

УДК 669.71:519.6

Динамическая модель магнитно-гидродинамических процессов в алюминиевом электролизере

А. В. Алаторцев, Р. Н. Кузьмин, Н. П. Савенкова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

О. Г. Проворова

Красноярский государственный университет, г. Красноярск, Россия

Предложена новая нестационарная математическая модель для описания физических полей и поверхности раздела в алюминиевом электролизере, которая не разделяет описание основного и возмущенного движений, а дает представление о состоянии поверхности раздела, скоростей движения в динамике. Представлен метод расчета системы уравнений магнитной гидродинамики, приводящий к реальному описанию процесса в промышленном электролизере.

Промышленный алюминий производится путем электролиза в криолитоглиноземных расплавах в электролизной ванне.

Электролизер футерован углеродистыми материалами, на дне (угольный катод—подина) находится слой расплавленного алюминия, выше —

слой электролита — криолитоглиноземного расплава ($\text{Na}_3\text{AlF}_6 + \text{Al}_2\text{O}_3$). Сверху в ванну опущены угольные аноды, частично погруженные в электролит. Катодом служит расплавленный алюминий. Температура процесса составляет $950\text{--}970^\circ\text{C}$. Процесс состоит в электролитическом разложении глинозема (Al_2O_3), растворенного в электролите. На жидком алюминиевом катоде выделяется алюминий, на аноде происходит окисление выделяющимся кислородом углерода CO_2 и CO . Вдоль бортов электролизера находится застывший слой электролита — настыль. Она служит защитой от коррозии угольной футеровке ванны электролитом.

При типичной промышленной установке электролизеры расположены в два ряда продольно — торец к торцу, в каждом электролизере ток распределяется посредством системы шин. На рис. 1 схематично представлен электролизер с погруженными обожженными угольными анодами.

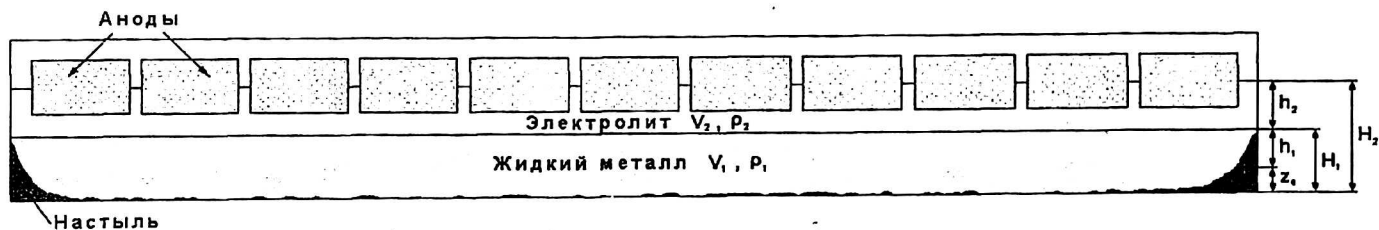


Рис. 1. Продольное сечение электролизной ванны

Ток от стояка идет на анодную шину, где распределяется на каждый анод, а далее течет в слой электролита, затем через жидкий алюминий, угольную подину и отводится за пределы ванны по стальным коллекторным шинам-блосам, расположенным в угольном катоде. Все блосы соединяются катодной шиной со стояком следующего электролизера.

Ток, проходящий через ошиновку и электролизер, формирует магнитное поле, Джоулева теплота выделяется в слое электролита; слой застывшего электролита у борта электролизера образует настыль, что обуславливает перераспределение электрического тока и, соответственно, электромагнитных сил в расплаве; в свою очередь, циркуляция электролита и металла в значительной степени определяет форму рабочего пространства (ФРП). ФРП — это индикатор энергетического баланса и гидродинамики электролизера.

Подробное описание работы электролизера и обзор различных подходов к моделированию стационарных явлений в алюминиевом электролизере содержатся в работе [1].

Основным показателем работы электролизера является выход по току — отношение между практическим и теоретическим производством алюминия. Считается, что первопричина снижения выхода по току — это окисление растворенного алюминия анодным газом (CO_2). Сущест-

вуют различные теоретические и эмпирические уравнения, связывающие выход по току с магнитогидродинамическими явлениями (МГД-явлениями) в электролизере [2, 3]. Для уменьшения энергетических потерь нужно слой электролита по возможности уменьшать, но при этом на поверхности раздела металл—электролит могут возникнуть колебания. При некоторых условиях наблюдается рост амплитуд этих волн, который называется неустойчивостью или магнитогидродинамической (МГД) нестабильностью. Даже простое незатухающее колебание поверхности раздела должно быть устранено, так как при нем возрастает массоперенос растворенного алюминия от катода в межполюсное расстояние (МПР), где он снова окисляется. МГД-неустойчивость является основным препятствием увеличения выхода по току.

Таким образом, при изучении МГД-явлений можно выделить две задачи:

- получение основных полей в стационарном состоянии (магнитного, электрического, формы стационарной поверхности раздела, линий течения в металле и электролите, скоростей движения обеих жидкостей, формы рабочего пространства и т. д.);

- получение динамики поверхности раздела.

Приведем краткий обзор основных результатов, относящихся ко второй задаче. Существование различных подходов, дающих объяснения возникновению волн на поверхности металла, а значит, приводящих к разным критериям устойчивости, свидетельствует о значимости этого явления для эксплуатационных качеств электролизера. Первая двумерная модель в приближении “мелкой воды” была предложена в работах [4, 5], в данной модели используется нелинейное волновое уравнение для описания поверхности невязкой жидкости. Нелинейность обусловлена электромагнитной силой. К сожалению, в [4, 5] не приводится вывода этого уравнения. В работе [6] для анализа волн в металле предложен “метод быстрых анодных погружений”.

Аналитический критерий устойчивости впервые предложен в [7]. В качестве основного механизма неустойчивости в этой работе выбрано взаимодействие между горизонтальными электрическими токами и вертикальной компонентой вектора магнитной индукции. Введено поня-

тие эффективного межполюсного расстояния

$$D_s = h_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} h_1; D_s \text{ отражает зависимость возму-}$$

щенных распределений тока от анодных сопротивлений. Критерий Селе является необходимым условием и отражает тот факт, что если электролизер работает устойчиво, то выполняется условие:

$$(h_2 + \frac{\sigma_2 h_1}{\sigma_1}) H_m > \frac{J_z B_z}{g(\rho_1 - \rho_2)} A,$$

где J_z, B_z — невозмущенные компоненты плотности тока и магнитного поля, соответственно.

В работе [8] рассматривается электролизер бесконечных размеров. За основу положены полные уравнения Навье-Стокса. Используется классическая техника линейной теории гидродинамической устойчивости, за исключением того, что для моделирования течений на середине каждого слоя предполагается линейный закон трения в приэлектродной области [8]. Авторы отмечают, что электромагнитная неустойчивость может развиваться, если плотность тока в жидком алюминии достаточно велика. Она может породить крупномасштабные волны (1,5—2 м), распространяющиеся в направлении горизонтального тока. Возрастание уровня турбулентности (или возрастание коэффициента трения) может стабилизировать возмущения. Это предполагает существование некоторого механизма насыщения и требует развития нелинейных моделей, способных различать условия насыщения от условий развития хаоса. В работе [9] получен результат, который противоречит результатам работ [7] и [8], а именно, рассматривается электролизер со сплошным анодом, система запитана вертикальным электрическим проводником, расположенным выше анодного блока. Какова бы ни была длина проводника, система (в рамках используемой модели) неустойчива. Если добавить однородное поле в z -направлении, то система становится устойчивой в случае, когда B_z -компонента магнитного поля превышает некоторое критическое значение 10^{-3} Тл. Авторы объясняют это различие тем, что они учли индуцированный электрический ток, в то время как в статьях, опубликованных ранее, индуцированным током пренебрегают. Уравнения выводятся при следующих предположениях:

- движения несжимаемых жидкостей подчиняются уравнениям Навье-Стокса;
- электромагнитное поле подчиняется квазистационарным уравнениям Максвелла;
- электрические токи вне электролизера, в анодных и катодных блоках известны и не зависят от времени;
- флуктуации вокруг стационарного движения настолько маленькие, что уравнения можно линеаризовать в окрестности стационарного решения;
- изменения электромагнитного поля настолько маленькие, что ротор электрического поля равен нулю;

• в линеаризованной системе для флуктуаций можно пренебречь вязкими членами.

При расчетах дополнительно предполагалось:

- стационарное поле скоростей — нулевое;
- стационарная поверхность — плоская;
- аноды и катод представляют собой два слоя.

В работах [10] и [11] рассматриваются “стоячие волны”. В [11] выводится волновое уравнение методом разложения по малому параметру, в качестве которого взяты отношение глубины слоев к горизонтальным размерам ванны, отношение амплитуды волны к глубине, отношение проводимости электролита к проводимости металла. Получены уравнения, аналогичные уравнениям в работах [4, 5], усиленные наличием анодного слоя. Модифицирован критерий Селе. В работе [12] демонстрируются области справедливости подходов на основе теории “мелкой воды”, хорошо описываются неустойчивости, порожденные вертикальным магнитным полем. Авторы строят трехмерное интегродифференциальное уравнение для описания колебаний в металле, осредняя его по глубине слоя, получают новое двумерное волновое уравнение. Тщательно моделируются аноды, приведена трактовка граничных условий. Из-за этого коэффициент в волновом уравнении отличается от приведенного в [11]. Новое волновое уравнение было выведено из теории “мелкой воды” в работе [13] и в других работах этих же авторов. В этом уравнении сила Лоренца выражена непосредственно в терминах движения жидкости. Приводится общий энергетический критерий для того, чтобы установить, какие движения могут быть неустойчивыми. Это могут быть как бегущие, так и стоячие волны. Приводится достаточное условие стабильности, которое не требует решения основных уравнений.

В настоящей работе авторы предлагают новую нестационарную математическую модель для описания физических полей и поверхности раздела в алюминиевом электролизере, которая не разделяет описание основного и возмущенного движений, а дает состояние поверхности раздела, скоростей движения в динамике.

В качестве исходных уравнений, моделирующих процессы в электролизной ванне, рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики в переменных Эйлера, записанная в средах жидкого металла и электролита [14].

Уравнения для среды жидкого металла:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 V_1^p) = Q;$$

$$\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 u_1 V_1^p) = -\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \text{div}(\mu_{1T} \text{grad} u_1) + f_{1x};$$

$$\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 v_1 V_1^p) = -\frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \text{div}(\mu_{1T} \text{grad} v_1) + f_{1y};$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\rho_1 g + f_{1z};$$

$$\frac{\partial \rho_1 \varepsilon_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \varepsilon_1 V_1^p) = -\rho_1 \operatorname{div}(V_1^{\text{от}}) + \operatorname{div}(k_1 \operatorname{grad} T_1) + \operatorname{div}(k_{1T} \operatorname{grad} \varepsilon_1) + f_{T_1}.$$

Уравнения для среды электролита:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 V_2^p) = -Q;$$

$$\frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 u_2 V_2^p) = -\frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu_{2T} \operatorname{grad} u_2) + f_{2x};$$

$$\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 v_2 V_2^p) = -\frac{\partial \rho_2}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu_{2T} \operatorname{grad} v_2) + f_{2y};$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = -\rho_2 g + f_{2z};$$

$$\frac{\partial \rho_2 \varepsilon_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \varepsilon_2 V_2^p) = -\rho_2 \operatorname{div}(V_2^{\text{от}}) + \operatorname{div}(k_2 \operatorname{grad} T_2) + \operatorname{div}(k_{2T} \operatorname{grad} \varepsilon_2) + f_{T_2}.$$

Уравнение электромагнитной индукции:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V} \times \mathbf{H}] = \operatorname{crot}(\mathbf{E}), \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{cases}$$

Предполагается, что электрическое и магнитное поля мало меняются по вертикальной компоненте, так как вертикальные размеры ванны значительно меньше ее горизонтальных размеров. На основании этих предположений производится осреднение системы по вертикальной компоненте аналогично тому, как это сделано в работе [15]. Обозначения в уравнениях общепринятые, в среде жидкого металла имеют индекс "1", в среде электролита — "2". В результате получается система, записанная в двух средах.

Слой жидкого металла:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial y} = \bar{\rho}_1 Q;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) \cdot (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + F_{D\bar{u}_1} + F_{xH_1} + F_{xz_0} + \bar{f}_{1x} h_1;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) \cdot (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + F_{D\bar{v}_1} + F_{yH_1} + F_{yz_0} + \bar{f}_{1y} h_1;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H_1}{\rho_1} \right) + (\mathbf{V}_1, \nabla) \left(\frac{H_1}{\rho_1} \right) = \left(\frac{H_1}{\rho_1}, \nabla \right) \mathbf{V}_1 - \frac{c}{\rho_1} \operatorname{rot}(\mathbf{v}_{m_1} \mathbf{j}_1) \alpha_1;$$

$$\alpha_1 = \frac{h_{21,\min} + \delta}{h_{21,\min}};$$

$$h_{21,\min} = \min_{x,y} (H_2 - h_1 - z_0) - h_{mpr,\min};$$

диффузионные члены определяются формулами:

$$F_{D\bar{u}_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right);$$

$$F_{D\bar{v}_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right);$$

$$F_{D\bar{T}_1} = \frac{\partial}{\partial x} \left((k_{1T} + k_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((k_{1T} + k_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial y} \right);$$

компоненты силы трения на границе раздела жидкого металла и электролита:

$$F_{x\bar{H}_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2};$$

$$F_{y\bar{H}_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \sqrt{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2};$$

компоненты силы трения на нижней границе жидкого металла:

$$F_{xz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2};$$

$$F_{yz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2};$$

$\bar{p}_1(t_0)$ находится из задачи Неймана для уравнения Пуассона [1, 16]:

$$\begin{cases} \Delta \bar{p}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{1x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{f}_{1y}, \Delta \bar{p}_1 = \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial y^2}, \\ \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \bar{f}_{1x}, \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{f}_{1y}, \\ \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} \right|_{x=l_x} = \bar{f}_{1x}, \left. \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} \right|_{y=l_y} = \bar{f}_{1y}. \end{cases}$$

Плотность электромагнитных сил:

$$f_1 = \frac{1}{c\rho_1} j_1 \times H_1 = \frac{1}{c\rho_1} \left(\frac{c}{4\pi} \text{rot} H_1 \right) \times \\ \times H_1 = \frac{1}{4\pi\rho_1} \text{rot} H_1 \times H_1.$$

Слой электролита:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial y} = -\bar{\rho}_2 Q;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (h_2 - h_2(t_0)) \cdot (\bar{\rho}_2 g - \bar{f}_{2z}) - \bar{\rho}_2(t_0) \right] +$$

$$+ F_{D\bar{u}_2} + F_{xH_2} - F_{xH_1} - g\bar{\rho}_2 h_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \bar{f}_{2x} h_2;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2 h_2}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} (h_2 - h_2(t_0)) \cdot (\bar{\rho}_2 g - \bar{f}_{2z}) - \bar{\rho}_2(t_0) \right] +$$

$$+ F_{D\bar{v}_2} + F_{yH_2} - F_{yH_1} - g\bar{\rho}_2 h_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \bar{f}_{2y} h_2;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H_2}{\rho_2} \right) + (V_2, \nabla) \left(\frac{H_2}{\rho_2} \right) = \left(\frac{H_2}{\rho_2}, \nabla \right) V_2 - \frac{c}{\rho_2} \text{rot}(v_{m_2} j_2) \alpha_2;$$

$$\alpha_2 = \frac{h_{2,\min} + \delta}{h_{2,\min}};$$

$$h_{2,\min} = \min_{x,y} h_2 - h_{mpr,\min};$$

диффузионные члены определяются формулами:

$$F_{D\bar{u}_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \right);$$

$$F_{D\bar{v}_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} \right);$$

$$F_{D\bar{T}_2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((k_{2T} + k_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((k_{2T} + k_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial y} \right);$$

компоненты силы трения на нижней границе жидкого металла:

$$F_{xH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{u}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2};$$

$$F_{yH_2} = -\zeta_{H_2} \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 \sqrt{\bar{u}_2^2 + \bar{v}_2^2};$$

$\bar{p}_2(t_0)$ находится из задачи Дирихле для уравнения Пуассона [1, 16]:

$$\begin{cases} \Delta \bar{p}_2 = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}_{2x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{f}_{2y}, \\ \bar{p}_2|_{y=0} = \rho_2 g (H_3 - \frac{H_1 + H_2}{2}), \\ \quad \quad \quad y=l_y \\ \quad \quad \quad x=0 \\ \quad \quad \quad x=l_x \end{cases}$$

Плотность электромагнитных сил:

$$f_2 = \frac{1}{4\pi\rho_2} \times \text{rot} H_2 \times H_2.$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial}{\partial n} V_1 \Big|_d = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} V_2 \Big|_d = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_1 \Big|_d = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} H_2 \Big|_d = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} f_1 \Big|_d = 0, \quad f_2 \Big|_d = 0.$$

В начальный момент времени заданы значения скоростей и магнитного поля в металле и электролите: $V_1(x, y, t_0)$, $H_1(x, y, t_0)$, $V_2(x, y, t_0)$, $H_2(x, y, t_0)$, толщина слоя металла $h_1(x, y, t_0) \approx 0,25$ м и толщина слоя электролита $h_2(x, y, t_0) \approx 0,18$ м и величины токов, исходящих из анодов. Эти данные получены как результаты вычислений, проведенных по стационарной модели [1, 16].

Исходя из этих данных рассчитываются значения плотности возмущающих электромагнитных сил в начальный момент времени: $f_1(x, y, t_0)$, $f_2(x, y, t_0)$; плотности поступающих токов: $j_{1,2}(x, y)$ и давление в средних слоях сред металла и электролита в начальный момент времени: $\bar{p}_1(x, y, t_0)$, $\bar{p}_2(x, y, t_0)$.

В расчетах не учитываются перенос тепла в металле и электролите и теплообмен между металлом и электролитом, так как температура на дне металла на 3—4 °С меньше, чем на поверхности раздела при средней температуре электролита -950—970 °С [17, 18].

Система численно решается с помощью расщепления на этапы по физическим процессам.

1-й этап

Изменение компонент скорости жидкого металла за счет перепадов высоты и электромагнитных сил.

$$\frac{\partial \bar{p}_1 h_1}{\partial t} = -\bar{\rho}_1 Q;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \times \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) \cdot (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + \bar{f}_{1x} h_1;$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \times \left[\frac{1}{2} (h_1 - h_1(t_0)) \cdot (\bar{\rho}_1 g - \bar{f}_{1z}) - \bar{p}_1(t_0) \right] + \bar{f}_{1y} h_1.$$

Данная система аппроксимируется с порядком $O(\tau, h_x^2 + h_y^2)$ явной разностной схемой.

2-й этап

Система уравнений конвекции со скоростями, вычисленными на предыдущем этапе,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$E = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1 \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \\ \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 h_1 - \mu_T \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Аппроксимация разностной схемой "Кабаре" [17] с порядком $O(\tau^2, h_x^2 + h_y^2)$.

3-й этап

Учет изменения скоростей жидкого металла за счет трения

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} = E_{xz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2},$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} = F_{yz_0} = -\zeta_0 \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2}.$$

Используется аналитически полученное точное решение, записанное в разностном виде.

4-6-й этапы

Учитываются процессы в среде электролита аналогично процессам, учтенным на этапах 1-3 в среде жидкого металла.

7-й этап

Учет изменения скоростей жидкого металла и электролита за счет трения слоев между собой

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{u}_1 h_1}{\partial t} = F_{xH_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \times \sqrt{(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2};$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_1 \bar{v}_1 h_1}{\partial t} = F_{yH_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \times \sqrt{(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2};$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} = -F_{xH_1} = \zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \times \sqrt{(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2};$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_2 \bar{v}_2 h_2}{\partial t} = -F_{yH_1} = -\zeta_{H_1} \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \times \sqrt{(\bar{u}_1 + \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2}.$$

Используется аналитически полученное точное решение, записанное в разностном виде.

8-й этап

Изменение электромагнитного поля с учетом изменения скоростей в слое жидкого металла

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = D, \text{ где}$$

$$E = \begin{bmatrix} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} H_{1x} \bar{u}_1 \\ H_{1y} \bar{u}_1 \\ H_{1z} \bar{u}_1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} H_{1x} \bar{v}_1 \\ H_{1y} \bar{v}_1 \\ H_{1z} \bar{v}_1 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 2H_{1x} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + H_{1y} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + H_{1x} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} - \alpha \alpha_1 \nu_{m_1} \frac{\partial J_{1,z}}{\partial y} \\ H_{1x} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + 2H_{1y} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} + H_{1y} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \alpha \alpha_1 \nu_{m_1} \frac{\partial J_{1,z}}{\partial x} \\ H_{1z} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + H_{1z} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} - \alpha \alpha_1 \nu_{m_1} \left(\frac{\partial J_{1,y}}{\partial x} - \frac{\partial J_{1,x}}{\partial y} \right) \end{bmatrix}.$$

Аппроксимация разностной схемой "Кабаре" [17] с порядком $O(\tau^2, h_x^2 + h_y^2)$.

9-й этап

Изменение электромагнитного поля с учетом изменения скоростей в слое электролита аналогично 8-му этапу.

10-й этап

Пересчет нового распределения плотности электромагнитных сил.

Аппроксимация центральными разностными производными.

$$f_1 = \frac{1}{4\pi r_1} \text{rot} H_1 \times H_1, f_2 = \frac{1}{4\pi r_2} \text{rot} H_2 \times H_2.$$

Полуэмпирически подобрано условие устойчивости метода. Предположительно условие на шаг по времени должно было походить на

$\tau_n < \text{const} \cdot \min(h_x, h_y)$, но зависеть также и от скачков величин: при резких изменениях должно происходить дробление шага. В результате получено условие

$$\tau_{n+1} < C \frac{\min(h_x, h_y)}{\max \left(\max_{A \in \{v_1, v_2, H_1, H_2\}} \max_{i,j} \text{abs} \left(|A|_{i,j}^n - |A|_{i,j}^{n-1} \right), 1 \right)},$$

где $C = \text{const} \approx 0,01$.

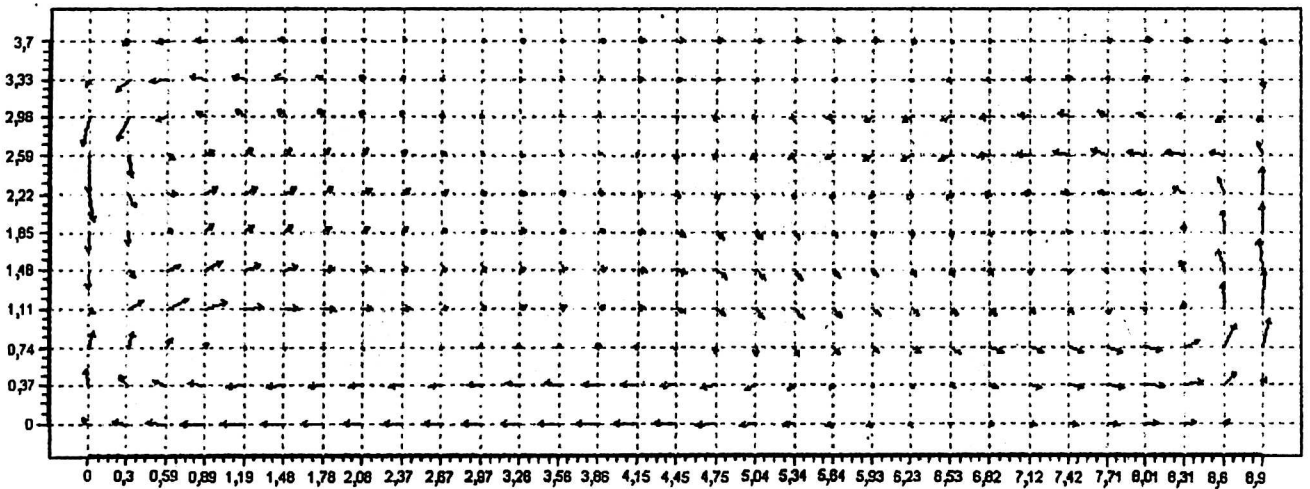
Данное условие является несколько жестким, однако позволяет избежать некорректного поведения разностного метода.

На основе созданного комплекса программ проведено большое количество расчетов на ос-

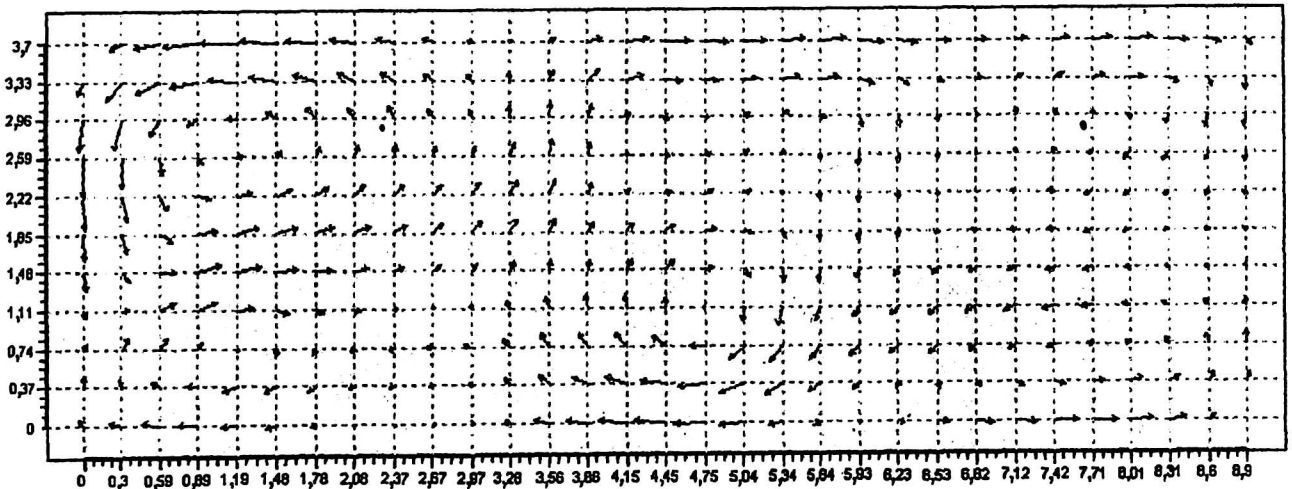
нове различных тестовых начальных данных, по каждому из этапов расщепления на физические процессы и по всей системе в целом. Расчеты показали удовлетворительное совпадение с ожидаемыми из физических моделей результатами.

В качестве примера приведен тест, подтверждающий корректную работу системы на 7-м этапе, учитывающем трение между слоями жидкого металла и электролита. При этом все остальные этапы отключены и заданы лишь начальные скорости в обеих средах, изображенные на рис. 2.

Происходит постепенное усреднение между скоростями в металле и электролите, при этом скорости в среде металла падают, а в среде электролита — растут, достигая промежуточного значения.



a



б

Рис. 2. Распределение скоростей в среднем слое среды: а — жидкого металла; б — электролита

На рис. 3 изображены графики динамики поверхности раздела сред металла и электролита при расчетах по данным конкретной электролизной ванны. При этом в начальный момент времени задано распределение поверхности раз-

дела, скоростей в средних слоях сред жидкого металла и электролита, напряженности магнитного поля, плотности тока и плотности электромагнитных сил, рассчитанное по стационарной модели. Это значительно улучшает сходимость метода.

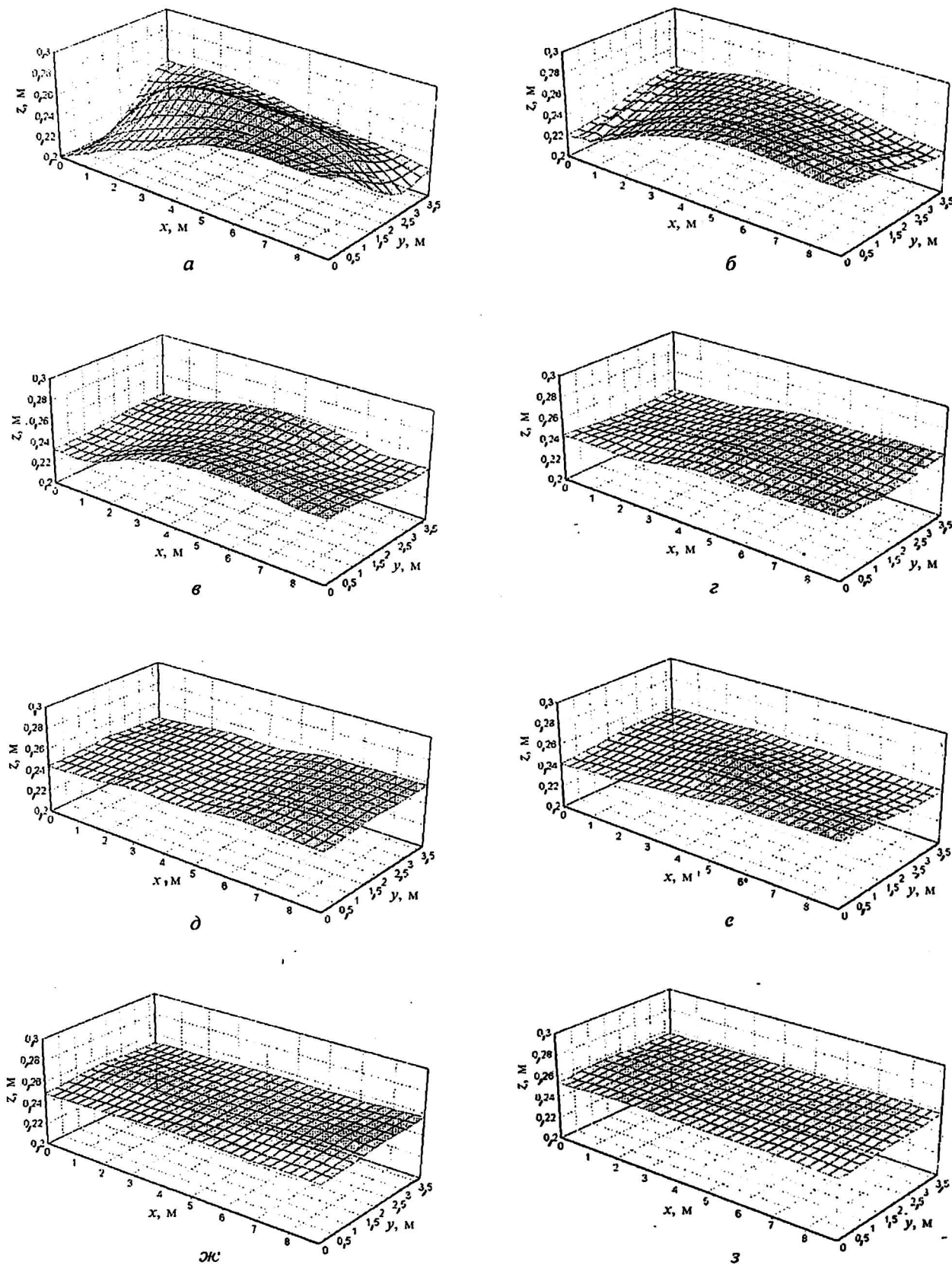


Рис. 3. Поверхность раздела жидкий металл—электролит H при разных шагах: а — 0; б — 100; в — 200; г — 400; д — 550; е — 700; ж — 1000; з — 1500

В процессе вычислений происходит деформация поверхности раздела сред металла и электролита под действием возмущающих электромагнитных сил. Затем система выходит на установившийся режим, и поверхность раздела распределяется равномерно, что отвечает физическому процессу.

На рис. 4 в координатах x, y, z представлены графики компонент векторов напряженности электромагнитного поля в средних слоях сред жидкого металла и электролита для установившегося режима: слева — в среде жидкого металла, справа — в среде электролита.

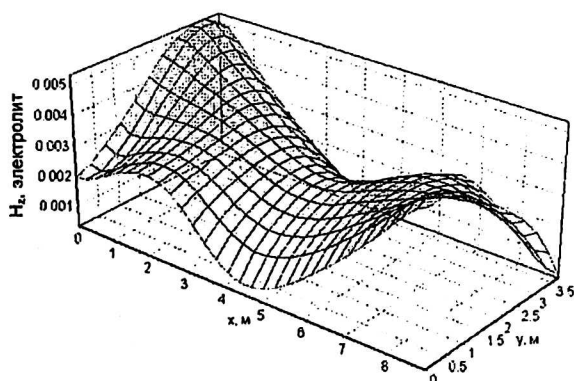
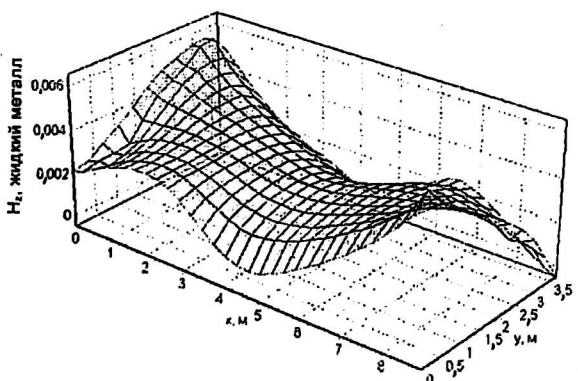
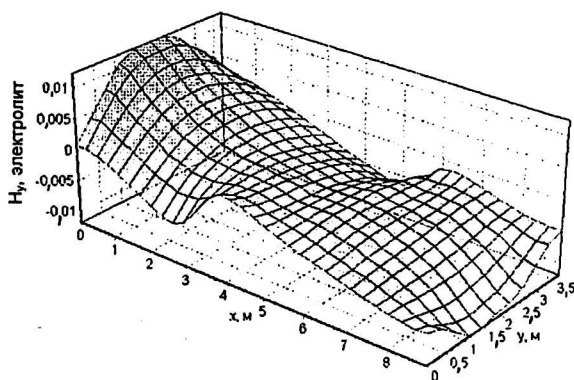
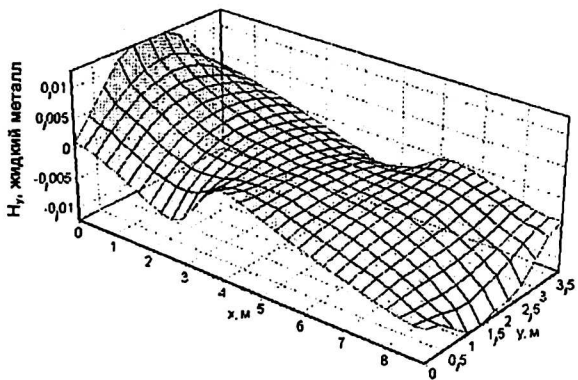
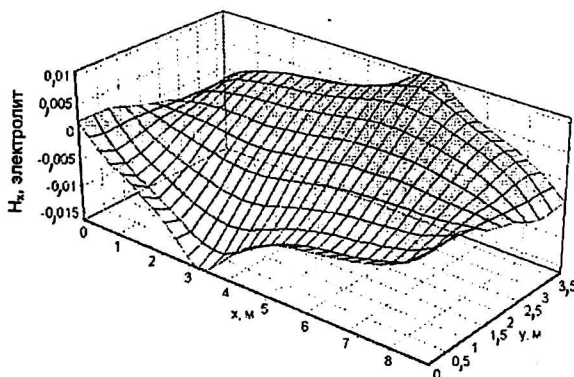
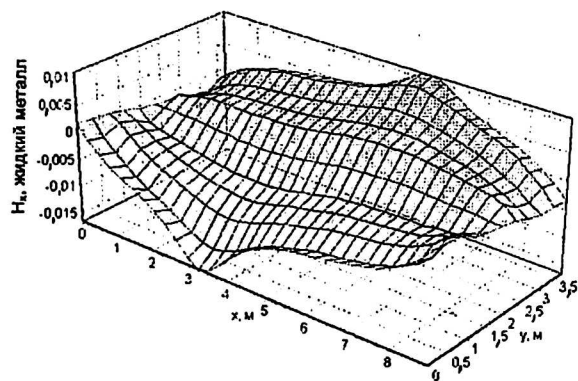


Рис. 4. Напряженность в средних слоях сред жидкого металла (слева) и электролита (справа), шаг по времени — 1500

Литература

1. Бьков В. И., Злобин В. С., Тимофеев В. Н., Багаев Б. М., Пингин В. В., Проворова О. Г., Архипов В. Г., Альчиков В. В., Добровец Б. С., Овчаренко В. Е., Садовский В. М. Математическое моделирование физических полей в алюминиевых электролизерах. — Красноярск, 2002. С. 75—98.
2. Grjotheim K., Kvande H. Introduction to aluminum electrolysis. Dusseldorf: Aluminium-Verlag, 1993. P. 260.
3. Grjotheim K., Welch B. Aluminum Smelter Technology. Dusseldorf: Aluminium-Verlag, 1988. P. 260.
4. Urata N., Mori K., Ikeuchi H. Behavior of bath and molten metal in aluminium electrolytic cell, Kaikiuzoku (Light Metals, Japan), 26, 1976. P. 573—583.
5. Urata N. Magnetic and metal pad instability, Light Metals, 1985. P. 581—589.
6. Tang H. Q., Urata N. Metal pad wave analysis using a fast anode lowering method, Light Metals, 1997. P. 387—393.

7. *Sele T.* Instabilities of the Metal Surface in Electrolytic Cells, *Light Metals*, 1977. P. 7—24.
8. *Moreau R., Ziegler D.* Stability of Aluminium Cells—a new approach, *Light Metals*, 1986. P. 359—364.
9. *Desloux J., Flueck M., Romero M. V.* Modelling for Instabilities in Hall-Heroult Cells: Mathematical and Numerical Aspects, *Magnetohydrodynamics in Process Metallurgy*. 1991. P. 107—110.
10. *Sneyd A. D., Wang.* Interfacial Instabilities due to MHD Mode Coupling in Aluminium Reduction Cells, *J. Fluid Mech.*, 1994. P. 343—359.
11. *Bojarevics V., Romero M. V.* Long wave instability in liquid metal-electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: a generalization of Sele's criterion, *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 1994. V. 13. № 1. P. 33—56.
12. *Droste Ch., Segatz M and Vogelsang D.* Magnetohydrodynamics Instability Analysis in Reduction Cells, *Light Metals*, 1998. P. 419—427.
13. *Davidson P. A., Lindsay R. J.* Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells// *J. Fluid Mech.*, 1998. V. 362. P. 273—295.
14. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992.
15. *Кузьмин Р. Н., Кулешов А. А., Савенкова Н. П., Филиппова С. В.* Моделирование аварий на промышленном объекте с истечением тяжелых газов и жидкостей// *Математическое моделирование*. 1998. Т. 10. № 8. С. 33—42.
16. *Проворова О. Г., Пингин В. В., Овчинников В. В., Пискажева Т. В., Горин Д. А.* Математические модели физических полей в электролизере Содерберга// *Магнитная гидродинамика*. 1998. Т. 34. С. 375—385.
17. *Головизнин В. М., Самарский А. А.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной переменной// *Математическое моделирование*, 1998. Т. 10. № 1. С. 86—100.
18. *Федотьев Н. П., Алабышев А. Ф. и др.* Прикладная электрохимия. — М.: Госхимиздат, 1962. С. 275—330.

The dynamic model of magnetohydrodynamical processes in the aluminium electrolyzer

A. V. Alatortsev, R. N. Kuzmin, N. P. Savenkova
Moscow State University, Moscow, Russia

O. G. Provorova
Krasnoyarsk State University, Krasnoyarsk, Russia

Authors offer new dynamical mathematical model describing physical fields and metal-electrolyte interface in an aluminum electrolysis cell. It is not used of expansions of the fields in terms of "basic" and disturbed one. This model describes physical fields in dynamics. The computational method of combined equations of the magneto hydrodynamics is offered.