Общая физика

УДК 530.145

Гидродинамическая формулировка уравнения Паули

М. А. Микаэлян
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

В рамках известной гидродинамической формулировки квантовой механики выведены уравнения эволюции плотности вероятности для частицы со спином 1/2. С помощью этих уравнений рассмотрен ряд методических вопросов.

О гидродинамической формулировке квантовой механики

Гидродинамическая формулировка квантовой механики была предложена Маделунгом [1] и с формальной точки зрения сводится к написанию системы уравнений, описывающей эволюцию плотности вероятности $\psi{*}\psi$ как течение сплошной среды. Указанные уравнения выводятся из уравнения для ψ-функции и по форме оказываются схожими с гидродинамическими.

Первоначально гидродинамическая формулировка рассматривалась как интерпретация квантовой механики (наряду с электродинамической интерпретацией Шредингера и вероятностной — Борна), и в настоящее время к ней все еще возвращаются в дискуссиях об основах квантовой механики [2]. Если же отвлечься от общефизического аспекта, то использование гидродинамических уравнений (которые сами по себе представляют лишь методический интерес) в ряде случаев облегчает рассмотрение и оказывается весьма эффективным [3—5].

В данной статье вначале приведены результаты, касающиеся частицы без спина [1], а далее выведены гидродинамические уравнения для частицы со спином 1/2*.

Гидродинамические уравнения для частицы с нулевым спином

Уравнение Шредингера для бесспиновой частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi\right]\psi\,, \qquad (1)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ — оператор обобщенного импульса. Выражения для плотности вероятности и плотности потока вероятности выглядят соответственно:

$$\rho = \psi{*}\psi;$$

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left[(\nabla\psi^*)\psi - \psi^*(\nabla\psi)\right] - \frac{e}{mc}\psi^*\psi\mathbf{A}. \qquad (2)$$

Рассматривая эволюцию ρ как течение сплошной среды, удобно ввести "скорость течения"

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{J}/\rho. \qquad (3)$$

Подставив (2) в (3) и представив волновую функцию в виде

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\Phi}, \qquad (4)$$

будем иметь

$$\mathbf{v} = (\hbar/m)\nabla\Phi - (e/mc)\mathbf{A}. \qquad (5)$$

Подставив (4) в (1) и отделив действительную и мнимую части, получим два уравнения, одно из которых есть уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \qquad (6)$$

где $\mathbf{v}$ дается в (5).

Второе уравнение определяет производную по времени фазы Φ; взяв градиент от его обеих частей и воспользовавшись (5), после тождественных преобразований будем иметь

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\rho}{m}\left\{e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\right\}_i \qquad (7)$$

$$(i,k = x,y,z),$$

где "тензор напряжений" T_{ik} равен

$$T_{ik} = \left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\right], \qquad (8)$$

*Когда статья была подготовлена к печати, автору стало известно, что такие уравнения уже выводились Такабаяси [6], однако существенно более сложным способом. Поэтому данную статью следует рассматривать как методическую.

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}. \tag{9}$$

Случаю собственно гидродинамики отвечало бы $T_{ik} = -p\delta_{ik}$ (p — давление), и (7) имело бы вид уравнения Эйлера.

Таким образом, гидродинамическую формулировку уравнения Шредингера составляет система уравнений (6) и (7), в которых $\mathbf{v}$ удовлетворяет условию rot $\mathbf{v} = -(e/mc)\mathbf{H}$ (получаемому взятием ротора от обеих частей (5) с учетом (9)); в тензорных обозначениях оно имеет вид

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{e}{mc}\varepsilon_{ijk}H_k\ , \tag{10}$$

где ε_{ijk} — абсолютно антисимметричный тензор.

В рамках гидродинамического подхода вместо эволюции ψ-функции рассматривается совместная эволюция $\rho(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Знание этих величин позволяет, в частности, находить квантовомеханические средние

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \int \mathbf{x}\rho dV, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \int \mathbf{v}\rho dV. \tag{11}$$

Второе из написанных равенств получается дифференцированием по времени первого ($\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{d}{dt}\langle \mathbf{x} \rangle$ — по определению [7]) с использованием уравнения непрерывности (6) и последующим интегрированием по частям.

Гидродинамические уравнения для частицы со спином 1/2

Прежде чем переходить к рассмотрению частицы со спином, отметим, что при гидродинамическом рассмотрении удобно для каждой физической величины (которой в общем случае отвечает некоторый линейный эрмитов оператор $\hat{L}$) формально определить ее гидродинамическое значение $L(\mathbf{x})$. Сделаем это так, чтобы "скорость течения" $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ подпадала под такое определение. Для этого заметим, что выражение (11) для $\mathbf{v}$ таково, как если бы частица в случае ее обнаружения в окрестности точки $\mathbf{x}$ (с вероятностью $\rho(\mathbf{x})dV$) имела при этом скорость $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Требуя выполнимость этого формального свойства, для произвольной физической величины имеем

$$\langle L \rangle = \int L\rho dV\ . \tag{12}$$

С другой стороны, квантовомеханическое среднее $\langle L \rangle$ равно $\int \psi^* \hat{L}\psi dV$, или, что то же самое,

$$\langle L \rangle = \int \mathrm{Re}(\psi^* \hat{L}\psi) dV\ . \tag{13}$$

Приравнивая подынтегральные выражения в (12) и (13), получаем общее определение гидродинамического значения $L(\mathbf{x})$

$$L \equiv \frac{1}{\rho}\mathrm{Re}(\psi^* \hat{L}\psi)\,. \tag{14}$$

В частности, для скорости, оператор которой равен $\hat{\mathbf{v}} = [\hat{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}]/m$, (14) принимает вид (3), где $\mathbf{J}$ дается в выражении (2).

Следует отметить, что гидродинамическое значение $L(\mathbf{x})$ принципиально наблюдаемо, как видно из определения (14), оно инвариантно относительно умножения волновой функции на фазовый множитель. В частном случае, когда ψ — собственная функция оператора $\hat{L}$, гидродинамическое значение совпадает с непосредственно наблюдаемым собственным значением.

Перейдем к рассмотрению частицы со спином 1/2, волновая функция которой есть спинор ψ — матрица-столбец с компонентами ψ_n, $n = 1, 2$; сопряженный спинор ψ^* — матрица-строка с компонентами ψ^*_n.

В этом случае кроме динамических переменных $\rho(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ появляется еще одна — гидродинамическое значение спина $\mathbf{s}(\mathbf{x})$, для определения которого подставим в (14) вместо $\hat{L}$ оператор спина $\hat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор, компоненты которого суть матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}^l$ ($l = x, y, z$). Ввиду эрмитовости последних вектор $\Omega \equiv \psi^*\sigma\psi$ чисто вещественный, и (14) принимает вид

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}/2, \tag{15}$$

где

$$\mathbf{n} \equiv \Omega/\rho; \quad \Omega_l \equiv \psi^*\sigma^l\psi \quad (l = x, y, z). \tag{16}$$

Используя известное тождество

$$\sigma^l_{mn}\sigma^l_{st} = 2\delta_{mt}\delta_{ns} - \delta_{mn}\delta_{st} \quad (m, n, s, t = 1, 2)\,, \tag{17}$$

имеем: $\Omega^2 = (\psi^*_m\sigma^l_{mn}\psi_n)(\psi^*_s\sigma^l_{st}\psi_t) = \rho^2$, откуда вытекает, что $\mathbf{n}$ — единичный вектор.

Таким образом, гидродинамическое значение спина $\mathbf{s}$ (15) есть вектор с фиксированным модулем $s(\mathbf{x}) \equiv 1/2$, направление которого $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ определяется (16). В частном случае, когда проекция спина на некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\mathbf{l}$, имеет определенное значение (т. е. ψ — собственная функция оператора $\hat{\mathbf{s}}\mathbf{I}$), имеем: $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{I}$ и, соответственно, $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{I}/2$.

Уравнение Паули имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \hat{\mu}\mathbf{H} + e\varphi\right]\psi, \qquad (18)$$

где оператор собственного магнитного момента равен $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (e\hbar/mc)\hat{\mathbf{s}}$. Подставив выражение (18) в (14) вместо $\hat{L}$, для гидродинамического значения $\mu(\mathbf{x})$ с учетом (15), будем иметь

$$\boldsymbol{\mu} = (e\hbar/mc)\mathbf{s} = (e\hbar/2mc)\mathbf{n}, \qquad (19)$$

где $\mathbf{n}$ дается в (16).

Как легко проверить, для уравнения Паули плотность потока вероятности $\mathbf{J}$ совпадает по форме с (2) (при этом ψ — спинор). Но следует оговориться, что величина $\mathbf{J}$ определена неоднозначно: в уравнение непрерывности она входит под знаком дивергенции, и в рассматриваемом случае* к ней может быть добавлено слагаемое $\propto \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Omega}$. Однако для $\mathbf{J}$ удобно использовать именно выражение (2) — в этом случае конечный вид искомых уравнений, в которые входит "скорость течения" $\mathbf{J}/\rho$, оказывается наиболее простым. Отметим, что только для указанного $\mathbf{J}$ "скорость течения" $\mathbf{J}/\rho$ совпадает с гидродинамической скоростью, определяемой однозначно (и независимо от $\mathbf{J}$) общей формулой (14) с $\hat{L} = \hat{\mathbf{v}}$.

Выведем гидродинамические уравнения для свободной частицы, $\varphi = 0$, $\mathbf{A} = 0$. В тензорных обозначениях уравнение (18) и сопряженное с ним выражение (2) выглядят, соответственно:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2}; \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_k^2}; \qquad (20)$$

$$\rho = \psi^*\psi; \quad J_i = \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial x_i}\psi - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right]. \qquad (21)$$

Дифференцируя J_i (21) по времени с учетом (20), будем иметь

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_i\partial x_k}\psi + \psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right]. \qquad (22)$$

С использованием тождества (17) квадратная скобка легко выражается через ρ, $\mathbf{J}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ (см. (21) и (16)), после чего (22) принимает вид

$$\frac{\partial J_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Omega_l}{\partial x_i}\frac{\partial\Omega_l}{\partial x_k}\right) - \frac{J_iJ_k}{\rho}\right].$$

Подставив сюда $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ и воспользовавшись (6), а затем проведя подстановку $\boldsymbol{\Omega} = 2\rho\mathbf{s}$ (см. (15), (16)), где $s(\mathbf{x}) \equiv 1/2$, получим (ср. (7), (8)):

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]_i = \frac{\partial\tilde{T}_{ik}}{\partial x_k}, \qquad (23)$$

где "тензор напряжений" $\tilde{T}_{ik}$ равен

$$\tilde{T}_{ik} = \left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_k} - 4\rho\frac{\partial s_l}{\partial x_i}\frac{\partial s_l}{\partial x_k}\right]. \qquad (24)$$

$\tilde{T}_{ik}$ в (24) отличается от T_{ik} в (8) наличием дополнительного слагаемого.

Дифференцируя Ω_i (16) по времени с учетом (20), будем иметь

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\sigma^i\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\sigma^i\psi\right)\right]. \qquad (25)$$

С использованием тождества*

$$\varepsilon_{imn}\sigma^m_{pq}\sigma^n_{st} = i\left(\delta_{sq}\sigma^i_{pt} - \delta_{pt}\sigma^i_{sq}\right) \qquad (26)$$

квадратная скобка в (25) легко выражается через $\boldsymbol{\Omega}$ в (16) и $\mathbf{v} = \mathbf{J}/\rho$, где ρ и $\mathbf{J}$ даются в (21), после чего (25) принимает вид

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\hbar}{2m\rho}\varepsilon_{imn}\Omega_m\frac{\partial\Omega_n}{\partial x_k} - \Omega_i v_k\right].$$

Подставив сюда $\boldsymbol{\Omega} = 2\rho\mathbf{s}$ (см. (15), (16)) и воспользовавшись (6), получим:

---

* Любопытно отметить, что чисто формально — посредством добавления в (2) слагаемого $\mathbf{J}_s = (\hbar/4m)\,\mathrm{rot}\,\Omega$ мы можем связать спиновый момент с пространственным движением, понимая под этим (по аналогии с орбитальным моментом) выполнимость соотношения $\langle\hbar\mathbf{s}\rangle = \int[\mathbf{r}\cdot m\mathbf{J}_s]dV$; последнее проверяется взятием интеграла по частям.

* Для доказательства тождества (26) подставим в его левую часть $\sigma^m_{pq} = -(i/2)\varepsilon_{mkl}\sigma^k_{pr}\sigma^l_{rq}$ (коммутационные соотношения для σ-матриц); далее учтем, что $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{mkl} = \delta_{il}\delta_{kn} - \delta_{ik}\delta_{ln}$, а затем воспользуемся (17).

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{s}\right]_i=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\hbar}{m}\rho\varepsilon_{imn}s_m\frac{\partial s_n}{\partial x_k}\right). \quad (27)$$

Проведя аналогичное рассмотрение в присутствии электромагнитного поля, вместо уравнений (23) и (27) будем иметь*:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]_i=\frac{\partial \widetilde{T}_{ik}}{\partial x_k}+\frac{\rho}{m}\times$$
$$\times\left\{e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]+(\mu\nabla)\mathbf{H}+[\mu\,\mathrm{rot}\mathbf{H}]\right\}_i; \quad (28)$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{s}\right]_i=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\hbar}{m}\rho\varepsilon_{imn}s_m\frac{\partial s_n}{\partial x_k}\right)+\frac{\rho}{\hbar}[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}]_i. \quad (29)$$

Как и в отсутствие спина, скорость $\mathbf{v}$ — величина непроизвольная (ср. (10)):

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{4\hbar}{m}\mathbf{s}\left[\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_j}\right]-\frac{e}{mc}\varepsilon_{ijk}H_k. \quad (30)$$

Это соотношение легко проверяется посредством подстановок $\mathbf{v}=\mathbf{J}/\rho$ и $\mathbf{s}=\boldsymbol{\Omega}/2\rho$, где ρ, $\mathbf{J}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ даются в (2) и в (16), а также использования выражения (9) и тождеств (17) и (26).

Таким образом, гидродинамическую формулировку уравнения Паули составляет система уравнений (6), (28) и (29), в которых $\boldsymbol{\mu}=(e\hbar/mc)\mathbf{s}$ (см. (19)), $s(\mathbf{x})\equiv 1/2$, а $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (30).

Использование гидродинамических уравнений квантовой механики при рассмотрении ряда методических вопросов

Гидродинамические уравнения особенно удобны для проведения перехода к классическому пределу – движению узких волновых пакетов по классическим траекториям. Проинтегрируем по всему пространству уравнения (28) и (29): первые слагаемые в их правых частях (как дивергенции тензоров) вклада в интегралы не дают; при интегрировании же их левых частей воспользуемся общей формулой

$$\frac{d\langle L\rangle}{dt}=\int\rho\left[\frac{\partial L}{\partial t}+\mathbf{v}(\nabla)L\right]dV,$$

получающейся в результате дифференцирования (12) с учетом (6). В итоге получим уравнения, которые после умножения на m и $\hbar$, соответственно, имеют вид

$$\frac{d\langle m\mathbf{v}\rangle}{dt}=\int\rho\left\{e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]+(\boldsymbol{\mu}\nabla)\mathbf{H}+[\boldsymbol{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{H}]\right\}dV; \quad (31)$$

$$\frac{d\langle\hbar\mathbf{s}\rangle}{dt}=\int\rho[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}]dV. \quad (32)$$

Пусть $\rho\neq 0$ в области пространства настолько малой, что внутри нее поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и их первые производные по координатам можно считать постоянными (это корректно, поскольку в нерелятивистской квантовой механике электромагнитное поле рассматривается лишь как внешнее [7]); тогда указанные величины могут быть вынесены из-под знака интеграла в уравнениях (31) и (32), которые после этого с учетом (12) принимают вид уравнений классической механики* (см. ту же сноску):

$$\frac{d\langle m\mathbf{v}\rangle}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\langle\mathbf{v}\rangle\mathbf{H}]+(\langle\boldsymbol{\mu}\rangle\nabla)\mathbf{H}+[\langle\boldsymbol{\mu}\rangle\mathrm{rot}\mathbf{H}],$$

$$\frac{d\langle\hbar\mathbf{s}\rangle}{dt}=[\langle\boldsymbol{\mu}\rangle\mathbf{H}].$$

В рамках гидродинамического подхода легко получить известное выражение для плотности электрического тока [7]

$$\mathbf{J}^e=\frac{ie\hbar}{2m}[(\nabla\psi^*)\psi-\psi^*(\nabla\psi]-$$
$$-\frac{e^2}{mc}\psi^*\psi\mathbf{A}+\frac{e\hbar}{2m}\mathrm{rot}(\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi) \quad (33)$$

посредством приведения правой части (31) к виду "интеграл от объемной плотности силы Лоренца":

$$\frac{d\langle m\mathbf{v}\rangle}{dt}=\int\left\{\rho^e\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{J}^e\mathbf{H}\right]\right\}dV. \quad (34)$$

Это достигается с помощью тождественного преобразования (в котором используются (19), (16) и уравнение $\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0$)

$$\rho\{(\boldsymbol{\mu}\nabla)\mathbf{H}+[\boldsymbol{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{H}]\}_i=\rho\mu_k\frac{\partial H_k}{\partial x_i}=\frac{e\hbar}{2mc}\Omega_k\frac{\partial H_k}{\partial x_i}=$$
$$=\frac{e\hbar}{2mc}[\mathrm{rot}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{H}]_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{e\hbar}{2mc}(\delta_{ik}\Omega_l H_l-\Omega_i H_k)\right],$$

с учетом которого (31) принимает вид (34), где

$$\rho^e=e\rho;\qquad \mathbf{J}^e=e\mathbf{J}+(e\hbar/2m)\mathrm{rot}\boldsymbol{\Omega}.$$

Последнее, с учетом (2) и (16), совпадает с (33).

* Присутствующая в (28) наряду с силой Лоренца комбинация $(\boldsymbol{\mu}\nabla)\mathbf{H}+[\boldsymbol{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]$ — есть общее выражение для силы, действующей на точечный магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ во внешнем поле $\mathbf{H}$. В частном случае, когда внешние токи $\mathbf{j}$ постоянны (при этом $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c$) и, кроме того, магнитный момент расположен вне области локализации токов (т. е. где $\mathbf{j}=0$), второе слагаемое обращается в нуль, и выражение для силы принимает "привычный" вид.

Заключение

Вывод гидродинамических уравнений можно рассматривать как "замену переменных" — переход от языка ψ-функции к языку наблюдаемых функций, определяемых формулой (14). Заметим, однако, что факт локальности получаемых при этом уравнений заранее не очевиден: несмотря на локальность "исходного" волнового уравнения, сама ψ-функция выражается через наблюдаемые нелокальным образом; так, для бесспиновой частицы в отсутствие поля на основании (4) и (5) имеем $\psi = \sqrt{\rho}\exp\left(\frac{im}{\hbar}\int \mathbf{v}d\mathbf{l}\right)$.

Литература

1. *Madelung E. Z.* Physic, 1926. V. 40. P. 322.
2. *Джеммер М.* Эволюция понятий квантовой механики. — М.: Наука, 1985.
3. *Bialynicki-Birula I., Bialynicka-Birula Z.*//Phys. Rev. D., 1971. V. 3. P. 2410.
4. *Киржниц Д. А.*//ЖЭТФ, 1990. Т. 98. С. 769.
5. *Кузелев М. В., Рухадзе А. А.*//УФН, 1999. Т. 169. № 6. С. 687.
6. *Takabayasi T.*//Progr. Theor. Phys., 1955. V. 14. P. 283.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.

Автор благодарит А. А. Рухадзе и участников руководимого им семинара за полезные обсуждения. Автор признателен Е. Л. Фейнбергу за проявленное внимание к работе и выражает благодарность С. М. Апенко, которым была найдена оригинальная статья Такабаяси [6], где впервые были выведены гидродинамические уравнения для частицы со спином.

Hydrodynamical formulation of Pauli equation

M. A. Mikaelyan
Institute of General Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

In the framework of well-known hydrodynamical formulation of quantum mechanics the evolution equations of probability density for the spinning particle are derived. With the help of these equations some methodological issues are considered.