

УДК 5.30.145

## Моделирование потенциалов рассеяния

В. Г. Ермилов

Институт общей физики РАН, Москва, Россия

*Отыскиваются потенциалы рассеяния через производную  $\psi''$  волновой функции  $\psi$  уравнений Шредингера на базе единого калибровочного потенциала вида  $V = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi''$  для разных случаев рассеяния.*

В квантовой теории рассеяния решается уравнение Шредингера

$$\psi'' + \frac{2}{r} \psi' + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi = 0, \quad (1)$$

где  $E$  — энергия рассеяния.

Выделим из уравнения (1) значение  $E - V(r)$  как определяющее взаимодействие при рассеянии в виде

$$E - V(r) = -K \frac{\hbar^2}{2m} \psi'',$$

т. е. как присущее динамике выражение через вторую производную, где  $K$  — некоторая константа. Отсюда имеем

$$V(r) = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + E,$$

где значение  $\psi''(r)$  определяет потенциал с точностью до аддитивной постоянной  $E$ . В таком случае

$$V(r) = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi''.$$

После подстановки значения  $E - V(r)$  в (1) получим

$$\psi'' = -\frac{2}{r} \frac{\psi'}{1 - K\psi} + \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{\psi}{1 - K\psi}. \quad (2)$$

При заданной величине  $E$  взаимодействие частиц происходит при некоторых значениях  $l$ , удовлетворяющих условию  $l < \frac{a}{\lambda}$ . В частности, для нуклон-нуклонного сильного взаимодействия  $a \sim 3\varphi$  — радиус действия ядерных сил, где  $\varphi$  — диаметр нуклона ( $\sim 10^{-13}$  см);  $\lambda = \frac{9 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{E}}$  — дебройлевская длина волны. Так, при  $E = 250$  МэВ  $\lambda = 0,57 \cdot 10^{-13}$  см, отсюда  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

Решение уравнения (2) как  $V = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = f(r)$  представлено на рис. 1 для  $l$ , равного от 0 до 5. Для больших значений  $r$  возможно решение в виде  $\psi'' \sim \frac{1}{r^2}$ , когда при  $r \rightarrow \infty$   $\psi = r$ ,  $\psi' \rightarrow \text{const}$ , например  $\psi' = 1$ . При этом  $K = 1$ . Берем  $l = 5$ . Получим графическую зависимость  $\psi''(r)$  для  $l = 5$ , принимая исходные данные:  $r = 10\ 000$ ,  $\psi = 10\ 000$ ,  $\psi' = 1$ . При этом  $\psi''_{\min}$  соответствует  $r = 124$  (в единицах  $\varphi$ ).

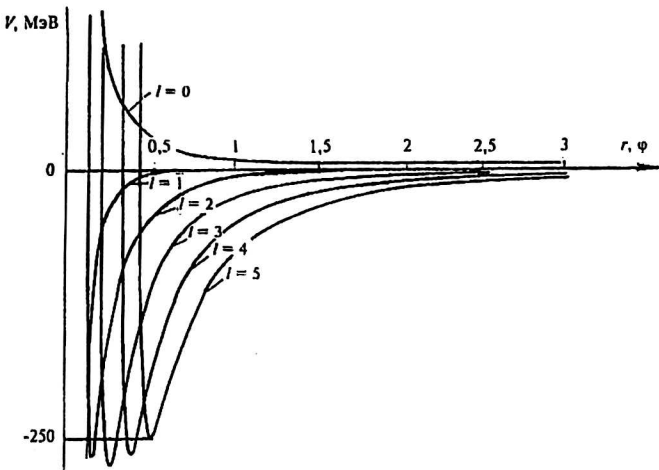


Рис. 1. Потенциалы рассеяния при различных значениях  $l$  для сильного взаимодействия

Зависимость  $\psi''(r)$  имеет ту же характерную особенность, что и потенциал сильного взаимодействия — крутой подъем при некотором  $r$ . Значение  $\psi''_{\min}$  занимает по  $r$  около  $\frac{1}{6}$  интервала до  $\psi'' = 0$ , в связи с чем, считая, что  $a = 3\varphi$ ,  $r = 124$  можно представить как  $r = 0,5\varphi$ , если брать  $r$  в масштабе  $\mu = \frac{124}{0,5} = 248$ . Поскольку

$\psi'' = \frac{d^2\psi}{dr^2}$ , а изменение  $r$  как  $\frac{r}{\mu}$  относится также к  $dr^2$ , то  $\frac{1}{dr^2}$  переходит в  $\frac{\mu^2}{dr^2}$ , т. е.  $\psi''$  увеличивается в  $\mu^2$  при переходе к  $r = 0,5$ . Если взять в уравнении (2) значение  $K$ , отличающееся от  $K = 1$ , то будем иметь  $\psi''_{r=0,5} = \frac{\mu^2}{K} \psi''_{r=124} = -250 \frac{\hbar^2}{2m} = -6$ . Отсюда определяется  $K = 13,7$ .

В результате имеем следующие преобразования к новым значениям по всем  $r$ ,  $\psi''$ ,  $\psi'$ ,  $\psi$ :

$$\mu = \frac{r = 124}{r = 0,5}, \quad \psi''_{r=0,5} = \frac{\mu^2}{K} \psi''_{r=124},$$

$$\psi'_{r=0,5} = \frac{\mu}{K} \psi'_{r=124}, \quad \psi_{r=0,5} = \frac{1}{K} \psi_{r=124}. \quad (3)$$

Аналогично получим зависимость  $\psi''(r)$  с вышесприведенными масштабными преобразованиями и для других значений  $l$ . Для потенциала имеем

$$V_{r_2} = \frac{\hbar^2}{2m} \psi''_{r_2} \frac{\mu^2}{K}.$$

В частности, при  $K = 13,7$ , согласно рис. 1, получается  $V_{\min} = -250$  МэВ для  $l = 5$ .

Потенциалы на рис. 1 могут быть сведены к некоторому одному базовому калибровочному потенциалу. Это можно сделать, используя масштабные коэффициенты  $K$  и  $\mu$ .

Как показано выше в (3), при переходе от  $r_1 = 124$  к  $r_2 = 0,5$  имеем:

$$\psi''(r_2) = \frac{\mu^2}{K} \psi''(r_1),$$

т. е.

$$V(r_2) = \frac{\mu^2}{K} V(r_1), \quad (4)$$

$$\mu = \frac{r_1}{r_2}. \quad (5)$$

Возьмем потенциал с  $l = 5$  на рис. 1 как базовый калибровочный. Будем совмещать с ним другие потенциалы на рис. 1, начиная с  $l = 4$ .

Можно начать с того, чтобы совместить координаты  $r$  минимума потенциалов, т. е.  $r_2 = 0,5$  (от  $l = 5$ ), с  $r_1 = 0,375$  (от  $l = 4$ ) и, согласно (5), будем иметь

$$\mu = \frac{r_1}{r_2} = \frac{0,375}{0,5} = 0,75. \quad (6)$$

Для потенциала с  $l = 5$   $V(r_2) = -250$  МэВ и  $\min$  с  $l = 4$   $V(r_1) = -269,67$ . Тогда, согласно (4),

$$250 = \frac{0,75^2}{K} \cdot 269,67, \quad (7)$$

отсюда  $K = 0,6067$ .

Согласно (4) потенциал при  $r_2 = \frac{r_1}{0,75}$  с учетом (6) или (7) будет равен

$$V(r_2) = \frac{0,75^2}{0,6067} V(r_1) = \frac{250}{269,67} V(r_1) = 0,927 V(r_1). \quad (8)$$

Соответственно, значениям  $r_1$  для потенциала с  $l = 4$ , т. е. имея  $V(r_1)$ , находим потенциал  $V(r_2)$ , который получится после совмещения  $V(r_1)$  с базовым потенциалом  $V(r)$ , для которого  $l = 5$ .

Имеем  $r_1$  и  $V(r_1)$  (от  $l = 4$ ):

$$r_1 = 0,375; 0,8; 1,1; 2,01; \\ V(r_1) = -269,67; -80,15; -41,7; -13,3. \quad (9)$$

Получим  $r_2$  и  $V(r_2)$  для  $l = 4$  после преобразования (5) и (8)

$$r_2 = 0,5; 1,07; 1,5; 2,69; \\ V(r_2) = -250; -74,3; -38,7; -12,33. \quad (10)$$

Сравнение  $V(r_2)$  с базовым потенциалом  $V(r)$  для  $l = 5$  дает

$$r = 0,5; 1,07; 1,5; 2,69; \\ V(r) = -250; -78,25; -35,97; -11,38, \quad (11)$$

т. е.  $V(r_2)$  и  $V(r)$  при одинаковых значениях  $r_2$  и  $r$  хорошо совмещаются, что стало возможным после того, как ввели для  $r_1$  масштаб  $\mu$  и, согласно (4), коэффициент  $K$ , который войдет в уравнение (2), а исходные данные для решения такого уравнения относительно  $\psi''(r_2)$  определяются из соотношений

$$\psi(r_2) = \frac{1}{K} \psi(r_1); \\ \psi'(r_2) = \frac{\mu}{K} \psi'(r_1); \\ r_2 = \frac{r_1}{\mu},$$

где  $K = 0,6067$ ,  $\mu = 0,75$ .

В этом случае получим решение

$$\psi''(r_2) = \frac{0,75^2}{0,6067} \psi''(r_1),$$

как это сразу было сделано согласно (8).

Совместим с базовым потенциалом также потенциалы с  $l = 3, 2, 1, 0$  подобно (9)–(11). При этом для  $l = 0$  коэффициент  $K$  берется со знаком (-). Тогда потенциал с  $l = 0$  располагается внизу на рис. 2.

После такого преобразования все потенциалы, как показано на рис. 2, будут размещаться в узкой области между  $l = 1$  и  $l = 2$  и в связи с плотным расположением могут быть сведены к одному из них, в данном случае к базовому потенциалу с  $l = 5$  от  $r = 0,5$  до  $r = 3$ .

Полагая, что используемые в экспериментах по рассеянию варианты потенциалов также соответствуют

$V = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi''$ , перейдем, насколько

это возможно, к таким потенциалам от калибровочного базового потенциала, задавая их значения с помощью масштабных коэффициентов  $K$  и

$\mu$ . Такое сравнение потенциалов  $V = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi''$  (обозначим — —x—x—) с феноменологическим (обозначим — —) дается на рис. 3, и, например, для феноменологического потенциала на рис. 3, а приближение к нему получим, если

взять  $K = \frac{250}{145}$  и  $\mu = \frac{0,5}{0,64}$ , где для  $K$  и  $\mu$  в числителе берутся  $V_{\min}$  и  $r$  базового потенциала, а в знаменателе —  $V_{\min}$  и  $r$  феноменологического.

Исходными данными для определения  $\psi''(r)$  из уравнения (2) будут:

$$\psi_{r=0,64} = \frac{\psi_{r=0,5}}{K\mu^2},$$

$$\psi'_{r=0,64} = \frac{\psi'_{r=0,5}}{K\mu},$$

$$r = \frac{0,5}{\mu},$$

где, согласно (3)

$$\psi_{r=0,5} = \frac{\psi_{r=124}}{13,7},$$

$$\psi'_{r=0,5} = \frac{\psi'_{r=124}}{13,7}.$$

Г. М. В.

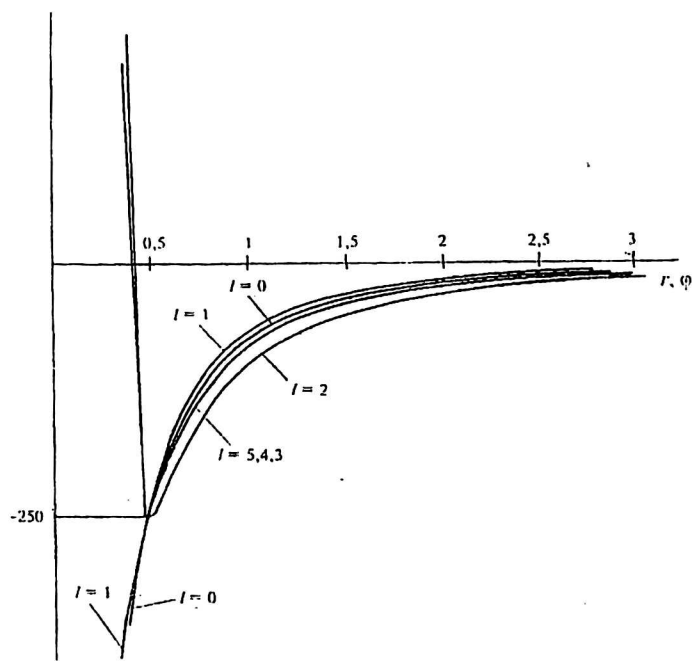


Рис. 2. Преобразование к базовому потенциалу

Тот же потенциал на рис. 3, а можно построить, если все значения  $r$  базового потенциала сдвинуть в отношении  $\frac{r}{\mu} = \frac{0,64}{0,5} r = 1,28r$ , а все значения  $V(r)$  базового потенциала разделить на  $K = \frac{250}{145}$ .

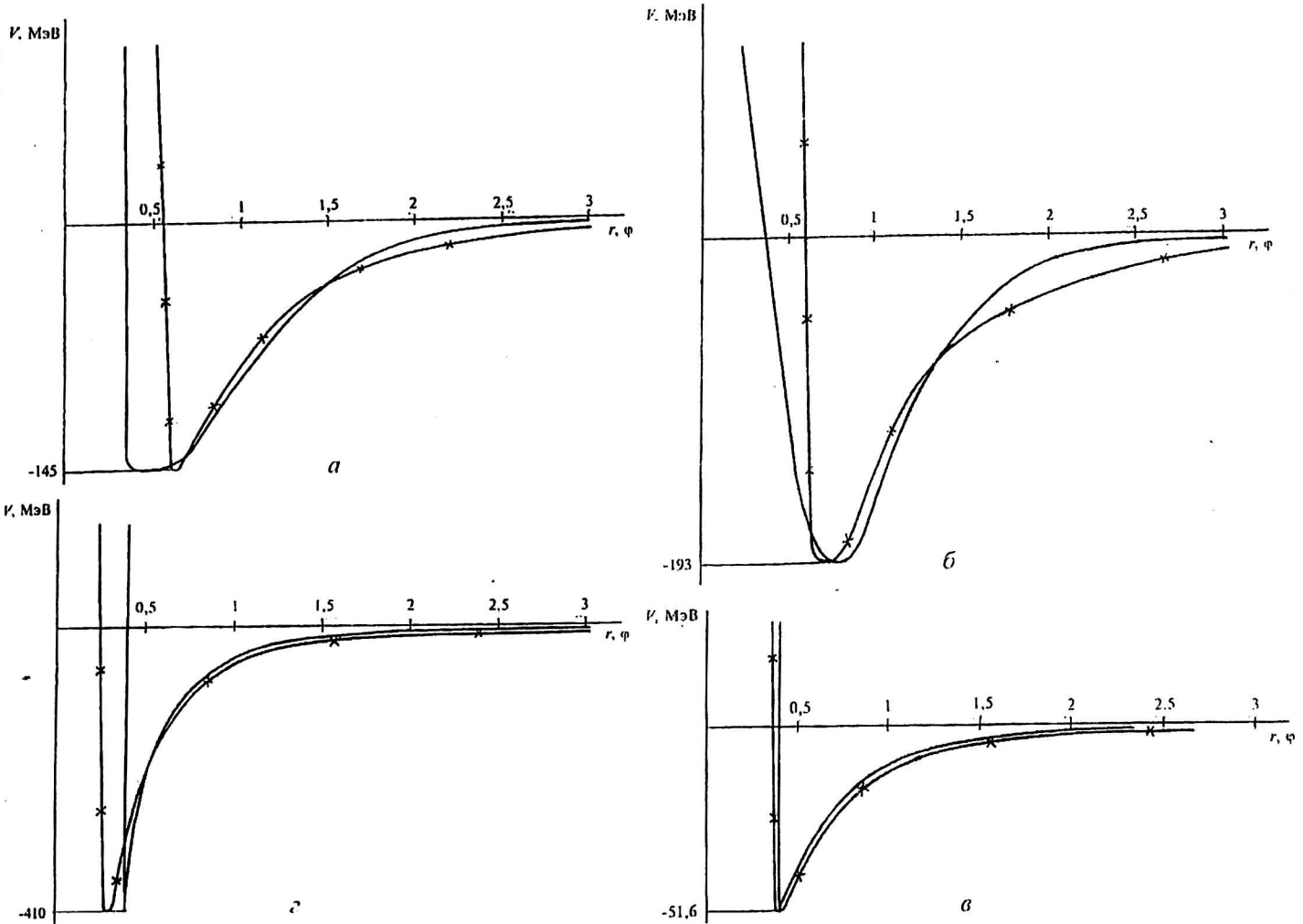


Рис. 3. Феноменологические потенциалы в сравнении с  $V \sim \psi''$ ; а — (-145); б — (-193); в — (-51,6); г — (-41,0)

Аналогично определится  $V$  для других потенциалов (см. рис. 3, обоз. —x—x—). На участках притяжения от  $r = 0,5\varphi$  до  $r = 3\varphi$  получается хорошее совпадение с феноменологическими потенциалами.

Выбор базового калибровочного потенциала может быть любой от  $l = 0$  до  $l = 5$ , поскольку для каждого потенциала имеем собственное пространство по  $r$ , в котором все потенциалы, но каждый со своей мерой  $r$ , определяемой масштабным коэффициентом  $\mu$ , выглядят одинаково.

Такая модель включает в себя различные виды взаимодействий: силы Гейзенберга, Майорана, спин-орбитальные, тензорные в их различных количественных сочетаниях. Соответствующие таким взаимодействиям потенциалы, представленные на рис. 3, а—в, проявляются в процессе линейного преобразования с использованием уравнения (2). При этом накладывается условие однозначности решения  $\psi''(r) \rightarrow 0$  для заданных больших значений  $\psi = r$ , т. е.  $\psi = r \rightarrow \infty$ ,  $\psi' = 1$ . Дальнейшее преобразование

$\psi''(r)$  связано с тем, что потенциал распространяется на участке  $r < 3\varphi$  и здесь должен быть определенно размещен по координатам  $r$  и  $V$ . Это возможно, если элементарное перемещение дробится, т. е. берется в некотором масштабе  $\mu$  и становится равным  $\frac{dr}{\mu}$ . Тогда получим  $\frac{r}{\mu} = 3\varphi$

до  $\psi'' \sim 0$ , причем  $\psi''$  по всем  $r$  увеличивается в  $\mu^2$ , так как  $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dr^2}$  переходит в  $\mu^2\psi''$ . Получим

потенциал  $V = \frac{\hbar^2}{2m} \psi'' \mu^2$ , который может быть представлен до нужных значений  $V(r)$ , если ввести коэффициент  $K$ . Тогда  $V = \frac{\hbar^2}{2m} \psi'' \frac{\mu^2}{K}$  соответственно уравнению (2) с параметрами

$$r = \frac{r}{\mu}, \quad \frac{1}{K} \psi'', \quad \frac{1}{K} \psi', \quad \frac{1}{K} \psi.$$

Если ввести это в уравнение (2), то будем иметь

$$\frac{1}{K} \psi'' = -\frac{2}{r} \frac{\frac{1}{K} \psi'}{1 - K \frac{1}{K} \psi} + \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{\frac{1}{K} \psi}{1 - K \frac{1}{K} \psi},$$

что тождественно уравнению (2), когда  $K = 1$ , а параметры уравнения

$$r = \frac{r}{\mu}, \quad \psi'', \quad \psi', \quad \psi,$$

т. е., как и для линейного уравнения,  $\psi''(r)$  и  $\frac{1}{K} \psi''(r)$  будут решениями уравнения (2).

За счет  $\mu$  можно получить также определенное размещение потенциала по  $r$ .

Полюса  $1 - K\psi = 0$  соответствуют крутому выходу потенциала (см. рис. 3, обоз. —х—х—) от значения  $V_{\min}$  в  $+\infty$ .

Для больших значений  $r$  возможно решение (2) в виде  $\psi'' \propto \frac{1}{r^2}$ . Преобразование с использованием масштаба  $\mu$  переводит это решение к кулоновскому потенциалу, если  $r$  преобразуется согласно  $dR = \frac{dr}{\mu} = \frac{dr}{\sqrt{r}}$ , т. е.  $\mu = \sqrt{r}$ , а новое значение  $R$  будет равно

$$R = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{r}} = 2\sqrt{r}.$$

Отсюда получим

$$r = \frac{R^2}{4};$$

$$dr = \frac{RdR}{2};$$

$$\psi'(r) = \frac{d\psi}{dr} = \frac{2}{R} \frac{d\psi}{dR};$$

$$\psi''(r) = \frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{4}{R^2} \frac{d^2\psi}{dR^2}.$$

После подстановки этих значений в (2) получим

$$\psi''(R) = -\frac{4}{R} \frac{\psi'(R)}{1 - K\psi} + \frac{4l(l+1)}{R^2} \frac{\psi}{1 - K\psi}.$$

После подстановки  $\psi'(R) = \frac{R}{2} \psi'(r)$ ,  $R = 2\sqrt{r}$

имеем

$$\psi''(r) = -2 \frac{\psi'(r)}{1 - K\psi} + \frac{l(l+1)}{r} \frac{\psi}{1 - K\psi}.$$

Отсюда для больших  $r$ , когда  $\psi'(r) \gg \psi''(r)$  и  $K = 1$ , получим

$$\psi''(r) \sim \frac{1}{r}.$$

Используя уже постоянный масштаб  $\mu$ , можно перевести значение  $r$  в сторону  $r \rightarrow 0$ , т. е.

$\psi''(r) \sim \frac{1}{r}$  умножить на  $\mu^2$ .

Принятый согласно модели  $V \sim \psi''$  базовый потенциал содержит различные виды взаимодействий: притяжение, сильное отталкивание на малых расстояниях, обменное взаимодействие, тензорное и спин-орбитальное взаимодействия и, таким образом, удовлетворяет требованиям искомого потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия. Модель  $V \sim \psi''$  может быть принята также для кулоновского потенциала.

Используемые для сравнения с моделью феноменологические потенциалы на рис. 3, а—в взяты из работ [1—3], на рис. 3, г — сравнение с потенциалом типа Юкавы.

Автор приносит благодарность  
проф. А. А. Рухадзе за большую помощь  
при постановке задач и проработке  
материала для публикации.

#### Литература

1. Горбатов А. М., Крылов Ю. Н., Рудняк Б. В. Определенные  $NN$ -потенциала по фазам рассеяния и энергии связи дейтона//Изв. АН. 1983. Т. 47. № 1.
2. Петров Н. М., Тартаковская Е. В. Восстановление нуклон-нуклонного потенциала по экспериментальным фазам рассеяния//Там же. 1984. Т. 48. № 10.
3. Джавадова А. В., Тверецкий А. П., Ахмед Эль-Мелеги. Исследование ядерной материи с учетом структуры нуклона//Там же.

## Modelling the dispersion potentials

V. G. Ermilov

General Physics Institute, Moscow, Russia

*The dispersion potentials through the double differentiation  $\psi''$  of the wavy function  $\psi$  from Shredinger's equation are looked on the base of the unique potential  $V = K \frac{\hbar^2}{2m} \psi''$  for the different chances of the dispersal.*