

УДК 533.922

Конфигурация магнитного поля движущегося электрона

В. В. Вихрев

РНИЦ "Курчатовский институт", Москва, Россия

На примере электрона проанализирована конфигурация магнитного поля, которая образуется при движении заряженной частицы с магнитным моментом. Показано, что интерпретация де Бройля о появлении в системе характерного размера $\frac{h}{m_e v}$ для

электрона не является единственно возможной. При движении электрона с учетом его магнитного момента образуется сложная структура магнитного поля, основным

параметром которой является величина $L_v = \frac{\hbar}{2m_e v}$. Показано, что если магнитный

диполь электрона направлен перпендикулярно его скорости, то на расстоянии L_v от последнего в его магнитном поле образуется дырка. Приведен случай, когда все силовые магнитные линии движущегося электрона имеют вид спиралей с шагом, равным половине длины волны де Бройля.

До 1925 г. электрон рассматривался как частица, имеющая только заряд и массу: существовала так называемая "классическая теория" электрона. Было обнаружено, что на основе таких представлений об электроне нельзя описать его поведение в микромире, и для описания последнего была создана волновая (квантовая) механика.

В 1925 г. С. Гаудсмит и Дж. Уленбек пришли к заключению, что электрон, кроме массы и за-

ряда, обладает еще спином, т. е. механическим и магнитным моментами [1]. Очевидно, что магнитный момент частицы может влиять на ее траекторию, если частица подходит на достаточно близкое расстояние к другим частицам. При классическом описании движения частицы наличие магнитного момента, естественно, должно быть учтено.

Возможно, из-за больших успехов квантовой механики в интерпретации явлений микромира

не проведено никаких систематических исследований в этом направлении. Хотя классическая интерпретация частиц, особенно электронов, как частиц, имеющих определенную траекторию, часто используется для интерпретации многих явлений и бывает очень полезна, вплоть до настоящего времени существуют считанные работы, в которых исследуется движение заряженных частиц с учетом наличия у них магнитного момента.

В работе [2] М. Гривинский описывает движение электрона в атоме по модели, учитывающей магнитный момент электрона. В этой работе также показано, что электрон при приближении к противоположно заряженному ядру на близкие расстояния отражается от него за счет наличия у ядра спина. Поэтому электрон, отскакивая от ядра, может двигаться в атоме исключительно в радиальном направлении. М. Гривинский выдвинул гипотезу [3], согласно которой многие явления в микромире можно описать на основе классических представлений движения электрона, если учесть, что на движение электрона влияют не только его заряд и масса, но и спин, т. е. магнитный и механический моменты электрона. В результате им предложена новая область исследований — "классическая электродинамика микрочастиц", в которой учитывается магнитный момент этих частиц. Многие явления микромира, которые не объясняются исходя из обычной классической электродинамики частиц, можно интерпретировать с точки зрения этой новой (с учетом спина) классической электродинамики частиц [3].

В настоящей работе представлены результаты исследований конфигурации электромагнитного поля движущихся заряженных частиц с магнит-

ным моментом. Особое внимание уделено конфигурации полей движущегося электрона. В следующей работе будут представлены результаты расчетов движения частиц со спином при столкновении их с другими частицами и показаны способы наблюдения той сложной конфигурации магнитного поля движущихся заряженных частиц со спином, которая изложена здесь.

Частичное изложение материала, представленного в данной статье, можно найти в работе [4].

Магнитное поле, генерируемое движущимся электроном

Рассмотрим конфигурацию магнитного поля движущейся заряженной частицы. Напряженность электрического поля в системе координат, движущейся вместе с частицей, равна $\vec{E}_q = \frac{q \vec{n}}{r^2}$, где q — заряд частицы; r — расстояние до частицы; $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ — единичный вектор из места нахождения частицы.

Если частица движется со скоростью \vec{v} , то возникает магнитное поле, которое при $v \ll c$ равно

$$\vec{H}_q = \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{E}_q]. \quad (1)$$

Выражение для магнитного поля (1) получается также из закона Био-Савара при применении его к одной частице. Это магнитное поле имеет вид круговых колец вокруг оси движения частицы (рис. 1, а).

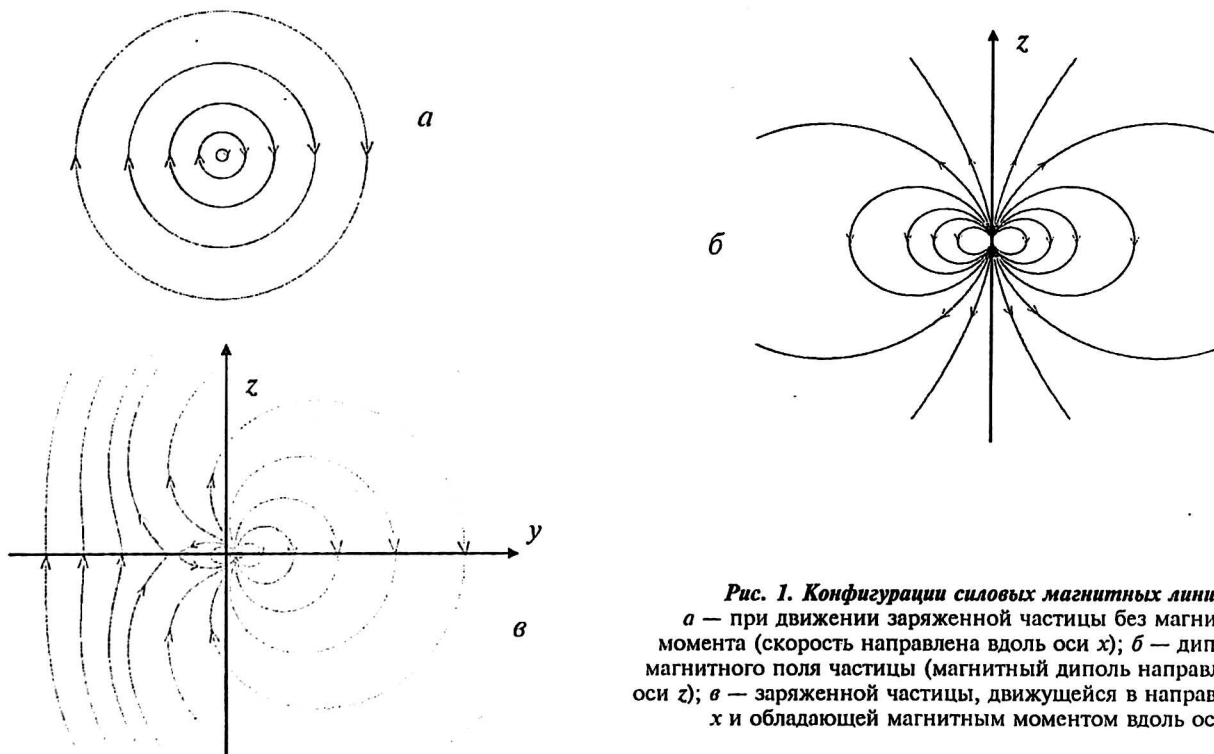


Рис. 1. Конфигурации силовых магнитных линий: а — при движении заряженной частицы без магнитного момента (скорость направлена вдоль оси x); б — дипольного магнитного поля частицы (магнитный диполь направлен вдоль оси z); в — заряженной частицы, движущейся в направлении оси x и обладающей магнитным моментом вдоль оси z

Магнитное поле \vec{H}_q максимально в плоскости, перпендикулярной движению частицы, и равно в этом сечении

$$H_q = \frac{qv}{cr^2}. \quad (2)$$

Если частица имеет дипольный магнитный момент \vec{m} , то около нее создается дипольное магнитное поле, равное

$$\vec{H}_s = \frac{3(\vec{n} \vec{m}) \vec{n} - \vec{m}}{r^3}. \quad (3)$$

Силовые линии этого магнитного поля показаны на рис. 1, б.

Вдоль оси диполя напряженность дипольного магнитного поля равна $\frac{2\mu}{r^3}$, где $\mu = |\vec{m}|$ — абсолютная величина магнитного момента частицы.

В направлении, перпендикулярном диполю, имеем

$$H_s = \frac{\mu}{r^3}. \quad (4)$$

Суммарное магнитное поле движущейся частицы с зарядом q и магнитным моментом \vec{m} определяется выражением:

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_q = \frac{3(\vec{n} \vec{m}) \vec{n} - \vec{m}}{r^3} + \frac{q[\vec{v} \vec{n}]}{cr^2}. \quad (5)$$

Поскольку при удалении от частицы \vec{H}_s спадает как $1/r^3$, а токовое магнитное поле \vec{H}_q спадает как $1/r^2$, то существует характерная длина L_v , на которой величины этих полей сравниваются. При сравнении токового магнитного поля (2) и дипольного магнитного поля (4) получим, что они равны на расстоянии от частицы

$$L_v = \frac{\mu c}{qv}.$$

На расстояниях $r \ll L_v$ от частицы магнитное поле в основном определяется магнитным моментом частицы, т. е. имеет дипольный характер (см. (3) и рис. 1, б). На расстояниях $r \gg L_v$ магнитное поле ведет себя как поле от движущейся заряженной частицы, т. е. определяется законом Био-Савара для движущегося заряда (см. (1) и рис. 1, а). На расстояниях $r \sim L_v$ конфигурация магнитного поля довольно сложная, и магнитное поле движущейся частицы (5) зависит как от направления диполя \vec{m} , так и от вектора скорости движущейся частицы \vec{v} .

Характерная длина L_v играет важную роль в конфигурации электромагнитного поля для движущихся заряженных частиц с магнитным моментом. Она зависит от отношения величины магнитного дипольного момента частицы к ее заряду (индекс v подчеркивает зависимость L_v от скорости частицы). Длина L_v определяет как периодические, так и непериодические структуры магнитного поля движущейся частицы.

Для электрона L_v имеет довольно простой вид. Поскольку заряд электрона равен e , а дипольный момент электрона равен магнетону Бора $\mu = \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$, то

$$(L_v)_{electron} = \frac{\hbar}{2m_e v}. \quad (6)$$

Хотя длина L_v для электрона определяется его электромагнитными свойствами, однако формально она не зависит от величины заряда электрона. Это связано с тем, что магнитный момент электрона пропорционален заряду последнего, и в выражении для величины L_v заряд электрона сокращается. Формальная зависимость от массы в выражении (6) возникает из-за того, что масса электрона входит в выражение для магнитного момента электрона.

Связь между L_v и длиной волны де Бройля

Как известно, длина волны де Бройля Δ_e была введена для описания волновых свойств частиц. Она зависит только от массы частицы и ее скорости и никак не зависит от наличия у частицы заряда и магнитного момента. Однако для некоторых частиц (в первую очередь для электрона и протона) имеется явная ее связь с величиной L_v .

Для электрона размер L_v (6) выражается через электронную длину волны де Бройля

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v} = \frac{2\pi\hbar}{m_e v} \text{ как } (L_v)_{electron} = \frac{\lambda_e}{4\pi}.$$

$$\text{Для протона } (L_v)_{proton} = \frac{\mu_p}{\mu_{nuc}} \frac{\hbar}{2m_p v},$$

где μ_p — магнитный момент протона;
 m_p — масса протона;

$$\mu_{nuc} = \frac{e\hbar}{2m_p c} \text{ — ядерный магнетон, } \mu_p/\mu_{nuc} \approx 2,79.$$

Величина L_v для протона выражается через длину волны де Бройля для протона $\lambda_p = \frac{h}{m_p v}$

$$\text{как } (L_v)_{proton} = \frac{\mu_p}{\mu_{nuc}} \frac{\lambda_p}{4\pi} \approx 2,79 \cdot \frac{\lambda_p}{4\pi}.$$

Для нейтрона L_v вообще не выражается через длину волны де Бройля. Нейтрон обладает маг-

нитным моментом, но не имеет заряда. В результате для нейтрона $(L_v)_{neutron} = \infty$, в то время как длина волны де Бройля для движущегося нейтрона имеет конечную величину. Поэтому в отличие от длины волны де Бройля λ_e характерный размер L_v имеет смысл только для заряженных частиц, обладающих магнитным моментом.

Имеется еще одно важное отличие L_v от длины волны де Бройля. В последнюю входит скорость самой частицы, и поэтому она постулируется как свойство частицы, имеющей скорость v . В выражение для L_v входит скорость частицы относительно тех частиц, с которыми она взаимодействует, т. е. длина L_v не характеризует какие-либо свойства частицы, однако она может проявиться при взаимодействии одних частиц с другими. Например, при рассеянии нейтронов в холодном веществе играть роль будет не величина L_v для нейтронов, которая равна бесконечности, а величина $L_v = \frac{\mu c}{q v}$, в которой q — эффективный заряд, μ — эффективный магнитный момент рассеивающих ионов вещества, а v — скорость нейтронов в этом веществе.

Конфигурация магнитного поля в случае, когда направление магнитного момента частицы совпадает с направлением ее движения

В случае, когда направление вектора магнитного диполя частицы \vec{m} совпадает с направлением скорости ее движения \vec{v} , конфигурация

магнитного поля является осесимметричной относительно \vec{m} и \vec{v} . Магнитное поле от диполя частицы (3) будет в каждой точке пространства перпендикулярно токовому магнитному полю (1).

Суммарное магнитное поле (5) складывается из (1) и (3), в данном случае оно является спиральным. Спиральная структура силовых магнитных линий особенно хорошо наблюдается на расстояниях, много больших L_v от оси движения частицы. Магнитные силовые линии обвиваются там вокруг оси системы с шагом, равным $2\pi L_v$. Каждая силовая магнитная линия начинается и кончается на частице.

На рис. 2 показаны проекции спиралей силовых магнитных линий на плоскость, проходящую через ось системы. Силовые магнитные линии, представленные на рис. 2, а—г, отличаются расстоянием r_0 , на которое они удаляются от частицы. При $r_0 \gg L_v$ проекции магнитных силовых линий имеют вид синусоиды с периодом $T = 2\pi L_v$. Чем дальше от оси системы проходит силовая магнитная линия (т. е. чем больше r_0), тем большее количество оборотов вокруг оси она совершает. Количество витков спирали n , которое силовая магнитная линия совершает вокруг направления оси системы, связано с расстоянием r_0 соотношением $n = 0,381 \frac{r_0}{L_v}$. Силовые магнитные линии с $r_0 \ll L_v$ ведут себя в соответствии с силовыми линиями чистого дипольного магнитного поля, т. е. имеют вид, показанный на рис. 2, б.

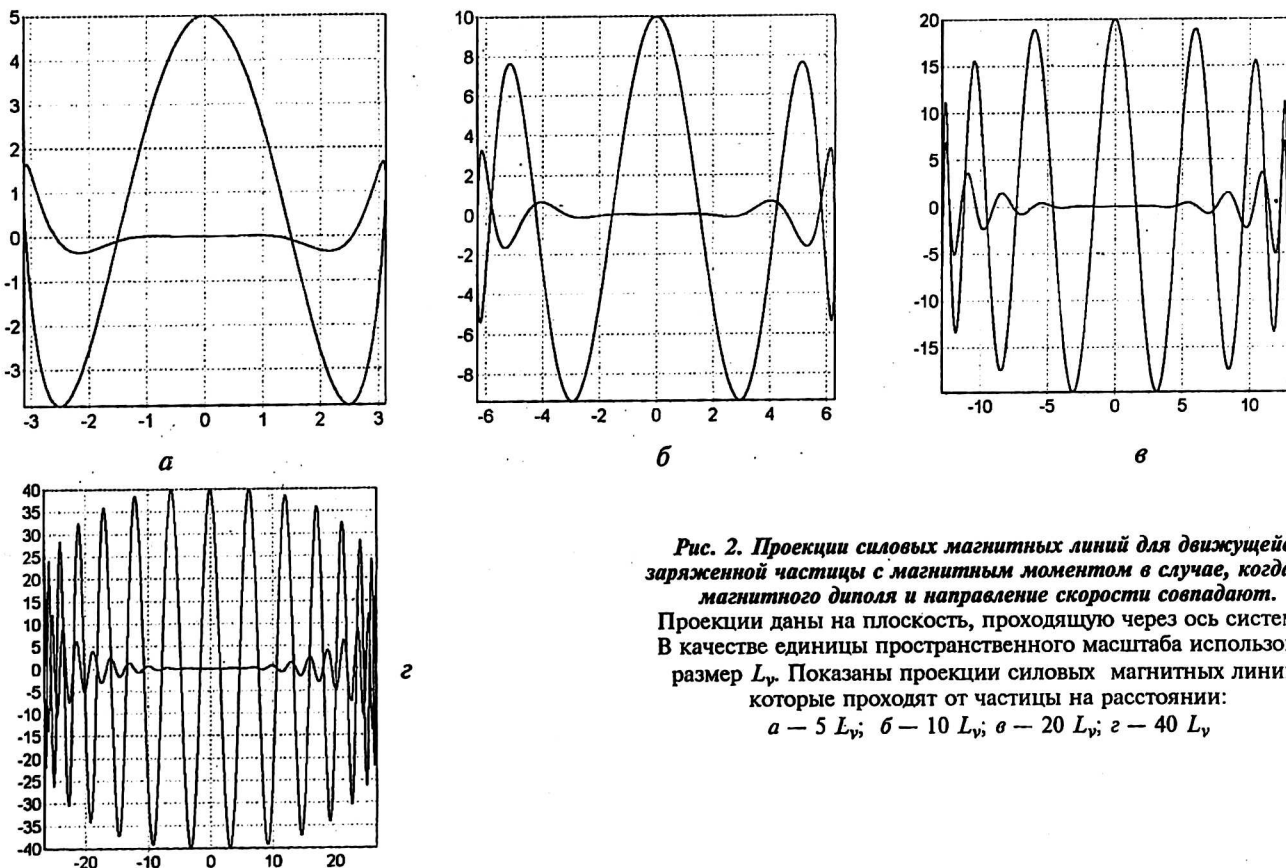


Рис. 2. Проекция силовых магнитных линий для движущейся заряженной частицы с магнитным моментом в случае, когда ось магнитного диполя и направление скорости совпадают. Проекция даны на плоскость, проходящую через ось системы. В качестве единицы пространственного масштаба использован размер L_v . Показаны проекции силовых магнитных линий, которые проходят от частицы на расстоянии:
 а — $5 L_v$; б — $10 L_v$; в — $20 L_v$; г — $40 L_v$

Для электрона шаг спирали магнитной линии T выражается через длину волны де Бройля λ_e соотношением $T = 2\pi L_v = \lambda_e/2$. В данном случае магнитное поле электрона не является волной, тем не менее спиральный характер силовых магнитных линий электрона с шагом $\lambda_e/2$ может вызвать явления, схожие с волновыми явлениями электронов.

Конфигурация электромагнитного поля в случае, когда направление магнитного момента перпендикулярно направлению движения

На рис. 3 показано распределение абсолютной величины напряженности магнитного поля в различных плоскостях. Частица движется вдоль оси x , магнитный диполь направлен вдоль оси z . Более светлым областям соответствует большая величина магнитного поля. Частица находится в центре координатной системы ($x = 0, y = 0, z = 0$). На рис. 3, *а* изображение дано в плоскости, перпендикулярной направлению движения частицы и проходящей через нее (в плоскости yz при $x = 0$). Слева от частицы, на расстоянии L_v , напряженность магнитного поля равна нулю.

Наличие дырки в магнитном поле объясняется взаимным наложением дипольного (см. рис. 1, *б*) и токового (см. рис. 1, *а*) магнитных полей частицы. С одной стороны, от частицы направления дипольного и токового магнитных полей совпадают, и поля там складываются. С другой стороны, от частицы эти магнитные поля противоположны по направлению, поэтому вычитаются друг из друга. На расстоянии L_v от частицы эти поля по абсолютной величине равны между собой и полностью компенсируют друг друга, и суммарное магнитное поле в этом месте равно нулю.

Анализ показывает, что магнитное поле в рассматриваемом случае равно нулю вдоль всей прямой $y = -L_v$. В остальной области пространства (кроме как на бесконечности) магнитное поле от частицы отлично от нуля. На рис. 3, *б* и *в* показана напряженность магнитного поля в плоскостях, проходящих через прямую с нулевым магнитным полем.

На рис. 1, *в* показаны силовые магнитные линии магнитного поля в плоскости yz при $x = 0$. На малых расстояниях ($r \ll L_v$) магнитное поле имеет дипольный характер (как и поле на рис. 1, *б*), а на больших расстояниях ($r \gg L_v$) силовые линии имеют вид окружностей (как показано на рис. 1, *а*).

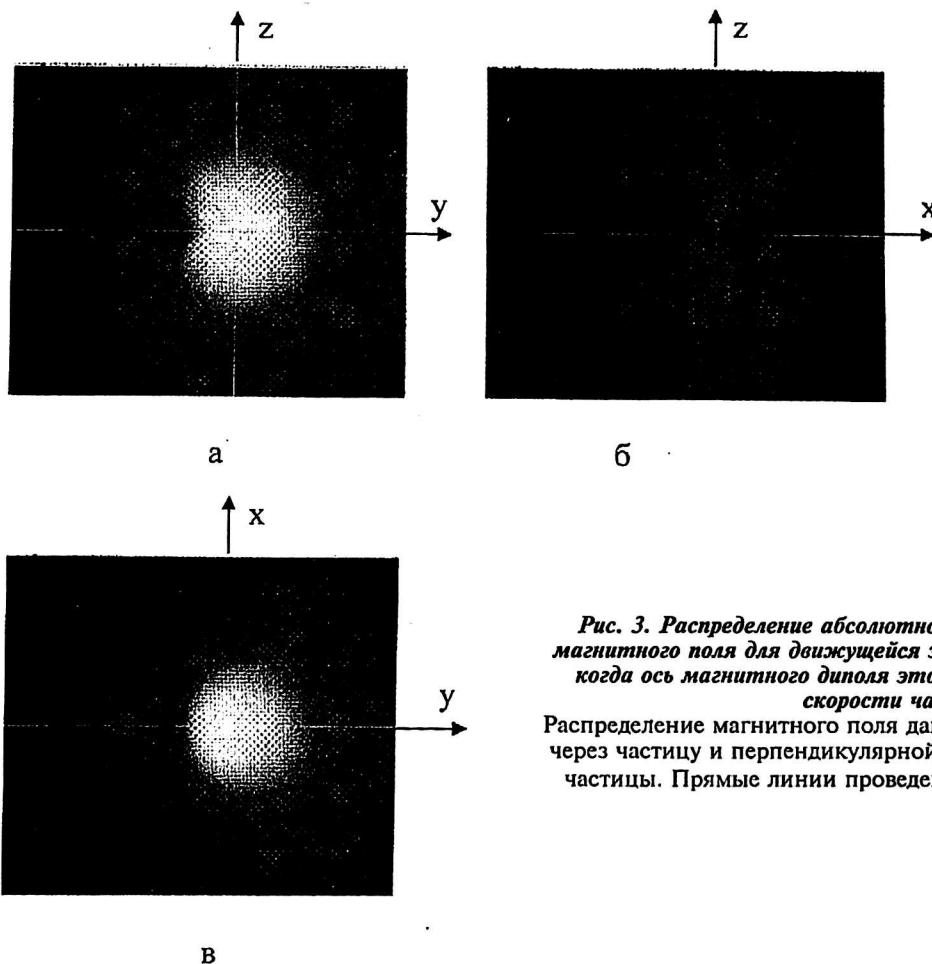


Рис. 3. Распределение абсолютной величины напряженности магнитного поля для движущейся заряженной частицы в случае, когда ось магнитного диполя этой частицы перпендикулярна скорости частицы.

Распределение магнитного поля дано для плоскости, проходящей через частицу и перпендикулярной направлению движения этой частицы. Прямые линии проведены на расстоянии L_v от осей

На рис. 4 приведена программа на языке MathCad, дающая трехмерное представление о магнитном поле движущейся заряженной частицы с магнитным диполем, перпендикулярным направлению движения. Показан также результат работы этой программы — трехмерное изображение поверхности магнитного поля движущейся частицы, для которой величина магнитного поля равна $0,14 \frac{qm^2v^3}{ch^2}$. Поверхность имеет вид "тороидального бублика". Частица находится в толстой части тора в точке с координатами $x = 0, y = 0, z = 0$. Видна "дырка" в бублике. Она находится вдоль прямой $y = -L_v$. На рис. 3 видны сечения этого бублика в различных плоскостях.

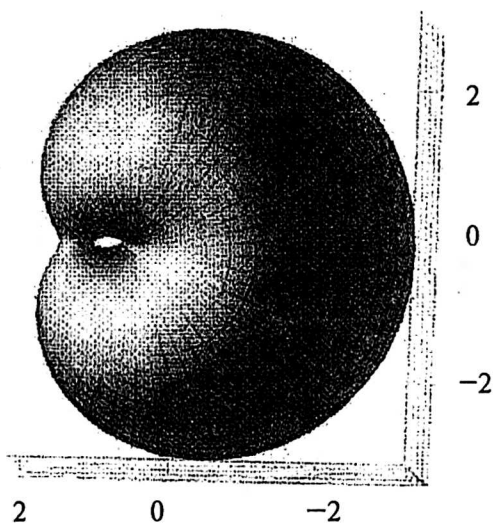


Рис. 4. Программа для расчета на MathCad-2000 конфигурации магнитного поля движущейся заряженной частицы со спином и результаты ее работы. В качестве единицы пространственного масштаба использован размер L_v

Довольно интересную конфигурацию имеет вектор Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_q \vec{H}]$, если магнитный момент частицы перпендикулярен направлению ее движения. Пусть частица движется вдоль оси x , а магнитный диполь направлен вдоль оси z . Тогда на рис. 5 показана абсолютная величина x -компоненты (т. е. в направлении движения частицы) вектора Пойнтинга в плоскости, перпендикулярной скорости. В основной части пространства перенос энергии идет в направлении, в котором движется частица, а внутри круга радиуса $L_v/2$ перенос электромагнитной энергии направлен навстречу движению частицы (см. рис. 5, а).

Подобная картина направленности x -компоненты вектора Пойнтинга (внутри круга одно направление, а вне круга другое) имеет место во всех плоскостях, которые перпендикулярны направлению движения частицы. Отрицательное значение x -компоненты вектора Пойнтинга имеет место в бесконечно длинном цилиндре, имеющем радиус $L_v/2$, ось этого цилиндра параллельна направлению движения частицы и расположена на расстоянии $L_v/2$ от частицы (см. рис. 5). Вне цилиндра направление переноса энергии совпадает с направлением движения частицы.

Таким образом, вектор Пойнтинга меняет свое направление на расстоянии, равном L_v от оси движения электрона. Такое поведение потока электромагнитной энергии естественно должно сказываться на поведении заряженной частицы при приближении к другим на расстояния меньше L_v .

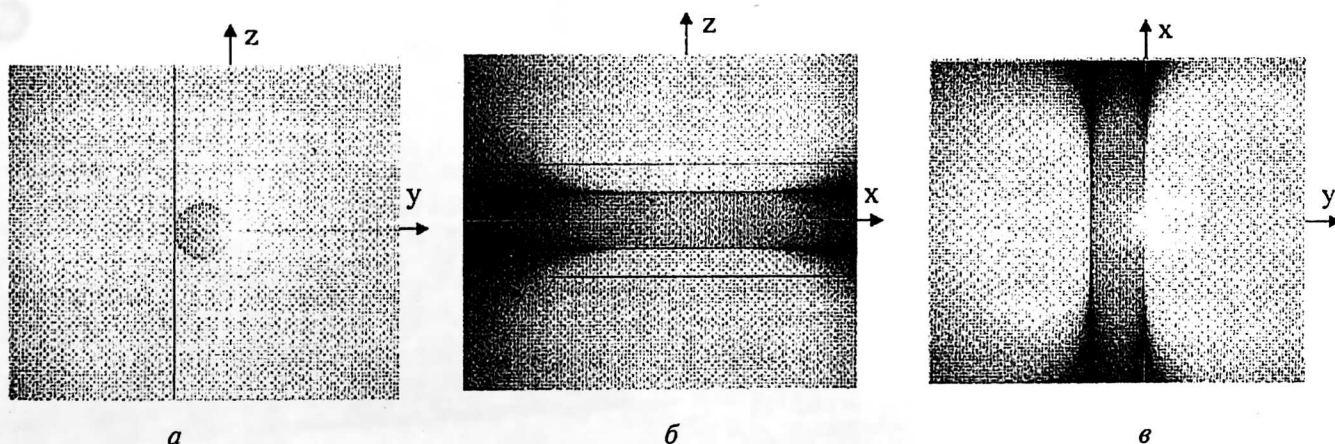


Рис. 5. Компонента вектора переноса электромагнитной энергии вдоль направления движения частицы (x -компонента вектора Пойнтинга) в случае, когда ось магнитного диполя частицы перпендикулярна к скорости частицы.

Прямые линии проведены на расстоянии L_v от осей.

Величина x -компоненты вектора Пойнтинга дана:

а — в плоскости yz при $x = 0$, т. е. в плоскости, перпендикулярной направлению движения частицы и проходящей через эту частицу; б — в плоскости xz при $y = -L_v/2$; в — в плоскости xy при $z = 0$

Область применимости классического описания конфигурации электромагнитного поля электрона

Классическая физика не может описать электромагнитные поля внутри электрона. Классическое описание их имеет смысл только на расстояниях, больше радиуса электрона.

Классический радиус электрона определяется выражением $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ и равен $2,82 \cdot 10^{-13}$ см.

В действительности величина r_e не является радиусом электрона, она является только пределом, меньше которого радиус электрона не может быть, иначе энергия электрического поля электрона превысит его массу. Для радиуса электрона наиболее подходящей величиной является комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m_e c}, \text{ равная } 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

При приближении скорости электрона к скорости света длина L_v стремится к λ_C . Поэтому для релятивистских электронов магнитное поле электронов полностью является токовым (1), т. е. определяется из закона Био-Савара. Это означает, что вышеописанные конфигурации магнитного поля могут быть только для нерелятивистских электронов.

Область применимости классического описания движения электронов

Под классическим описанием движения электрона обычно понимается его движение без учета того, что он обладает спином (т. е. механическим и магнитными моментами). Это описание широко используется в физике и применимо во многих случаях, например, для описания столкновений заряженных частиц между собой (кулоновские столкновения). Действительно, при столкновении электрона с другими заряженными частицами кулоновское взаимодействие частиц оказывается преобладающим над магнитным взаимодействием этих частиц, и магнитные моменты частиц не влияют на процесс столкновения.

Если же электрон сталкивается с нейтральной частицей, обладающей только магнитным моментом, кулоновское взаимодействие отсутствует и становится существенным взаимодействие магнитного поля нейтральной частицы со сложным магнитным полем движущегося электрона. Поэтому при движении последнего в среде, состоящей из нейтральных частиц с магнитными моментами, должна проявиться характерная длина L_v для электрона. Аналогичное явление должно возникнуть при движении незаряженной частицы с магнитным моментом в среде, со-

стоящей из заряженных частиц с магнитными моментами.

Электроны при приближении к другим частицам с магнитным диполем отклоняются от них в зависимости от направления их спина в момент столкновений. Для определения этих отклонений траектории необходимо в уравнении движения для электрона учесть его магнитное дипольное поле, знать исходное направление спина электрона и учесть изменение этого направления во времени. При классическом описании траектории электрона (без учета его спина) его магнитное поле берется просто из закона Био-Савара (1). Это приближение справедливо при прохождении электрона от других частиц на расстоянии

$$\Delta x > (L_v)_{electron} \quad (7)$$

При приближении электрона к нейтральным частицам, обладающим магнитным полем, на расстояниях меньше $(L_v)_{electron}$, необходимо учитывать влияние спина электрона на его траекторию. Если учесть, что $(L_v)_{electron}$ определяется выражением (6), то условие применимости классического приближения движения электрона без учета спина (7) получаем в виде

$$\Delta x P_e > \frac{\hbar}{2}, \quad (8)$$

где $P_e = m_e V$ — импульс электрона.

В результате имеем, что если для описания движения электрона используется классическое приближение (т. е. не учитывающее спин электрона), то траектория движения электрона не может быть полностью определена. При таком классическом приближении можно говорить только о вероятности прохождения электрона по одной из его возможных траекторий.

Обсуждение результатов и выводы

Все вышеизложенное может быть легко проверено для электромагнитных полей, возникающих при движении больших (макроскопических) заряженных тел, обладающих магнитным моментом. Однако основной научный интерес в изучении электромагнитного поля движущихся частиц с магнитным моментом связан с возможностью интерпретации явлений микромира методами классической физики.

В первую очередь на основе классического описания динамики электрона со спином можно интерпретировать те явления, которые связаны с появлением в системе характерного размера

$\frac{\hbar}{m_e v}$. Этот размер в настоящее время принято интерпретировать как проявление волновых

свойств электрона, т. е. волнами де Бройля. В соответствии с гипотезой де Бройля эти волны имеют неэлектромагнитное происхождение и свойственны всем частицам, имеющим массу.

Данная работа указывает на то, что интерпретация де Бройля о появлении в системе характерного размера $\frac{h}{m_e v}$ для электрона не является

единственно возможной. При движении электрона с учетом его магнитного момента образуется сложная структура магнитного поля, существенным параметром которой является величина $L_v = \frac{\hbar}{2m_e v}$, где v — скорость электрона

относительно других частиц. Характерная длина L_v получается в рамках классических представлений об электромагнитном поле на основе известных характеристик электрона.

Относительно конфигурации электромагнитного поля движущихся заряженных частиц с магнитным моментом можно сделать следующие выводы.

1. Если направление вектора магнитного поля заряженной частицы \vec{m} совпадает с направлением ее движения, то все силовые магнитные линии на расстояниях $r \gg L_v$ имеют вид спиралей с шагом $2\pi L_v$.

2. Если магнитный диполь заряженной частицы направлен перпендикулярно скорости частицы, то результирующее магнитное поле частицы имеет "дырку", т. е. на расстоянии L_v от оси движения частицы с одной из сторон магнитное поле равно нулю.

3. Если магнитный диполь частицы перпендикулярен скорости частицы, то x -компонента

вектора Пойнтинга (вдоль движения) направлена навстречу движению частицы в цилиндре с диаметром L_v , а в остальной области пространства эта компонента потока энергии совпадает с направлением движения частицы.

4. Дипольное магнитное поле заряженной частицы существенно влияет на траекторию этой частицы в том случае, если она приближается к другим незаряженным частицам на расстояние, меньшее, чем L_v . Для электрона это означает, что если расстояние до других частиц становится меньше $\frac{\hbar}{2m_e v}$, то для описания движения электрона в рамках классической физики необходимо учитывать влияние магнитного момента электрона на создаваемое им магнитное поле.

Условие применимости классического приближения, которое не учитывает спин электрона, определяется соотношением (8).

Работа поддержана грантом
№ НШ-2024.2003.2 по государственной поддержке исследований ведущих научных школ.

Автор благодарен проф. Т. Фуджимото за ценные замечания по данной работе.

Л и т е р а т у р а

1. Uhlenbeck G. E., Goudsmit S. A.// Die Naturwissenschaften. 1925. V. 13. P. 953.
2. Gryzinski M.// Phys. Lett. 1972. V. 41A. P. 217.
3. Gryzinski M. Sprava Atomu. — Homo-Sapiens, Warsaw. 2002.
4. Вухрев В. В.// Препринт ИАЭ-6273/6. М., 2003.

Magnetic field configuration of a moving electron

V. V. Vikhrev

Russian Research Centre Kurchatov Institute, Moscow, Russia

An electromagnetic field configuration is analyzed, which is produced by a moving charged particle having a magnetic moment. Special attention is paid to the field configuration by an electron. It is shown that the de Broglie interpretation of the characteristic size, $\frac{h}{m_e v}$, for an electron, is not the only possible one. Moving electron has a complex structure

of magnetic field with its essential parameter $L_v = \frac{\hbar}{2m_e v}$. If a magnetic dipole of the

charged particles is perpendicular to its velocity, the magnetic field has a hole at the distance L_v from the electron. The example is given then all magnetic field lines of a moving electron look like the spirals with the period equal to a half the de Broglie wavelength.