависит от Ω_e , но зависит от ω_p . На рис. 11.1 и 11.2 представлены компоненты поля высокочастотной плазменной волны, вычисленные в точке В дисперсионной кривой 2 (см. рис. 8).

Из рис. 11.1 видно, что компоненты E_z , E_r , B_φ напоминают те же компоненты в высокочастотной плазменной волне при нулевом внешнем магнитном поле (см. рис. 5). Кроме того, в случае конечного внешнего поля оказываются значительными компоненты B_z , B_r , E_φ , что видно из рис. 11.2. Поэтому в данном случае говорить о примеси поля H -типа в E -волну не совсем

верно: высокочастотная плазменная волна в конечном внешнем магнитном поле является смешанной волной EH -типа. Большая величина компонент E_z , E_r , B_φ связана с тем, что в высокочастотной волне поперечная компонента электрического поля E_r значительна внутри плазмы (см. рис. 11.1, б).

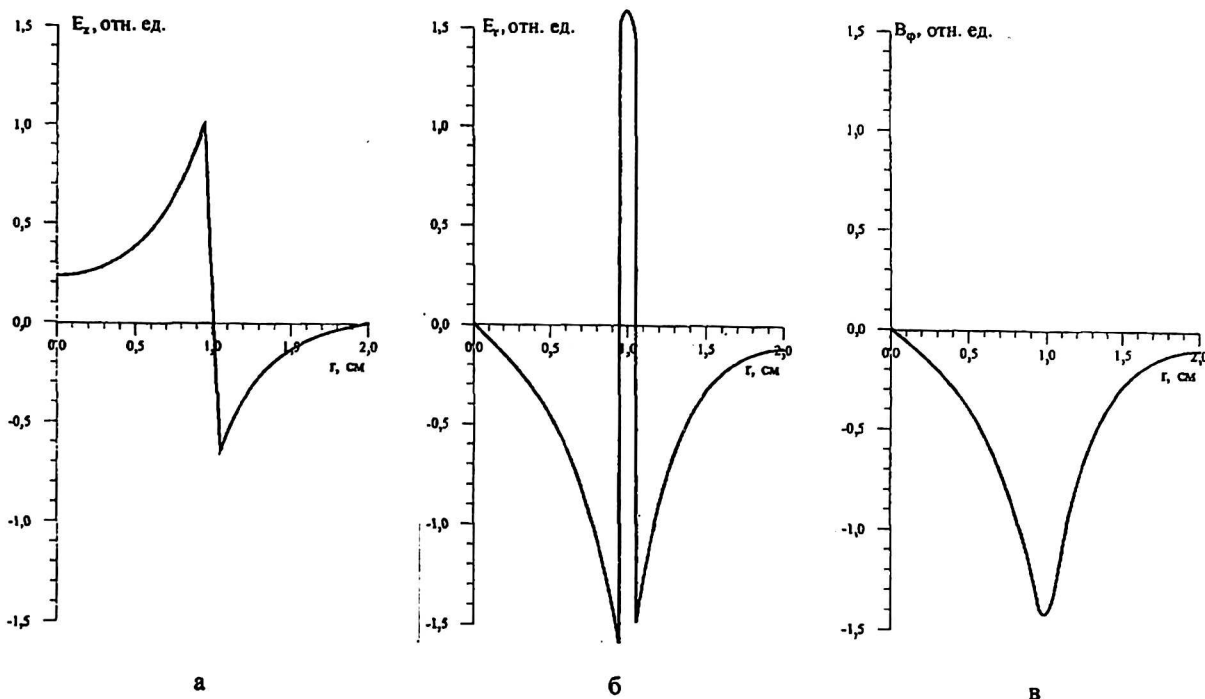


Рис. 11.1. Компоненты E_z , E_r , B_φ электромагнитного поля высокочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки В дисперсионной кривой 2 с рис. 8 (случай $\Omega_e > \omega_p$ — сильное магнитное поле)

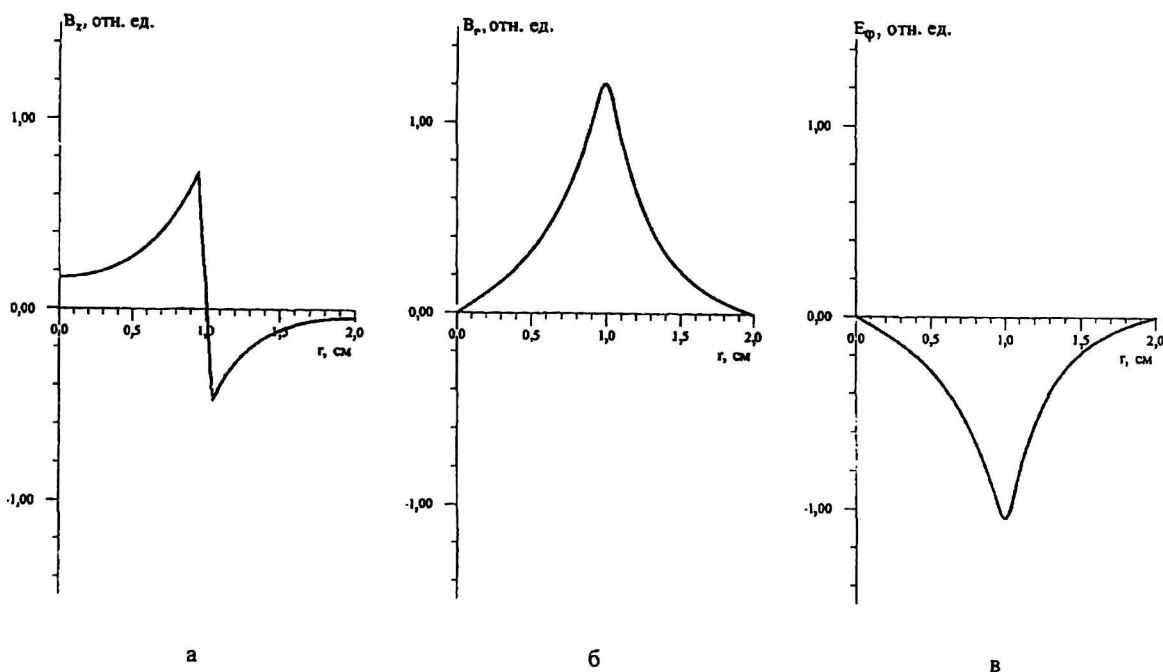


Рис. 11.2. Компоненты E_z , E_r , B_φ электромагнитного поля высокочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки В дисперсионной кривой 2 с рис. 8 (случай $\Omega_e > \omega_p$ — сильное магнитное поле)

Запишем соотношения (1.7) для тангенциальных к границам плазмы компонент электромагнитного поля

$$\left\{ E_z^{(0)}(r_p) \right\} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_z^{(p)}}{dr} \right); \quad (4.10)$$

$$\left\{ B_z^{(0)}(r_p) \right\} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dB_z^{(p)}}{dr} \right);$$

$$\left\{ E_\phi^{(0)}(r_p) \right\} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dE_\phi^{(p)}}{dr} \right); \quad (4.11)$$

$$\left\{ B_\phi^{(0)}(r_p) \right\} = \lim_{\Delta_p \rightarrow 0} \left(\Delta_p \frac{dB_\phi^{(p)}}{dr} \right).$$

Рассмотрим сначала соотношения (4.11). Учитывая вид компонент $B_\phi^{(p)}(r)$ и $E_\phi^{(p)}(r)$, представленных на рис. 11.1, *в* и 11.2, *в*, и почти дословно повторяя аргументы, представленные при получении граничных условий (3.12), заключаем, что пределы в правых частях соотношений (4.11) равны нулю.

Таким образом,

$$\left\{ E_\phi^{(0)}(r_p) \right\} = 0; \quad \left\{ B_\phi^{(0)}(r_p) \right\} = 0. \quad (4.12)$$

Учитывая, что в вакуумных областях волновода справедливы формулы (4.4)

$$B_\phi^{(0)} = -i \frac{\omega}{c\chi_0^2} \frac{dE_z^{(0)}}{dr}; \quad E_\phi^{(0)} = i \frac{\omega}{c\chi_0^2} \frac{dB_z^{(0)}}{dr}, \quad (4.13)$$

получаем из (4.12) первые два граничных условия

$$\left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = 0; \quad \left\{ \frac{dB_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = 0. \quad (4.14)$$

Теперь перейдем к рассмотрению соотношений (4.10). Учитывая вид компонент $E_z^{(p)}(r)$ и $B_z^{(p)}(r)$, представленных на рис. 11.1, *а* и 11.2, *а*, и обращаясь к рассуждениям, проделанным при выводе граничных условий (3.12), заключаем, что пределы в правых частях соотношений (4.10) отличны от нуля. Вычислим эти предельные значения, поступая практически так же, как при переходе от (3.6) к (3.11). Используя вторую и четвертую формулы (4.4), выразим производные от $E_z^{(p)}$ и $B_z^{(p)}$ через $E_\phi^{(p)}$ и $B_\phi^{(p)}$, в результате чего имеем

$$\frac{dE_z^{(p)}}{dr} = i \frac{c}{\omega \varepsilon_\perp} \chi^2 B_\phi^{(p)} + k_z \frac{g}{\varepsilon_\perp} E_\phi^{(p)}; \quad (4.15)$$

$$\frac{dB_z^{(p)}}{dr} = -i \frac{c}{\omega} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_\perp c^2} \right) E_\phi^{(p)} + k_z \frac{g}{\varepsilon_\perp} B_\phi^{(p)}.$$

Учитывая физическую непрерывность компонент B_ϕ и E_ϕ и условия (4.12), подставим в (4.15) вакуумные значения $B_\phi^{(0)}(r_p)$ и $E_\phi^{(0)}(r_p)$ и выразим их через производные от E_z и B_z по r . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dE_z^{(p)}}{dr}(r_p) &= \frac{\chi^2}{\chi_0^2 \varepsilon_\perp} \frac{dE_z^{(0)}}{dr} + ik_z \frac{\omega}{c} \frac{g}{\chi_0^2 \varepsilon_\perp} \frac{dB_z^{(0)}}{dr}, \\ \frac{dB_z^{(p)}}{dr}(r_p) &= \frac{1}{\chi_0^2} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_\perp c^2} \right) \frac{dB_z^{(0)}}{dr} - \\ &\quad - ik_z \frac{\omega}{c} \frac{g}{\chi_0^2 \varepsilon_\perp} \frac{dE_z^{(0)}}{dr}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подставляя далее (4.16) в (4.10) и объединяя результат с (4.14), получим следующие граничные условия для полей высокочастотной плазменной волны в конечном внешнем магнитном поле в приближении бесконечно тонкой плазмы:

$$\left\{ \begin{aligned} \left\{ \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} &= 0, \quad \left\{ \frac{dB_z^{(0)}}{dr}(r_p) \right\} = 0; \\ \left\{ E_z^{(0)}(r_p) \right\} &= \Delta_p \frac{\chi^2}{\chi_0^2 \varepsilon_\perp} \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p) + \\ &\quad + ik_z \frac{\omega}{c} \Delta_p \frac{g}{\chi_0^2 \varepsilon_\perp} \frac{dB_z^{(0)}}{dr}(r_p); \\ \left\{ B_z^{(0)}(r_p) \right\} &= \Delta_p \frac{1}{\chi_0^2} \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_\perp c^2} \right) \frac{dB_z^{(0)}}{dr}(r_p) - \\ &\quad - ik_z \frac{\omega}{c} \Delta_p \frac{g}{\chi_0^2 \varepsilon_\perp} \frac{dE_z^{(0)}}{dr}(r_p). \end{aligned} \right. \quad (4.17)$$

Рассмотрим теперь случай слабого магнитного поля ($\Omega_e > \omega_p$). Этот случай очевидно должен содержать и предельный переход $\Omega_e = 0$. На рис. 12 изображены характерные дисперсионные кривые поверхностных плазменных волн, полученные

решением точного дисперсионного уравнения для плазменного волновода со следующими параметрами: $R = 2$ см; $r_p = 1$ см; $\Delta_p = 0,1$ см; $\omega_p = 10^{11}$ рад·с⁻¹ и $\Omega_e = 0,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹. Кривая 1 на рис. 12 изображает дисперсионную зависимость низкочастотной плазменной волны, а кривая 2 — высокочастотной плазменной волны. Кривая 1 имеет такой же вид, как и на рис. 1, 3, 8. При $\Omega_e < \omega_p$ эта кривая в коротковолновом пределе ($k_z \rightarrow \infty$) асимптотически выходит на $\omega_h/\sqrt{2}$, приближаясь к этой частоте снизу. Кривая 2 высокочастотной волны в коротковолновом пределе также стремится к $\omega_h/\sqrt{2}$, но сверху, имея аномальный закон дисперсии. В приближении бесконечно тонкой плазмы данные коротковолновые асимптотики не могут быть описаны.

На рис. 13.1 и 13.2 изображены компоненты электромагнитного поля низкочастотной поверхностной плазменной волны, вычисленные в точке А дисперсионной кривой 1 (см. рис. 11). Видна полная аналогия с рис. 10.1 и 10.2. Дисперсионная кривая низкочастотной плазменной волны 1 (см. рис. 12) приведена и на рис. 9 — кривая 4. В длинноволновом пределе она совпадает с дисперсионными кривыми, полученными при других внешних магнитных полях.

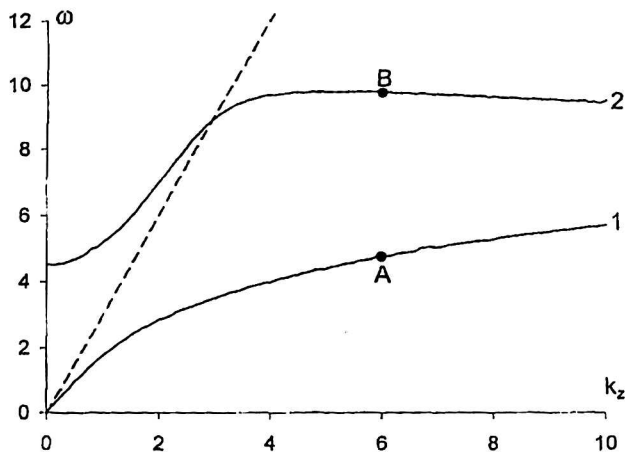


Рис. 12. Дисперсионные кривые поверхностных волн волновода с тонкой трубчатой плазмой, полученные решением точного дисперсионного уравнения при конечном внешнем магнитном поле (случай $\Omega_e < \omega_p$ — слабое магнитное поле): 1 — низкочастотная волна; 2 — высокочастотная волна

Таким образом, низкочастотная поверхностная волна тонкой плазмы в длинноволновой области во всем диапазоне изменения внешнего магнитного поля ($0 \leq \Omega_e \leq \infty$) имеет одинаковую дисперсию и близкие структуры поля. Следовательно, в приближении бесконечно тонкой плазмы при описании низкочастотной поверхностной плазменной волны независимо от величины внешнего магнитного поля справедливы граничные условия (2.13).

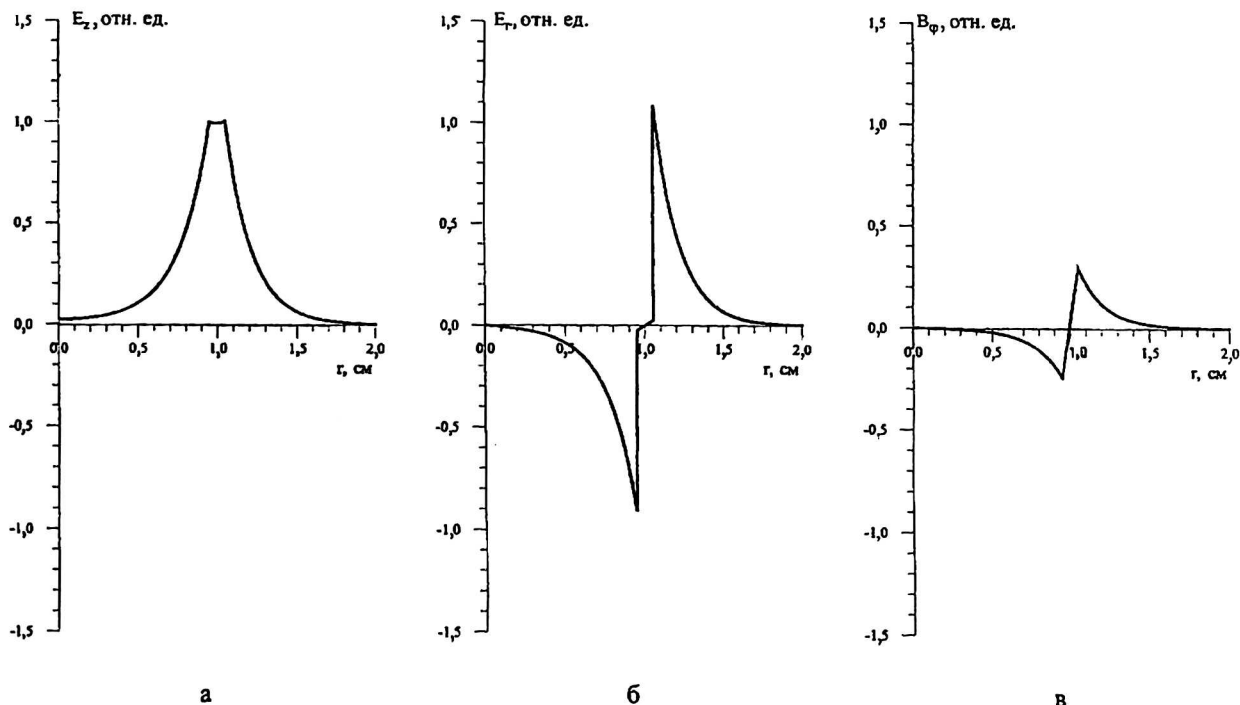


Рис. 13.1. Компоненты E_z , E_r , B_ϕ электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 с рис. 12 (случай $\Omega_e < \omega_p$ — слабое магнитное поле)

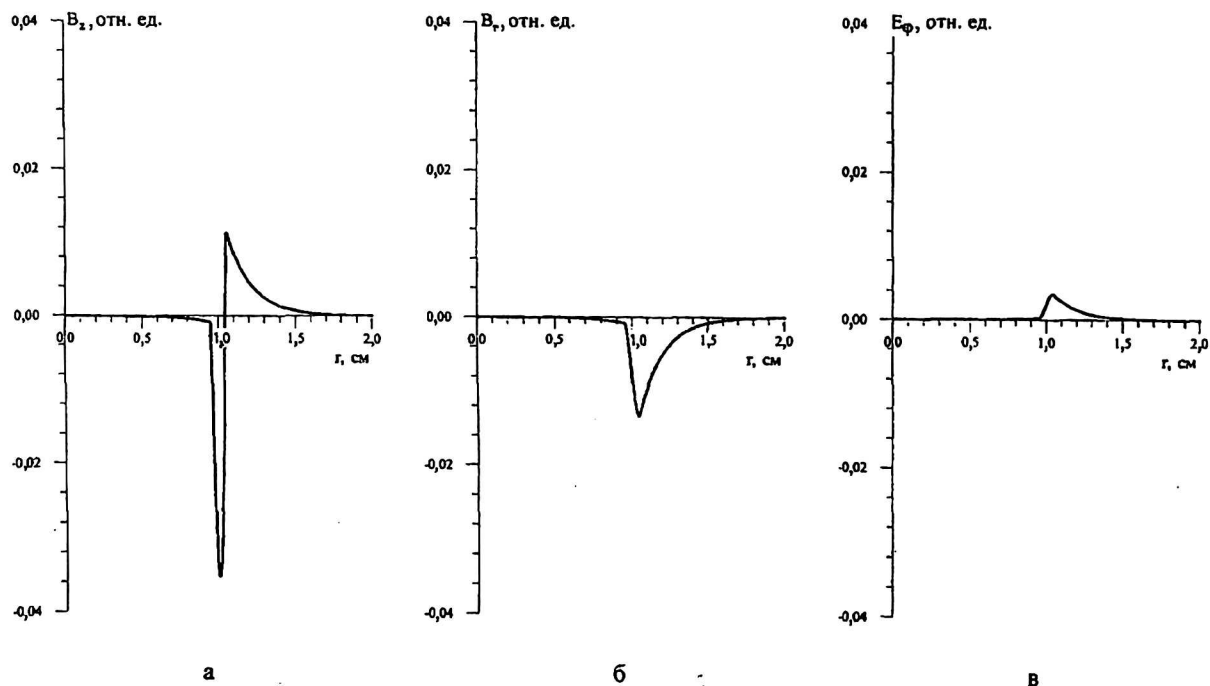


Рис. 13.2. Компоненты B_z , B_r , E_φ электромагнитного поля низкочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки А дисперсионной кривой 1 с рис. 12 (случай $\Omega_e < \omega_p$ — слабое магнитное поле)

Как уже говорилось, высокочастотная плазменная волна при $\Omega_e < \omega_p$ выражена дисперсионной кривой 2 на рис. 12. Компоненты электромагнитного поля этой волны для точки В дисперсионной кривой 2 с рис. 12 представлены на рис. 14.1 и 14.2. Видна полная аналогия с соответствующими компонентами поля в случае $\Omega_e > \omega_p$ (см. рис. 11.1 и 11.2). Следовательно,

различать случаи сильного и слабого внешнего магнитных полей при рассмотрении в длинноволновом пределе низкочастотной и высокочастотной поверхностных волн тонкой плазмы не имеет смысла. Различия имеются только в коротковолновой области, которая здесь не рассматривается из-за неприменимости в ней приближения бесконечно тонкой плазмы.

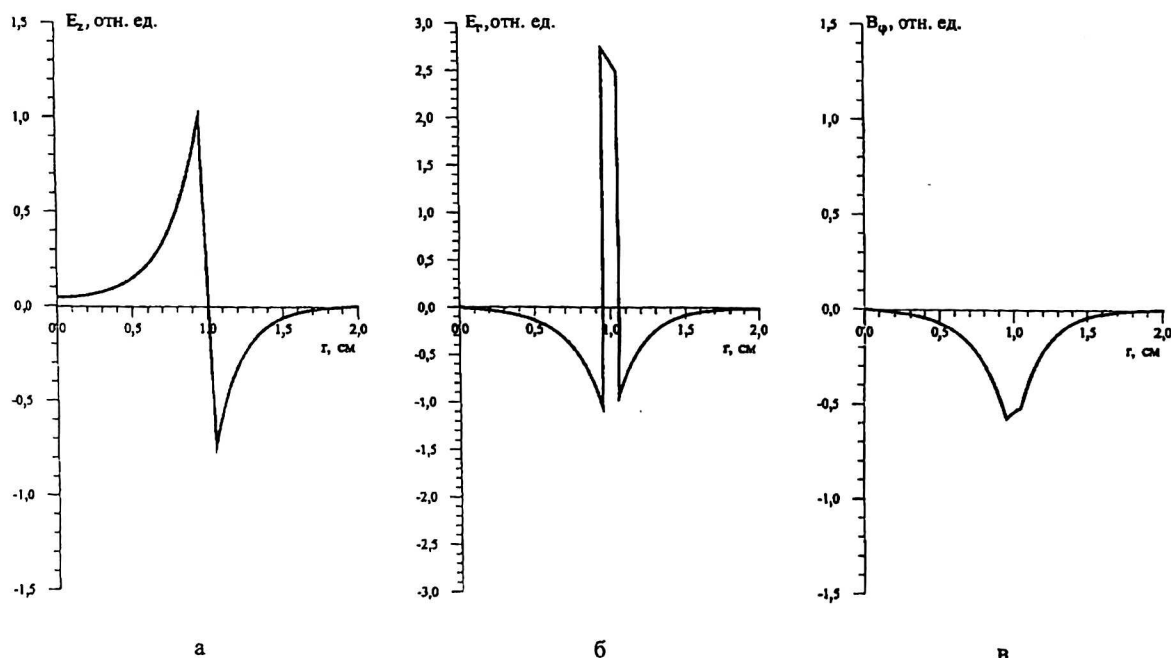


Рис. 14.1. Компоненты E_z , E_r , B_φ электромагнитного поля высокочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки В дисперсионной кривой 2 с рис. 12 (случай $\Omega_e < \omega_p$ — слабое магнитное поле)

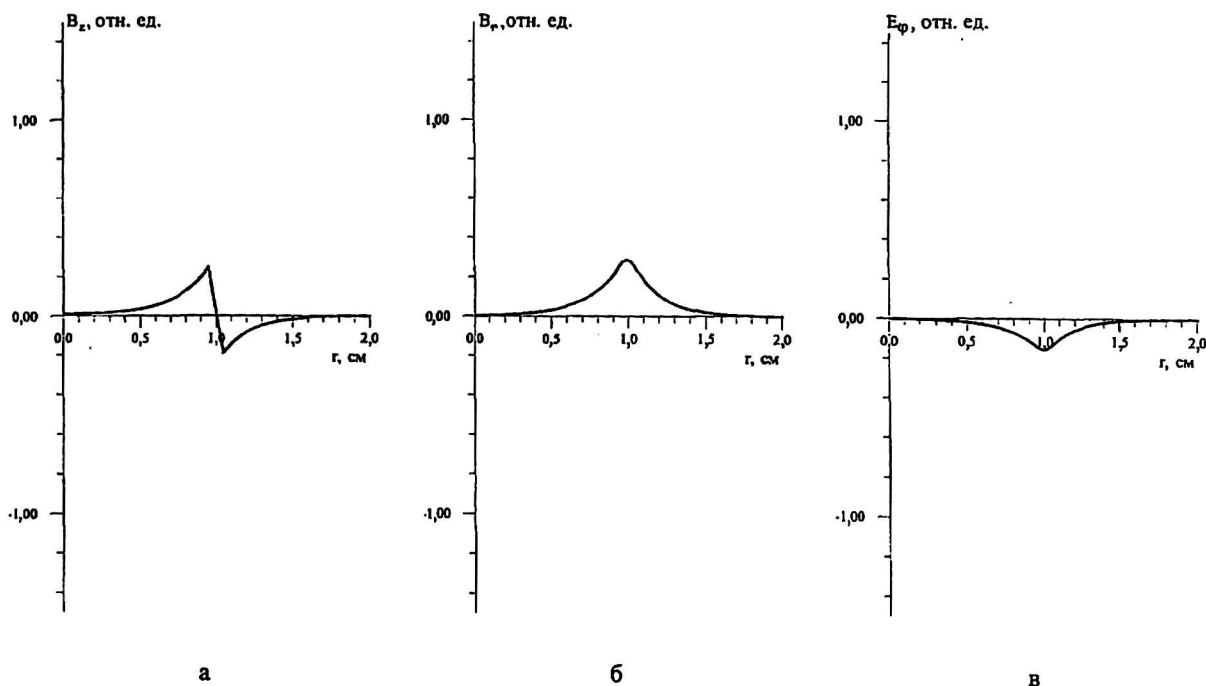


Рис. 14.2. Компоненты B_z , B_r , E_ϕ электромагнитного поля высокочастотной поверхностной волны, рассчитанные для точки В дисперсионной кривой 2 с рис. 12 (случай $\Omega_e < \omega_p$ — слабое магнитное поле)

Таким образом, в приближении бесконечно тонкой плазмы при описании высокочастотной поверхностной плазменной волны независимо от величины внешнего магнитного поля справедливы эффективные граничные условия (4.17). В частном случае $\Omega_e = 0$, и граничные условия (4.17) переходят в условия (3.12).

5. Волны бесконечно тонкой плазмы в конечном внешнем магнитном поле

Используем полученные эффективные граничные условия для исследования спектров поверхностных волн тонкой трубчатой плазмы в волноводе в конечном внешнем магнитном поле. Сосредоточимся только на высокочастотных волнах, поскольку, как было установлено выше, дисперсия и поля низкочастотных волн тонкой плазмы от величины внешнего магнитного поля не зависят. Дополним граничные условия (4.17) требованием равенства нулю на металлической стенке волновода тангенциальных компонент электрического поля

$$E_z(R) = E_\phi(R) = 0. \quad (5.1)$$

Учитывая вторую формулу (4.13), получим из (5.1) следующие граничные условия на металлической стенке волновода:

$$E_z^{(0)}(R) = 0; \quad \frac{dB_z^{(0)}}{dr}(R) = 0. \quad (5.2)$$

Соотношения (4.17) вместе с (5.2) образуют полную систему граничных условий для электромагнитного поля высокочастотной волны тонкой плазмы в конечном магнитном поле.

В вакуумных областях волновода, как видно из второго уравнения (4.5), компонента $B_z^{(0)}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB_z}{dr} \right) - \chi_0^2 B_z = 0. \quad (5.3)$$

Решение уравнения (5.3), удовлетворяющее второму условию (5.2), имеет вид

$$B_z^{(0)} = \begin{cases} CI_0(\chi_0 r), & r < r_p; \\ D \left[I_0(\chi_0 r) + K_0(\chi_0 r) \frac{I_1(\chi_0 R)}{K_1(\chi_0 R)} \right], & r_p < r < R, \end{cases} \quad (5.4)$$

где C и D — некоторые постоянные.

Компонента E_z , удовлетворяющая первому условию (5.2), по-прежнему дается формулой (2.15).

Подставляя далее (5.4) и (2.15) в граничные условия (4.17) и исключая постоянные A , B , C и D , получим следующее дисперсионное уравнение для спектров высокочастотной поверхностной волны в приближении бесконечно тонкой плазмы в конечном магнитном поле:

$$\left(1 + \Delta_p r_p \frac{\chi^2}{\varepsilon_{\perp}} G_E\right) \left[1 + \Delta_p r_p \left(\chi^2 + \frac{g^2 \omega^2}{\varepsilon_{\perp} c^2}\right) G_B\right] = \quad (5.5)$$

$$= \Delta_p^2 r_p^2 k_z^2 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{g^2}{\varepsilon_{\perp}^2} G_E G_B.$$

Здесь введены следующие обозначения для геометрических факторов:

$$G_E = I_1^2(\chi_0 r_p) \left[\frac{K_1(\chi_0 r_p)}{I_1(\chi_0 r_p)} + \frac{K_0(\chi_0 R)}{I_0(\chi_0 R)} \right]; \quad (5.6)$$

$$G_B = I_1^2(\chi_0 r_p) \left[\frac{K_1(\chi_0 r_p)}{I_1(\chi_0 r_p)} - \frac{K_1(\chi_0 R)}{I_1(\chi_0 R)} \right].$$

В случае нулевого внешнего магнитного поля правая часть в (5.5) обращается в ноль ($g = 0$). В результате дисперсионное уравнение (5.5) распадается на два независимых уравнения:

$$1 + \Delta_p r_p \frac{\chi^2}{\varepsilon_{\perp}} G_E = 0 \quad (5.7, a)$$

и

$$1 + \Delta_p r_p \chi^2 G_B = 0 \quad (5.7, б)$$

для волн E - и H -типов, соответственно.

Легко видеть, что уравнение (5.7, а) в точности совпадает с дисперсионным уравнением (3.13), а уравнение (5.7, б) при $\omega < k_z c$ корней не имеет. Но так и должно быть, поскольку в данной области частот каких-либо дисперсионных кривых волн H -типа нет.

Таким образом, уравнение (5.5) верно описывает предельный переход к нулевому магнитному полю. Заметим, что дисперсионное уравнение (2.16) из уравнения (5.5) предельным переходом к бесконечно сильному внешнему магнитному полю получить нельзя: эти уравнения относятся к качественно разным поверхностным плазменным волнам.

На рис. 15 представлены результаты сравнения дисперсионных кривых, полученных решением приближенного дисперсионного уравнения (5.5), и точного дисперсионного уравнения. Дисперсионные кривые рассчитаны для плазменного волновода с $R = 2$ см; $r_p = 1$ см; $\Delta_p = 0,1$ см; $\omega_p = 10^{11}$ рад·с⁻¹ при двух значениях циклотронной частоты: $\Omega_e = 0,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹ (см. рис. 15, а) и $\Omega_e = 1,5 \cdot 10^{11}$ рад·с⁻¹ (см. рис. 15, б). Указанные параметры те же, что и на рис. 8 и 12, с которых скопированы точные кривые для удобства их сравнения с приближенными. Из рис. 15, а, б видна высокая эффективность приближения бесконечно тонкой плазмы: приближенные и

точные кривые различаются только вблизи частот отсечки, где использовать рассматриваемое приближение и не предполагалось. Заметим, что правая часть уравнения (5.5) является величиной, квадратичной по малому параметру $k_z \Delta_p$. Поэтому с точностью до квадратичных по этому параметру членов спектры в приближении бесконечно тонкой плазмы определяются из уравнения (5.7, а), в котором ε_{\perp} определяется первым выражением (4.2). Спектры, полученные из (5.7, а), также хорошо согласуются с найденными из более точных моделей.

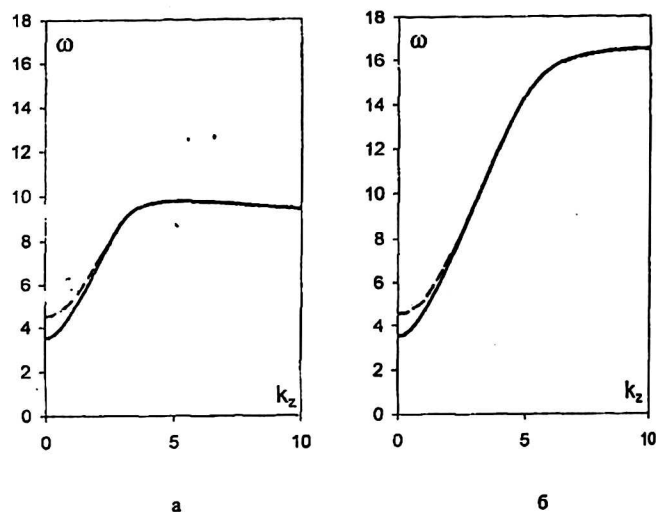


Рис. 15. Результаты сравнения дисперсионных кривых, полученных решением дисперсионного уравнения в приближении бесконечно тонкой плазмы — прямые линии, и точного дисперсионного уравнения — пунктирные линии

6. Структура предельного перехода

Завершая рассмотрение, остановимся подробнее на предельных переходах (2.12), (3.11) и им подобных. Исследуем изменения в частотах и структурах полей поверхностных волн при уменьшении толщины плазмы Δ_p и при $\omega_p^2 = \text{const}$. Проделаем это на простейшем примере поверхностных волн плазменного слоя. Предположим, что плазма имеет вид плоского слоя, расположенного при $x \in [-\Delta_p, \Delta_p]$. Внутри слоя плазма однородна, а границы плазмы $x = \pm \Delta_p$ резкие. Ограничимся только случаем плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля и волнами, распространяющимися вдоль плазменного слоя в направлении оси OZ .

Интересующие нас поверхностные волны слоя существуют в частотном диапазоне, определяемом неравенствами $\omega^2 < k_z^2 c^2$, $\omega^2 < \omega_p^2$. Их частоты $\omega(k_z)$ находятся из следующих дисперсионных уравнений:

$$D(\omega, k_z) \equiv \begin{cases} \varepsilon\chi_0 \operatorname{cth}(\chi\Delta_p) + \chi = 0 & \text{— высокочастотная волна;} \\ \varepsilon\chi_0 \operatorname{th}(\chi\Delta_p) + \chi = 0 & \text{— низкочастотная волна,} \end{cases} \quad (6.1)$$

а компоненты поля E_z даются формулами [12]:

$$E_z = \begin{cases} \begin{cases} \operatorname{sh}(\chi x) & \text{— высокочастотная волна;} \\ \operatorname{ch}(\chi x) & \text{— низкочастотная волна} \end{cases} & -\Delta_p < x < \Delta_p, \\ \begin{cases} \operatorname{sh}(\chi\Delta_p)\exp(\chi_0\Delta_p)\exp(-\chi_0 x) & \text{— высокочастотная волна;} \\ \operatorname{ch}(\chi\Delta_p)\exp(\chi_0\Delta_p)\exp(-\chi_0 x) & \text{— низкочастотная волна.} \end{cases} & |x| > \Delta_p. \end{cases} \quad (6.2)$$

Здесь $\chi_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2$, $\chi^2 = k_z^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$;

ε — диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы.

В высокочастотной волне $E_z(x)$ нечетная функция, а в низкочастотной — четная. Остальные компоненты полей волн выражаются через (6.2) по формулам

$$E_x = -i \frac{k_z}{\chi^2} \frac{dE_z}{dx}; \quad B_y = -i \frac{\omega}{c\chi^2} \varepsilon \frac{dE_z}{dx}, \quad (6.3)$$

справедливым как в вакууме ($\varepsilon = 1$), так и в плазме. Тройка величин E_z , E_x , B_y в плоской геометрии аналогична тройке E_z , E_r , B_φ в геометрии цилиндрической.

Эффективные граничные условия должны устанавливать величину разностей

$$D_1 \equiv E_z(\Delta_p + 0) - E_z(-\Delta_p - 0) \\ \text{и} \quad D_2 \equiv \frac{dE_z}{dx}(\Delta_p + 0) - \frac{dE_z}{dx}(-\Delta_p - 0), \quad (6.4)$$

в которых компоненты E_z и их производные по x вычисляются в вакуумных областях системы по разные стороны плазменного слоя, т. е. при $|x| \rightarrow \Delta_p + 0$.

Используя свойства четности функций (6.2) и их производных и учитывая дисперсионные уравнения (6.1), легко показать, что:

в случае низкочастотной волны:

$$D_1 = 0; \quad D_2 = 2\varepsilon\chi_0^2 \frac{\operatorname{sh}(\chi\Delta_p)}{\chi} \approx -2\Delta_p\chi_0^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad (6.5)$$

в случае высокочастотной волны:

$$D_1 = 2\operatorname{sh}(\chi\Delta_p) \approx 2\Delta_p\chi; \quad D_2 = 0. \quad (6.6)$$

Приближенные равенства в (6.5) и (6.6) получены в предположении того, что выполнено (1.5). Подставляя решения (6.2) в эффективные граничные условия (2.13) и (3.12) и учитывая при этом дисперсионные уравнения (6.1), можно убедиться, что при выполнении неравенства (1.5) граничные условия (2.13) совпадают с (6.5),

а условия (3.12) сводятся к (6.6). При этом необходимо учитывать что роль Δ_p в плоском случае играет величина $2\Delta_p$.

Из дисперсионных уравнений (6.1) следует, что при $\Delta_p \rightarrow 0$ частота низкочастотной волны по закону

$$\omega \approx \omega_p \sqrt{\Delta_p k_z} \quad (6.7)$$

стремится к нулю, а частота высокочастотной волны по закону

$$\omega \approx \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \Delta_p k_z}} \quad (6.8)$$

выходит на ω_p .

На рис. 16 показаны характерные зависимости частот рассматриваемых поверхностных волн плазменного слоя от его полутолщины Δ_p , полученные численно из уравнений (6.1) при $\omega_p = 10^{10}$ рад/с для $k_z = 1$ см⁻¹.

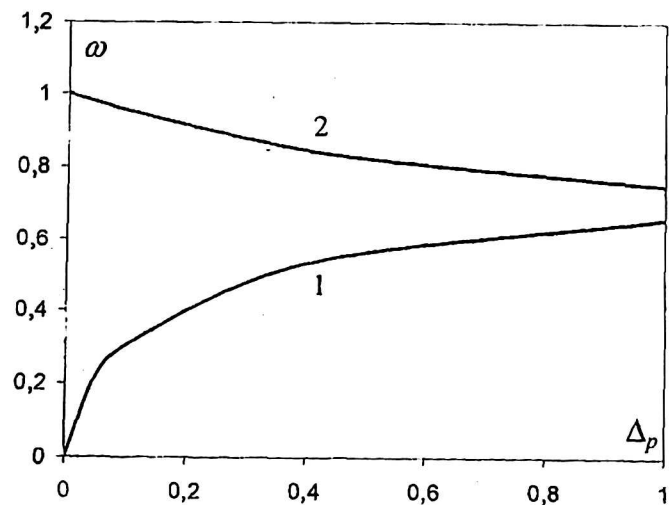


Рис. 16. Зависимость частот поверхностных волн плазменного слоя от его полутолщины Δ_p при фиксированных k_z и ω_p : 1 — низкочастотная волна; 2 — высокочастотная волна

Подставляя (6.7) в (6.5), получим соотношения, связывающие $E_z(x)$ и ее производные на противоположных границах плазменного слоя при возбуждении в нем низкочастотной плазменной волны

$$D_1 = 0; \quad D_2 \approx -2k_z. \quad (6.9)$$

Следовательно, в случае низкочастотной волны скачок производной компоненты $E_z(x)$ на плазменном слое не зависит от толщины слоя Δ_p (когда Δ_p становится достаточно малой величиной). Этот скачок определяется величиной полного возмущения объемного заряда слоя (возмущение объемного заряда слоя от его толщины зависит слабо). На рис. 17 представлены компоненты $E_z(x)$ и $E_x(x)$ в низкочастотной плазменной волне, рассчитанные по формулам (6.2) при $\omega_p = 10^{10}$ рад/с для $k_z = 1$ см $^{-1}$ для двух значений толщины Δ_p (частота ω при этих расчетах определялась из дисперсионного уравнения (6.1)). В соответствии с первой формулой (6.3) функция $E_x(x)$ характеризует поведение производной dE_z/dx , т. е. величину D_2 из (6.4). Из рис. 17 видно, что скачок функции $E_x(x)$ в плазменном слое при малой толщине Δ_p выходит в соответствии с (6.9) на некоторое постоянное значение, которое при дальнейшем уменьшении толщины уже практически не меняется. Это является следствием того, что возмущение объемного заряда в плазме превратилось в поверхностный заряд, т. е. в низкочастотной волне плазма проявляет себя как простой слой.

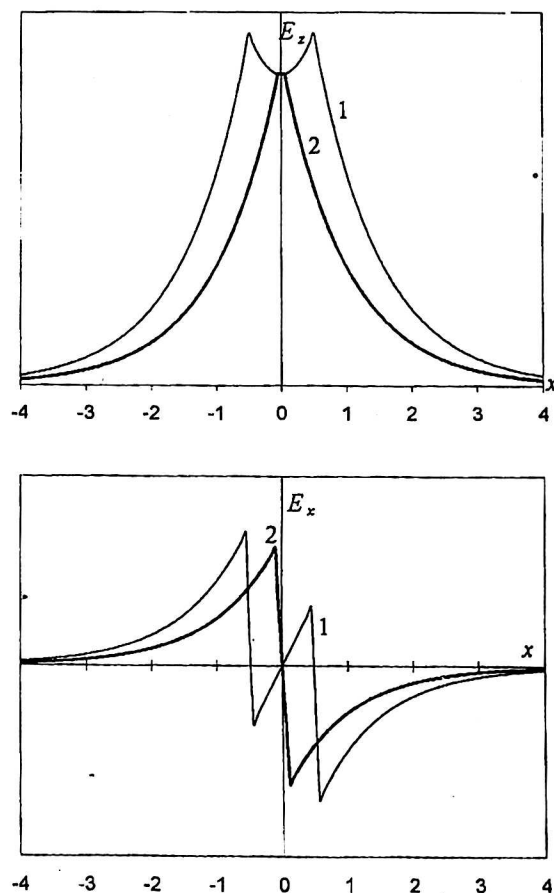


Рис. 17. Структура компонент поля низкочастотной волны:
1 — $\Delta_p = 0,5$ см; 2 — $\Delta_p = 0,05$ см

С иной ситуацией мы сталкиваемся при рассмотрении высокочастотной поверхностной волны. Подставляя (6.8) в (6.5), находим, что в высокочастотной волне при малой толщине Δ_p имеют место соотношения

$$D_1 \approx 2\Delta_p k_z; \quad D_2 = 0. \quad (6.10)$$

Следовательно, чем меньше толщина плазмы Δ_p , тем меньше в слое скачок компоненты поля $E_z(x)$.

На рис. 18 представлены компоненты $E_z(x)$ и $E_x(x)$ в высокочастотной плазменной волне, полученные по формулам (6.2) при $\omega_p = 10^{10}$ рад/с и $k_z = 1$ см $^{-1}$ для двух значений толщины Δ_p . Из рис. 18 также видно, что скачок функции $E_z(x)$ в плазменном слое тем меньше, чем меньше толщина Δ_p , что соответствует первой формуле (6.10). Это является следствием того, что в высокочастотной волне возмущения зарядов противоположного знака локализованы на противоположных поверхностях плазменного слоя, т. е. в высокочастотной волне плазма проявляет себя как двойной слой. Вне такого слоя поле при $\Delta_p \rightarrow 0$ исчезает, а внутри слоя имеется резкий всплеск компоненты $E_x(x)$, которая обеспечивает высокочастотные колебания на частоте ω_p при $\Delta_p \rightarrow 0$ (см. формулу (6.8)).

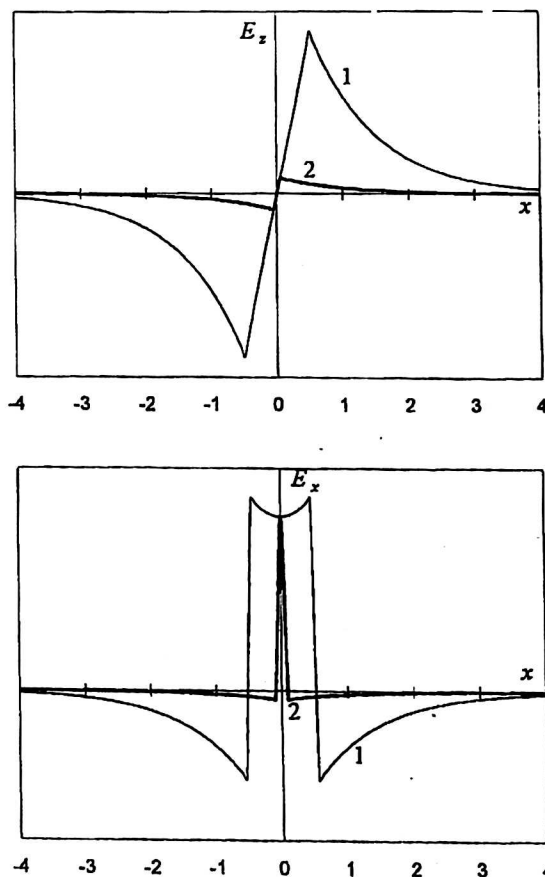


Рис. 18. Структура компонент поля высокочастотной волны:
1 — $\Delta_p = 0,5$ см; 2 — $\Delta_p = 0,05$ см

Рис. 19 поясняет физическую структуру рассмотренных поверхностных волн: *а* — высокочастотных волн; *б* — иллюстрирует движения плазмы в низкочастотной волне. Прямыми изображены границы неподвижной ионной составляющей плазменного слоя, а волнистыми линиями — деформированные границы слоя электронной компоненты. Знаками "+" и "-" помечены некомпенсированные электрические заряды, локализованные на границах слоя плазмы. В случае высокочастотной волны конфигурация смещений электронов плазмы имеет структуру типа "змейки", а расположение зарядов на границах плазменного слоя является противофазным, как у двойного слоя. Это согласуется и со структурой электрического поля высокочастотной волны (см. рис. 18). В случае же низкочастотной волны конфигурация смещений электронов имеет структуру типа "перетяжек", а расположение зарядов на границах плазменного слоя является синфазным, как у простого слоя. Это согласуется со структурой электрического поля низкочастотной волны (см. рис. 17).

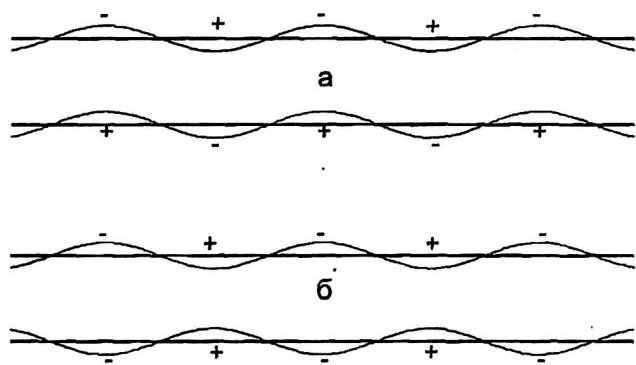


Рис. 19. К пояснению физического механизма поверхностных волн изотропной плазмы:
а — высокочастотная волна; *б* — низкочастотная волна

Заключение

Физический смысл и математическая структура рассмотренных в работе поверхностных волн обусловлены характером поляризации плазмы. В случае низкочастотной волны поляризация носит преимущественно продольный характер, и возмущения электрического заряда существенны во всем объеме трубчатой плазмы. При этом плазма эквивалентна простому слою толщиной Δ_p . Если проводить аналогию с математической теорией потенциала [14], то при описании низкочастотной поверхностной волны роль потенциала простого слоя играет составляющая электрического поля E_z . Как известно,

потенциал простого слоя непрерывен, а его нормальная производная в слое терпит разрыв, что и отражено в граничных условиях (2.13). В случае высокочастотной поверхностной волны поляризация оказывается преимущественно поперечной, и возмущения электрического заряда (противоположного знака) локализируются в основном у поверхностей трубчатой плазмы. При этом плазма эквивалентна двойному слою толщиной Δ_p . При описании высокочастотной поверхностной волны составляющая электрического поля E_z играет роль потенциала двойного слоя. Такой потенциал, как известно, терпит в слое разрыв, что и отражено вторым граничным условием (3.12). Если же суммарный электрический заряд двойного слоя равен нулю, то непрерывной будет нормальная к слою составляющая электрического поля, т. е. производная потенциала по нормали, что отражено в первом граничном условии (3.12). Именно специфические поляризационные движения трубчатой плазмы в рассмотренных поверхностных волнах и позволили развить метод эффективных граничных условий.

Таким образом, метод эффективных граничных условий позволяет аналитически описывать основные поверхностные волны тонкой трубчатой плазмы в волноводе в произвольном внешнем магнитном поле.

Одним из существенных (если не ключевых) результатов работы является математически и физически обоснованное утверждение о том, что низкочастотная основная поверхностная волна тонкой трубчатой плазмы в длинноволновой области фактически не зависит от величины внешнего магнитного поля. Это имеет большое значение для ряда прикладных исследований, в частности, в области плазменной релятивистской СВЧ-электроники.

Литература

1. Файнберг Я. Б., Горбатенко М. Ф. // ЖТФ. 1959. Т. 29. С. 549.
2. Аронов Б. А., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. // Там же. 1973. Т. 43. С. 2493.
3. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы. — М.: Атомиздат. 1976. — 242 с.
4. Кузелев М. В., Литеровская Е. В., Рухадзе А. А. // Физика плазмы. 1978. Т. 4. С. 433.
5. Кузелев М. В., Романов Р. В., Селиванов И. А. и др. Спектры собственных колебаний коаксиального плазменного волновода в конечном магнитном поле: Тр./ ИОФ РАН. — М.: Наука, 1994. Т. 45. С. 3.
6. Кузелев М. В., Романов Р. В., Рухадзе А. А. Электромагнитные волны в плазменных волноводах. Части I и II // Прикладная физика. 2001. № 2. С. 100—128; № 3. С. 103—129.
7. Энциклопедия низкотемпературной плазмы/ Под ред. В.Е. Фортова. Т. IV. Плазменные волноводы. — М.: Наука, МАИК "Наука/Интерпериодика". 2000. С. 4—17.

8. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Современное состояние теоретической релятивистской плазменной СВЧ-электроники // Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 3. С. 231–254.

9. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988. — 424 с.

10. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука. 1990. — 336 с.

11. Кузелев М. В., Мухаметзянов Ф. Х., Шкваруец А. Г. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 6. С. 1137.

12. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2002. — 544 с.

13. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. — М.: Мир, 1975. — 525 с.

14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.

Electromagnetic waves in plasma waveguides

Part III. Effective boundary conditions and theory of surface waves in waveguides with a thin annular plasma

M. V. Kuzelev, R. V. Romanov, A. A. Rukhadze

Institute of General Physics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Effective boundary conditions for the own slow surface electromagnetic waves of a thin annular magnetoactive plasma in a cylindrical metallic waveguide are obtained and substantiated. The obtained boundary conditions allow one to avoid the solution of wave equations in a plasma region when the own surface waves are described. Owing to this, the analytical investigation of the dispersion properties of plasma waveguides in an arbitrary magnetic field becomes possible. Some examples of using these boundary conditions for the investigation of surface waves with normal and anomalous dispersions are presented.

Вниманию читателей!

В части II данной статьи, опубликованной в журнале "Прикладная физика" — Вып. 3 за 2001 год, приводим следующие авторские поправки:

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
111	5-я снизу	$H_{0,1}$	$E_{0,1}$
114	1-я снизу	H-типа	E-типа
114	2-я снизу	$H_{0,1}$	$E_{0,1}$
113	На рис. 14 поменять местами изображения "б" и "в"		

* * *