

УДК 539.186.2

К вопросу о сечениях тормозного излучения и упругих столкновений бесструктурных заряженных частиц во внешнем электрическом поле

В. И. Крылов

Хабаровский государственный педагогический университет, Хабаровск, Россия

Определены "подгоночные" параметры, входящие в ранее найденные сечения упругого рассеяния и тормозного излучения заряженных частиц друг на друге во внешнем электрическом поле, что позволило исключить неопределенность в таких сечениях. Показано, что в области энергии относительного движения двух сталкивающихся частиц, соответствующей их отражению от потенциального барьера внешнего поля, сечения тормозного излучения с найденными комплексными параметрами имеют большую величину и большие амплитуды осцилляций по сравнению с численно проанализированными в ранее опубликованных работах сечениями, в которых подгоночные параметры имели действительные значения.

В работах [1, 2] в нерелятивистском приближении были найдены дифференциальные сечения тормозного излучения, возникающего при рассеянии бесструктурных заряженных частиц друг на друге во внешнем электрическом поле. Сечения были определены в первом порядке теории возмущений (в дипольном приближении) по асимптотам волновых функций, имеющих вид как бегущей, так и стоячей волны из-за отражения легкой частицы от потенциального барьера внешнего поля.

Найденные в этих работах сечения содержат параметры α_1 и α_2 , которые входят в фазы волновой функции, описывающей относительное движение двух сталкивающихся частиц. Точно

определить эти величины можно только из решений уравнения Шредингера для двух взаимодействующих друг с другом заряженных частиц, находящихся в однородном электрическом поле, что сделать чрезвычайно сложно, и в настоящее время такая задача не решена. Вследствие этого в упомянутых работах α_1 и α_2 рассматривались как подгоночные параметры, а их определение заменялось численным анализом зависимости сечений от этих величин, которые считались действительными.

В настоящей работе по аналогии с [3] при рассмотрении ионизации электронами атома водорода во внешнем электрическом поле показано, что при определенных условиях можно оп-

ределить α_1 и α_2 исходя из простых физических соображений, относящихся к упругим столкновениям бесструктурных заряженных частиц друг на друге во внешнем однородном и стационарном электрическом поле, что позволило получить и проанализировать более конкретные выражения для рассматриваемых дифференциальных сечений.

Так же, как и в [1, 2], будем считать, что внешнее однородное и постоянное электрическое поле с напряженностью $\vec{\epsilon}$ находится в полупространстве с границей, к которой $\vec{\epsilon}$ нормальна, а поток легких частиц, проходя через эту границу и ускоряясь (параллельно $\vec{\epsilon}$), падает на тяжелую рассеивающую частицу (средняя скорость ее значительно меньше средней скорости легкой частицы), находящуюся на макроскопическом расстоянии L от границы внешнего поля.

Для случая, когда энергии относительного движения легкой и тяжелой частиц в их начальных и конечных состояниях значительно больше их средней энергии взаимодействия, волновую функцию $\psi_{\vec{k}_0}$ начального состояния внутреннего

движения такой системы (состоящей из легкой и тяжелой частиц) можно выбрать в виде бегущей волны, а для ее конечного состояния с энергией продольного относительного движения $E_z < |e|\epsilon L$, когда после рассеяния легкая частица отражается от потенциального барьера внешнего поля, волновая функция $\psi_{\vec{k}}$ должна иметь вид стоячей (вдоль $\vec{\epsilon}$) волны в области пространства между точкой отражения электрона от потенциального барьера внешнего поля и тяжелой частицей (точнее, центром масс сталкивающихся частиц) и вид бегущей волны в полупространстве с другой (вдоль $\vec{\epsilon}$) стороны от центра масс, где точки отражения нет (подробнее см. в [1–3]).

В декартовой системе координат x, y, z , начало которой совпадает с положением центра масс сталкивающихся частиц, а ось z направлена вдоль напряженности внешнего поля $\vec{\epsilon} : \vec{\epsilon} = (0, 0, \epsilon)$ (знак ϵ определяется условием $e_m \epsilon > 0$, где $e_m = (e_1 m_2 - e_2 m_1)/(m_1 + m_2)$ [1, 2]), волновые функции $\psi_{\vec{k}_0}$ и $\psi_{\vec{k}}$ можно записать следующим образом:

при $E_z > e_m \epsilon L$:

$$\psi_{\vec{k}_0} = \frac{A_{\vec{k}_0}}{S_0^{1/4}} \exp \left[i \left(\frac{2}{3} \frac{\chi_{0z}}{|\chi_{0z}|} S_0^2 + \vec{k}_{0\perp} \vec{r} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\psi_{\vec{k}} = \frac{A_{\vec{k}}}{S^{1/4}} \exp \left[i \left(\frac{2}{3} \frac{\chi_z}{|\chi_z|} S^{3/2} + \vec{k}_{\perp} \vec{r} \right) \right];$$

при $E_z \ll e_m \epsilon L$:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{A_{\vec{k}} e^{i\vec{k}_{\perp} \vec{r}}}{S^{1/4}} \times \begin{cases} \frac{1}{2i} \left[\exp \left[i \left(\frac{2}{3} S^2 + \alpha_1 \right) \right] - \exp \left[-i \left(\frac{2}{3} S^2 + \alpha_1 \right) \right] \right], & \text{если } z < 0 \\ \exp \left[i \left(\frac{2}{3} S^2 + \alpha_2 \right) \right], & \text{если } z > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$S_0 = z/\ell + E_{0z}/|e_m|\epsilon\ell; \quad S = z/\ell + E_z/|e_m|\epsilon\ell;$$

$$\ell = (\hbar^2/2m|e_m|\epsilon)^{1/3}; \quad e_m = (e_1 m_2 - e_2 m_1)/(m_1 + m_2);$$

$$E_{0z} = \hbar^2 \chi_{0z}^2/m + e_m \epsilon L; \quad E_z = \hbar^2 \chi_z^2/m + e_m \epsilon L;$$

$m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$; $\vec{\chi} = (\vec{k}_{\perp}, \chi_z)$, $\vec{\chi}_0 = (\vec{k}_{0\perp}, \chi_{0z})$ — волновые векторы, определяющие импульсы относительного движения частиц до и после их рассеяния друг на друге, отнесенные к границе внешнего поля;

$e_{1,2}, m_{1,2}$ — заряды и массы легкой и тяжелой частиц, соответственно;

E_{0z}, E_z и $\vec{k}_{0\perp}, \vec{k}_{\perp}$ — энергии продольного (относительно $\vec{\epsilon}$) и волновые векторы поперечного относительного движения двух сталкивающихся частиц в их начальном и конечном состояниях;

$k_{z\pm} = \pm \sqrt{2m_e E_z/\hbar}$; $k_{0z} = \sqrt{2m_e E_{0z}/\hbar}$; $A_{\vec{k}_0, \vec{k}}$ — нормировочные постоянные;

знак "*" — определяет комплексное сопряжение.

Для упругого рассеяния рассматриваемых частиц вычисленное по функциям $\psi_{\vec{k}_0}$ и $\psi_{\vec{k}}$ в первом порядке теории возмущений дифференциальное сечение имеет вид (в "атомных" единицах с масштабом длины $\hbar^2/e_m^2 m$):

$$d\sigma_{el} = \frac{|\chi_{0z}| k Z_1^2 Z_2^2}{|k_{0z}| \chi_0 Z_m^4} |T_{el}|^2 d\Omega. \quad (3)$$

Выражение (3) получено делением вероятности перехода системы (из состояния с волновой функцией $\psi_{\vec{k}_0}$ в состояние с функцией $\psi_{\vec{k}}$) на найденную по $\psi_{\vec{k}_0}$ плотность потока (1)–(2)

относительного движения частиц на границе поля. Именно с этим связано появление в (3) множителя $|\chi_{0z}|k/|k_{0z}|\chi_0$.

Следует отметить, что в однородном электрическом поле плотность потока зависит от координаты вдоль этого поля, что делает определение сечения неоднозначным. Для однозначного определения сечения следует рассмотреть столкновения частиц в электрическом поле, локализованном в плоском слое. Однако при

$\epsilon < 0,001 |e_m|/a^2 + 0,01 |e_m|/a^2$ ($a = \hbar^2 / me_m^2$) и для области локализации поля порядка $100 a$ такие сечения практически совпадают с (3), так как амплитуда отраженной от второй границы поля волны составляет приблизительно 10^{-3} от амплитуды волны, падающей на эту границу [3].

Имеем:

$$|T_{el}|^2 = \frac{1}{q_+^4} \left\{ \left(1 + \frac{q_{+z}^2}{q_1^2} \right) \left[e^{i(\gamma_2 - \gamma_2^*)} + \frac{1}{4} e^{i(\gamma_1 - \gamma_1^*)} \right] + \frac{i}{2} \left(1 - \frac{q_{+z}^2}{q_1^2} \right) \left[e^{i(\gamma_2 - \gamma_1)} - e^{-i(\gamma_2^* - \gamma_1)} \right] - \frac{q_{+z}}{q_1} \left[e^{i(\gamma_2 - \gamma_1^*)} + e^{-i(\gamma_2^* - \gamma_1)} \right] \right\} + \frac{1}{2q_-^2 q_+^2} \left\{ \frac{q_{-z} + q_{+z}}{q_1} \left[e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)} + e^{-i(\gamma_1^* + \gamma_2^*)} \right] - \left(1 - \frac{q_{+z} q_{-z}}{q_1^2} \right) \left[e^{i(\gamma_1 + \gamma_2)} - e^{-i(\gamma_1^* + \gamma_2^*)} \right] - \frac{1}{2} (1 + \frac{q_{+z} q_{-z}}{q_1^2}) (e^{2i\gamma_1} + e^{-2i\gamma_1^*}) + \frac{i}{2} \frac{q_{+z} - q_{-z}}{q_1} (e^{2i\gamma_1} - e^{-2i\gamma_1^*}) \right\} + \frac{1}{4q_-^4} \left(1 + \frac{q_{-z}^2}{q_1^2} \right) e^{i(\gamma_1 - \gamma_1^*)}, \quad (4)$$

если $\epsilon^{2/3} \ll k_z^2/2 < \epsilon L$ (5)

и $|T_{el}|^2 = \frac{1}{q_+^4}$, (6)

когда $\epsilon L < k_z^2/2$,

где $\bar{q}_\pm = \bar{k}_\pm - \bar{k}_0$; $\bar{k}_\pm = (\bar{k}_\perp, \pm\sqrt{2E_z})$;

$\gamma_{1,2} = \alpha_{1,2} + k_z^3/3\epsilon$; $\bar{q}_\perp = (\bar{k}_\perp - \bar{k}_{0\perp})$;

$Z_{1,2,m} = e_{1,2,m}/|e|$; e — заряд электрона, причем $k_+^2 = k_0^2$;

do — элемент телесного угла, в котором находится вектор $\bar{k}_+ \equiv \bar{k}$.

Отметим также, что при выполнении условий (5) величина $k_z \equiv k_{z+}$ может быть только положительной, т. е. $k_z > 0$.

Подстановка в (3) выражения (6) приводит к хорошо известной формуле Резерфорда [4] дифференциального сечения рассеяния заряженных частиц друг на друге.

Вывод выражения (4) фактически не связан с прохождением легких частиц над потенциальным барьером внешнего поля высотой $\epsilon\epsilon L$ (или ϵL — в атомных единицах). Формула (4) остается в силе и в том случае, если бы легкие частицы попали в окрестность тяжелой частицы благодаря, например, туннельному эффекту, пройдя через достаточно широкий потенциальный барьер

внешнего электрического поля или каким-либо иным образом. Тогда величина k_{0z} так же, как и k_z , будет ограничена только условием $k_{0z}^2 \gg 2\epsilon^{2/3}$ и при отклонении на малые углы вектора \bar{k} ; при начальном \bar{k}_0 , направленном по отношению к оси z под углом, близким к $\pi/2$, величины $q_{\pm z}/q_\perp$ будут значительно меньше единицы, и в формуле (4) можно пренебречь выражениями, содержащими эти множители.

Оставшиеся слагаемые, как следует из (6), имеют простой физический смысл: $\frac{1}{q_+^4}$ с точно-

стью до множителя определяет вклад в сечение легких частиц, которые после рассеяния получили положительную, направленную вдоль оси z составляющую импульса $k_z = +\sqrt{2E_z} = k_{z+}$, а величина q_-^4 — вклад этих частиц с $k_z = -\sqrt{2E_z} = k_{z-}$, т. е. тех, которые после рассеяния отражаются от потенциального барьера внешнего поля и попадают в тот же элемент телесного угла, что и легкие частицы с положительным k_z . Если бы движение частиц подчинялось законам классической механики, то дифференциальное сечение равнялось бы сумме двух слагаемых

$$d\sigma_{el} \approx \left\{ \frac{1}{q_+^4} + \frac{1}{q_-^4} \right\} do. \quad (7)$$

В случае же квантово-механического рассеяния должно появиться еще третье интерференционное слагаемое. Следовательно, при θ и θ_0 , близких к $\pi/2$, фазы α_1 и α_2 , входящие в (4), можно определить, подобрав их таким образом, чтобы при подстановке первых двух слагаемых из (4) в (3) получить выражение (7) с дополнительным слагаемым, содержащим множитель $(q_+ q_-)^{-2}$, которое исчезает при интегрировании дифференциального сечения по небольшому, но конечному элементу телесного угла, когда расстояние (вдоль $\bar{\epsilon}$) от центра инерции сталкивающихся частиц до точки отражения легкой частицы от потенциального барьера внешнего поля становится значительно больше ℓ .

Поставленная цель будет достигнута, если положить

$$\alpha_1 = \pi/4 - i \ln 2; \quad \alpha_2 = \pi/4 + \arcsin(1/2). \quad (8)$$

Действительно, подставляя (4) с этими значениями α_1 и α_2 в (3), получим

$$d\sigma_{el} = \frac{Z_1^2 Z_2^2}{Z_m^4} \frac{|x_{0z}|}{|k_{0z}|} \frac{k}{x_0} \left[\frac{1}{q_+^4} \left(1 + 3 \frac{q_{+z}^2}{q_1^2} - \frac{q_{+z}}{q_1} 2\sqrt{3} \right) + \frac{2}{q_-^2 q_+^2} \sqrt{1-B} \sin \left(\frac{2}{3} \frac{|k_z|^3}{\epsilon} + 2 \operatorname{Re} \alpha_1 - \beta \right) + \frac{1}{q_-^4} \left(1 + \frac{q_{-z}^2}{q_1^2} \right) \right] do, \quad (9)$$

$$\text{где } B = \frac{q_{-z}}{q_{\perp}\sqrt{3}} - \frac{q_{-z}q_{+z}}{q_{\perp}^2} - \frac{5}{6} \frac{q_{-z}^2}{q_{\perp}^2} - \frac{3}{2} \frac{q_{+z}^2}{q_{\perp}^2} + \\ + \frac{5}{\sqrt{3}} \frac{q_{-z}^2 q_{+z}}{q_{\perp}^3} + \frac{q_{-z} q_{+z}^2}{q_{\perp}^3} \sqrt{3} - 3 \frac{q_{-z}^2 q_{+z}^2}{q_{\perp}^4}; \\ \text{tg}\beta = \frac{q_{\perp}^3 + 3q_{-z}q_{+z} - (q_{-z} + q_{+z})q_{\perp}\sqrt{3}}{q_{\perp}^2\sqrt{3} - q_{+z}q_{-z}\sqrt{3} + q_{-z}q_{\perp} - 3q_{+z}q_{\perp}}.$$

Слагаемое в (9), содержащее синус, определяется интерференционными эффектами, возникающими при отражении частиц от потенциального барьера внешнего поля, и становится быстроосциллирующим при стремлении ϵ к нулю, в результате чего исчезает при интегрировании даже по малому интервалу телесного угла $\Delta\theta$, а выражение (9) с точностью до слагаемых, содержащих множители $q_{\pm z}/q_{\perp}$, переходит в (7).

Исходя из вышеизложенного, можно ожидать, что волновые функции (2) при подстановке в них (8) достаточно хорошо будут определять и дифференциальные сечения тормозного излучения, возникающего при столкновении бесструктурных заряженных частиц друг с другом во внешнем квазиоднородном и квазистационарном электрическом поле, по крайней мере, когда импульсы относительного движения частиц в окрестности центра инерции (в области пространства с линейным размером порядка $100a$) направлены к внешнему полю под углами, близкими к $\pi/2$.

При определении в нерелятивистском борновском приближении сечений тормозного излучения будем исходить из хорошо известного выражения [5]

$$d\sigma = \frac{1}{j} \left(\frac{\omega^3}{2\pi c^3 \hbar} \right) |\bar{e}^* \bar{d}_{ff}|^2 d\omega_F dn,$$

где $\omega = \frac{E_j - E_f}{\hbar}$; E_j и E_f — энергия начального и

конечного состояний системы, соответственно; \bar{e} — вектор поляризации излученного фотона; $d\omega_F$ — элемент телесного угла волнового вектора фотона;

$$dn = \frac{|k_z| \ell}{8\pi^3 |A_k|^2} k^2 dk d\omega — \text{число состояний, в}$$

которое переходит излучающая система с $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$ — элементом телесного угла, в котором находится вектор \bar{k} ;

\bar{d}_{ff} — матричный элемент дипольного момента системы, который определяется по волновым функциям (1) и (2):

$$\bar{d}_{ff} = \frac{e_1 e_2}{\omega^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \iiint \psi_f^* \psi_j \nabla \frac{1}{r} d^3\vec{r},$$

где ψ_f и ψ_j — функции конечного и начального состояний системы, которые в зависимости от интервала продольной энергии E_z выбираются в виде (1) или (2);

j — плотность потока относительного движения частиц в их начальном состоянии, вычисленная по (1),

$$j = \frac{\hbar |A_{\chi_0}|^2 |\chi_0|}{\ell m |\chi_{0z}|}.$$

В настоящей работе, как и в [1, 2], мы будем рассматривать тормозное излучение, возникающее на расстояниях (вдоль поля) от центра инерции системы, меньших, чем $\frac{E_{0z}}{\ell m \epsilon}$. Эта величина

значительно больше a при $\epsilon \ll \frac{|e|}{a^2}$.

Вычисления с фазами (8), незначительно отличающиеся от проведенных в работах [1, 2], приводят к сечению $d\sigma_{\bar{e}}$ излучения во внешнем однородном электрическом поле фотона (с вектором поляризации \bar{e} и волновым вектором \bar{k}_F , лежащим в элементе телесного угла $d\omega_F$), испущенного при столкновении заряженных частиц, волновой вектор \bar{k} относительного движения которых находится в элементе телесного угла $d\omega$.

В единицах с масштабom длины $a = \frac{\hbar^2}{e_m^2 m}$ это сечение принимает вид

$$d\sigma_{\bar{e}} = \frac{1}{4\pi^2} \alpha^3 \frac{|\chi_{0z}|}{|\chi_{0z}|} \frac{k}{\chi_0} (Z_1 Z_2 Z_m)^2 |T_{\bar{e}}|^2 \frac{d\omega}{\omega} d\omega_F d\omega, \quad (10)$$

где α — постоянная тонкой структуры;

$$k^2 = k_0^2 - 2\omega; \quad k_{0z}^2 = \chi_{0z}^2 + 2\epsilon L;$$

$$|T_{\bar{e}}|^2 = \frac{1}{4q_-^4} \left[(\bar{e}^* \bar{q}_-) (\bar{e} \bar{q}_-) - i (\bar{e} \bar{q}_-) (\bar{e}^* \bar{u}_-) + \right. \\ \left. + i (\bar{e}^* \bar{q}_-) (\bar{e} \bar{u}_-) + (\bar{e} \bar{u}_-) (\bar{e}^* \bar{u}_-) \right] e^{i(\gamma_1 - \gamma_1^*)} + \\ + \frac{i}{2q_+^2 q_-^2} \left\{ e^{i\gamma_1} \left[i h_+^* (\bar{e}^* \bar{q}_-) (\bar{e} \bar{u}_+) + \right. \right. \\ \left. \left. + i h_-^* (\bar{e} \bar{q}_+) (\bar{e}^* \bar{u}_-) + h_+^* (\bar{e}^* \bar{u}_-) (\bar{e} \bar{u}_+) - h_-^* (\bar{e}^* \bar{q}_-) (\bar{e} \bar{q}_+) \right] + \right. \\ \left. + e^{-i\gamma_1} \left[h_- (\bar{e}^* \bar{q}_+) (\bar{e} \bar{q}_-) + i h_- (\bar{e}^* \bar{q}_+) (\bar{e} \bar{u}_-) + i h_+ (\bar{e} \bar{q}_-) (\bar{e}^* \bar{u}_+) - \right. \right. \\ \left. \left. - h_+ (\bar{e}^* \bar{u}_+) (\bar{e} \bar{u}_-) \right] \right\} + \frac{1}{q_+^4} \left\{ |h_-|^2 (\bar{e}^* \bar{q}_+) (\bar{e} \bar{q}_+) + \right. \\ \left. + i h_- h_+ (\bar{e} \bar{q}_+) (\bar{e}^* \bar{u}_+) - i h_+ h_-^* (\bar{e}^* \bar{q}_+) (\bar{e} \bar{u}_+) + |h_+|^2 (\bar{e}^* \bar{u}_+) (\bar{e} \bar{u}_+) \right\};$$

$$\gamma_{1,2} = \alpha_{1,2} + \frac{k_{z\pm}^3}{3\varepsilon};$$

$\vec{u}_{\pm} = (\vec{q}_{\perp} f_{\pm}, q_{\perp})$ — "вектор", который ввели, имея в виду в дальнейшем суммирование по поляризации фотона;

$$f_{\pm} = \frac{q_{\perp}^2 - q_{z\pm}^2}{2q_{z\pm}^2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{q_{z\pm}}{|q_{z\pm}|} - \arctg \frac{q_{\perp}}{q_{z\pm}} \right) - \frac{q_{z\pm}^2 + q_{\pm}^2}{2q_{\perp} q_{z\pm}};$$

$$h_{\pm} = \exp(-i\gamma_2^*) \pm \frac{1}{2i} \exp(-i\gamma_1^*).$$

Отметим, что в выражении (10), полученном при $E_z \ll \varepsilon L$, угол $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Для линейной поляризации фотона (именно этот случай мы здесь и рассматриваем) вектор поляризации

$$\vec{e} = (\sin \varphi_F \cos \varphi_{\vec{e}} + \cos \theta_F \cos \varphi_F \sin \varphi_{\vec{e}}; \cos \theta_F \sin \varphi_F \sin \varphi_{\vec{e}} - \cos \varphi_F \cos \varphi_{\vec{e}}; -\sin \theta_F \sin \varphi_{\vec{e}}),$$

где $\varphi_{\vec{e}}$ — угол между вектором \vec{e} и $\vec{a}_{\perp} = \frac{[\vec{n}, \frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon}]}{\sin \theta_F}$,

который лежит в плоскости xy и имеет координаты $(\varepsilon/|\varepsilon| \sin \varphi_F, -\cos \varphi_F, 0)$ (для сталкивающихся с ионом электронами $\varepsilon < 0$, а для позитронов — положительно); θ_F, φ_F — сферические координаты вектора $\vec{n} = \frac{\vec{k}_F}{k_F}$.

Дифференциальное сечение неполяризованного тормозного излучения можно получить из выражения (10), если провести в нем суммирование по различным направлениям вектора поляризации фотонов, которое, как известно, сводится к усреднению по углу $\varphi_{\vec{e}}$ и умножению на 2 [5].

Проведя такую операцию, получим сечение $d\sigma_{\vec{n}}$ излучения фотонов, волновой вектор \vec{k}_F которого лежит в элементе телесного угла $d\theta_F$, тогда как вектор \vec{k} находится в элементе телесного угла $d\theta$:

Проведя такую операцию, получим сечение $d\sigma_{\vec{n}}$ излучения фотонов, волновой вектор \vec{k}_F которого лежит в элементе телесного угла $d\theta_F$, тогда как вектор \vec{k} находится в элементе телесного угла $d\theta$:

$$d\sigma_{\vec{n}} = \frac{1}{4\pi^2} \alpha^3 \frac{|\chi_{0z}|}{|\chi_{0z}|} \frac{k}{\chi_0} (Z_1 Z_2 Z_m)^2 |T_{\vec{n}}|^2 \frac{d\omega}{\omega} d\theta_F d\theta, \quad (11)$$

где

$$|T_{\vec{n}}|^2 = \frac{1}{4q_{\pm}^4} \left([\vec{q}_{-}, \vec{n}]^2 + [\vec{u}_{-}, \vec{n}]^2 \right) e^{i(\gamma_1 - \gamma_1^*)} + \frac{i}{2q_{\pm}^2 q_{\pm}^2} \left\{ \left(e^{-i\gamma_1^*} h_{-} - h_{-}^* e^{i\gamma_1} \right) [\vec{q}_{-}, \vec{n}] [\vec{q}_{+}, \vec{n}] + \right.$$

$$\left. + i \left(h_{+}^* e^{i\gamma_1} + h_{+} e^{-i\gamma_1^*} \right) [\vec{q}_{-}, \vec{n}] [\vec{u}_{+}, \vec{n}] + \right. \\ \left. + i \left(h_{-}^* e^{i\gamma_1} + h_{-} e^{-i\gamma_1^*} \right) [\vec{q}_{+}, \vec{n}] [\vec{u}_{-}, \vec{n}] + \right. \\ \left. + \left(h_{+}^* e^{i\gamma_1} - h_{+} e^{-i\gamma_1^*} \right) [\vec{u}_{+}, \vec{n}] [\vec{u}_{-}, \vec{n}] \right\} + \\ + \frac{1}{q_{+}^4} \left\{ |h_{-}|^2 [\vec{q}_{+}, \vec{n}] [\vec{q}_{+}, \vec{n}] + |h_{+}|^2 [\vec{u}_{+}, \vec{n}] [\vec{u}_{+}, \vec{n}] + \right. \\ \left. + i \left(h_{-}^* h_{+} - h_{-} h_{+}^* \right) [\vec{q}_{+}, \vec{n}] [\vec{u}_{+}, \vec{n}] \right\}.$$

Используя значения найденных фаз (8), представим $|T_{\vec{n}}|^2$ в следующем виде:

$$|T_{\vec{n}}|^2 = \frac{1}{q_{\pm}^4} \left\{ [\vec{q}_{-}, \vec{n}]^2 + [\vec{u}_{-}, \vec{n}]^2 \right\} - \\ - \frac{1}{q_{\pm}^2 q_{\pm}^2} \left\{ 3[\vec{u}_{+}, \vec{n}] [\vec{u}_{-}, \vec{n}] + [\vec{q}_{+}, \vec{n}] [\vec{q}_{-}, \vec{n}] + \right. \\ \left. + \sqrt{3} [\vec{q}_{-}, \vec{n}] [\vec{u}_{+}, \vec{n}] + \sqrt{3} [\vec{u}_{-}, \vec{n}] [\vec{q}_{+}, \vec{n}] \right\} \times \\ \times \cos \left(\frac{2}{3} \frac{|k_z|^3}{\varepsilon} + 2 \operatorname{Re} \alpha_1 \right) + \left(\sqrt{3} [\vec{u}_{-}, \vec{n}] [\vec{u}_{+}, \vec{n}] - \right. \\ \left. - \sqrt{3} [\vec{q}_{-}, \vec{n}] [\vec{q}_{+}, \vec{n}] - 3[\vec{q}_{-}, \vec{n}] [\vec{u}_{+}, \vec{n}] + [\vec{u}_{-}, \vec{n}] [\vec{q}_{+}, \vec{n}] \right) \times \\ \times \sin \left(2 \operatorname{Re} \alpha_1 + \frac{2}{3} \frac{|k_z|^3}{\varepsilon} \right) \left. \right\} + \\ + \frac{1}{q_{+}^4} \left\{ [\vec{q}_{+}, \vec{n}]^2 + 2\sqrt{3} [\vec{u}_{+}, \vec{n}] [\vec{q}_{+}, \vec{n}] + 3[\vec{u}_{+}, \vec{n}]^2 \right\},$$

из которого следует, что $d\sigma_{\vec{n}}$ имеет осциллирующую структуру из-за входящих в него синуса и косинуса, фазами которых является величина $2|k_z|^3/3\varepsilon$.

Выражение (11) для сечений $d\sigma_{\vec{n}}$ несложно проинтегрировать по углам θ_F и φ_F , определяющих вектор \vec{n} , используя известное соотношение [5]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [\vec{a}, \vec{n}] [\vec{b}, \vec{n}] \sin \theta_F d\theta_F d\varphi_F = \frac{8\pi}{3} \vec{a} \vec{b}.$$

Применяя эту формулу, найдем из (11) сечение $d\sigma_R$ излучения фотона, частота которого принадлежит интервалу $(\omega, \omega + d\omega)$, а волновой вектор \vec{k} относительного движения частиц лежит в элементе телесного угла $d\theta$, если выполняются неравенства $\varepsilon^{\frac{2}{3}} \ll E_z \ll \varepsilon L$,

$$d\sigma_R = \frac{2}{3\pi} \alpha^3 \frac{|\chi_{0z}|}{|k_{0z}|} \frac{k}{\chi_0} Z_1^2 Z_2^2 Z_m^2 |T_R|^2 \frac{d\omega}{\omega} d\omega,$$

где

$$|T_R|^2 = \frac{1}{4q_-^4} (q_-^2 + u_-^2) + \frac{i}{2q_-^2 q_+^2} \left\{ \left(e^{-i\gamma_1} h_- - h_-^* e^{i\gamma_1} \right) \bar{q}_- \bar{q}_+ + \right. \\ \left. + i \left(h_+^* e^{i\gamma_1} + h_+ e^{-i\gamma_1} \right) \bar{q}_- \bar{u}_+ + i \left(h_-^* e^{i\gamma_1} + h_- e^{-i\gamma_1} \right) \bar{q}_+ \bar{u}_- + \right. \\ \left. + \left(h_+^* e^{i\gamma_1} - h_+ e^{-i\gamma_1} \right) \bar{u}_+ \bar{u}_- \right\} + \\ + \frac{1}{q_+^4} \left\{ |h_-|^2 q_+^2 + |h_+|^2 u_+^2 + i \left(h_-^* h_+ - h_- h_+^* \right) \bar{q}_+ \bar{u}_+ \right\}.$$

Как и в предыдущем случае, использование (8) дает возможность записать $|T_R|^2$ в более наглядном виде:

$$|T_R|^2 = \frac{8\pi}{3} \left\{ \frac{1}{q_-^4} (q_-^2 + u_-^2) - \frac{1}{q_-^2 q_+^2} \times \right. \\ \times \left[\left(3\bar{u}_- \bar{u}_+ + \bar{q}_- \bar{q}_+ + \sqrt{3}\bar{q}_- \bar{u}_+ + \sqrt{3}\bar{q}_+ \bar{u}_- \right) \cos(2 \operatorname{Re} \alpha_1 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{|k_z|^3}{\varepsilon} \right) + \left(\sqrt{3}\bar{u}_- \bar{u}_+ - \sqrt{3}\bar{q}_- \bar{q}_+ - 3\bar{q}_- \bar{u}_+ + \bar{u}_- \bar{q}_+ \right) \times \\ \left. \times \sin \left(2 \operatorname{Re} \alpha_1 + \frac{2}{3} \frac{|k_z|^3}{\varepsilon} \right) \right] + \frac{1}{q_+^4} (q_+^2 + 2\sqrt{3}\bar{q}_+ \bar{u}_+ + 3u_+^2) \left. \right\},$$

позволяющем заметить осциллирующую структуру $d\sigma_R$.

Анализ полученных выражений проведем, построив численными методами (с использованием системы MATLAB 6) поверхности:

$$F_{\bar{n}}(\theta_F, \varphi_F) = \frac{\pi^2}{\alpha^3 (Z_1, Z_2, Z_m)^2} \frac{d\sigma_{\bar{n}}}{d\omega d\omega_F d\omega};$$

$$F_{\bar{n}}(\theta, \varphi) = \frac{\pi^2}{\alpha^3 (Z_1, Z_2, Z_m)^2} \frac{d\sigma_{\bar{n}}}{d\omega d\omega_F d\omega}.$$

и $F = \frac{\pi^2}{\alpha^3} \frac{1}{(Z_1 Z_2 Z_m)^2} \frac{d\sigma_R}{d\omega d\omega}$ для числовых значе-

ний параметров ω , θ_0 , θ_F , φ_F , в частности, совпадающих со значениями этих величин в работе [2], в которой были построены аналогичные поверхности (отличающиеся множителями $\sin\theta$, $\sin\theta_F$, но с действительными фазами $\alpha_{1,2}$ (рис. 1—3). Кроме того, на рис. 4 и 5 представ-

лены поверхности $F_{\bar{e}} = \frac{\pi^2}{\alpha^3 (Z_1, Z_2, Z_m)^2} \frac{d\sigma_{\bar{e}}}{d\omega d\omega d\omega_F}$

и их фрагменты, дающие представление об осцилляционной структуре сечения линейно поляризованного тормозного излучения при заданном волновом векторе фотона, при различных направлениях вектора поляризации.

На рис. 1, а показана функция $F_{\bar{n}}(\theta_F, \varphi_F)$ при значениях фиксированных параметров, совпадающих с [2]: $\theta_0 = 0,9$; $\theta = 1,07$; $\varphi = 0,36$; $\omega = 315$ (здесь и далее, если не оговорено особо, углы выражаются в радианах, а "атомная" единица частоты — $(e_m^2/\hbar a)$); $k_0 = 30$. Для более удобного сравнения этой поверхности с аналогичной функцией, построенной в работе [2] при $\alpha_{1,2} = \pi/4$, на рис. 1, б показана та же функция, но домноженная на $\sin\theta \sin\theta_F$.

Если сравнить эти рисунки с аналогичными рисунками работы [2], то нетрудно установить, что максимальные значения поверхности $F_{\bar{n}}(\theta_F, \varphi_F)$, построенной в настоящей работе при вышеуказанных θ и φ , приблизительно в 1,5—2 раза больше $F_{\bar{n}}(\theta_F, \varphi_F)$, представленной в [2]. Еще сильнее отличаются друг от друга функции $F_{\bar{n}}(\theta, \varphi)$. Так, максимальные значения этой поверхности, изображенной с ее фрагментом на рис. 1, в, г, приблизительно на порядок больше максимальных значений аналогичной поверхности, построенной в работе [2]. Кроме того, представленная здесь функция $F_{\bar{n}}(\theta, \varphi)$ имеет больший перепад своих значений между соседними минимумами и максимумами, чем подобная поверхность, найденная в [2]. Все это относится и к функции $F(\theta, \varphi)$ и ее фрагменту, изображенных на рис. 2, а и б, соответственно. Отметим также, что период $F(\theta, \varphi)$ в полтора-два раза больше периода аналогичной функции, построенной в [2], и $F_{\bar{n}}(\theta, \varphi)$.

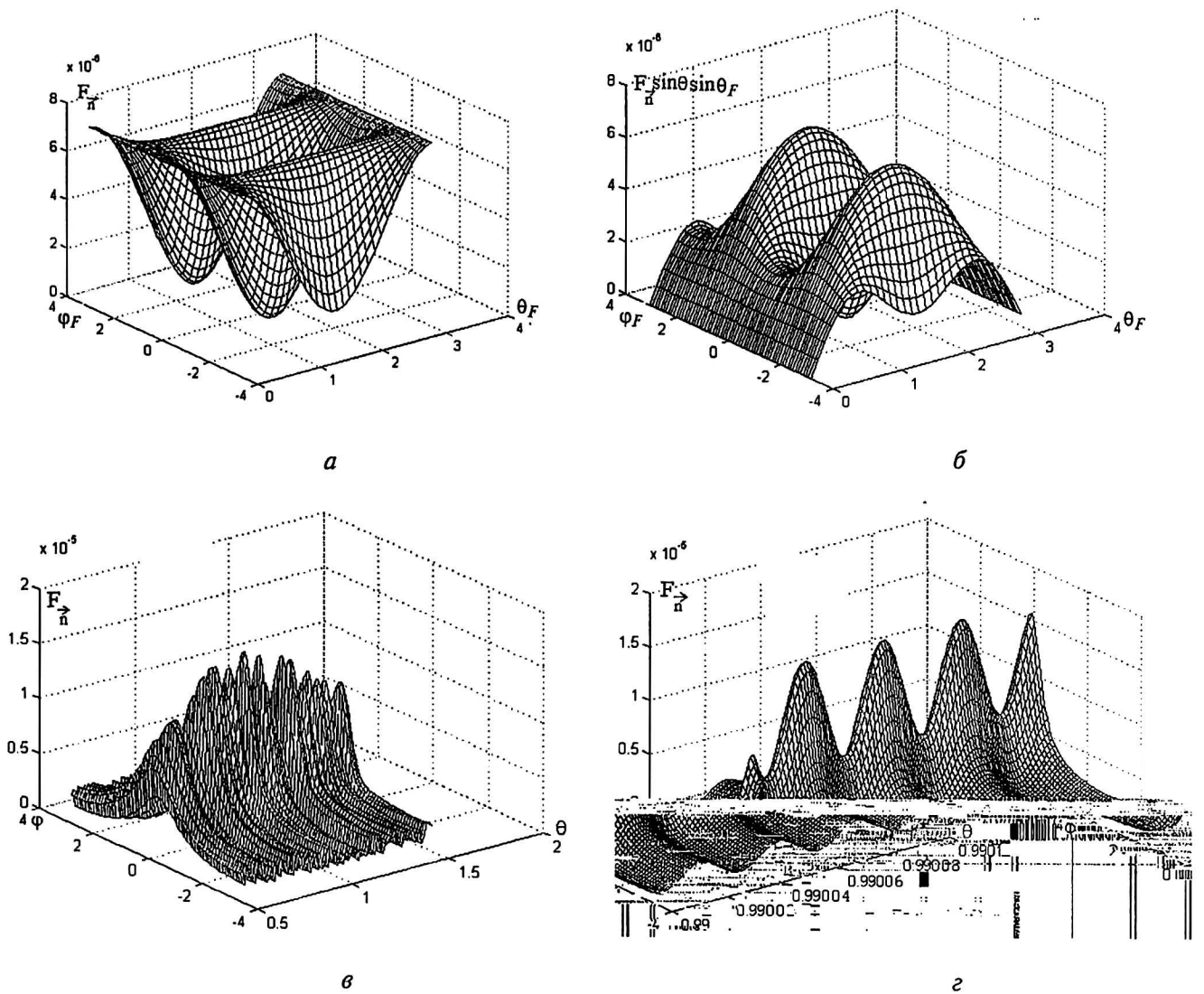


Рис. 1. Поверхности:

а — $F_{\vec{n}}(\theta_F, \varphi_F)$; б — $F_{\vec{n}}(\theta_F, \varphi_F) \sin \theta_F \sin \theta$ при $\theta_F \in (0; \pi)$, $\varphi_F \in (-\pi; \pi)$; $\theta_0 = 0,9$; $\theta = 1,07$; $\varphi = 0,36$; $\omega = 315$; $k_0 = 30$;
 в — $F_{\vec{n}}(\theta, \varphi)$; г — ее фрагмент на интервалах $\theta \in (0,54; 1,55)$, $\theta \in (0,99; 0,9901)$, соответственно,
 при $\theta_0 = 0,9$, $\varphi_F = -1,88$, $\theta_F = \pi$ и $\omega = 315$

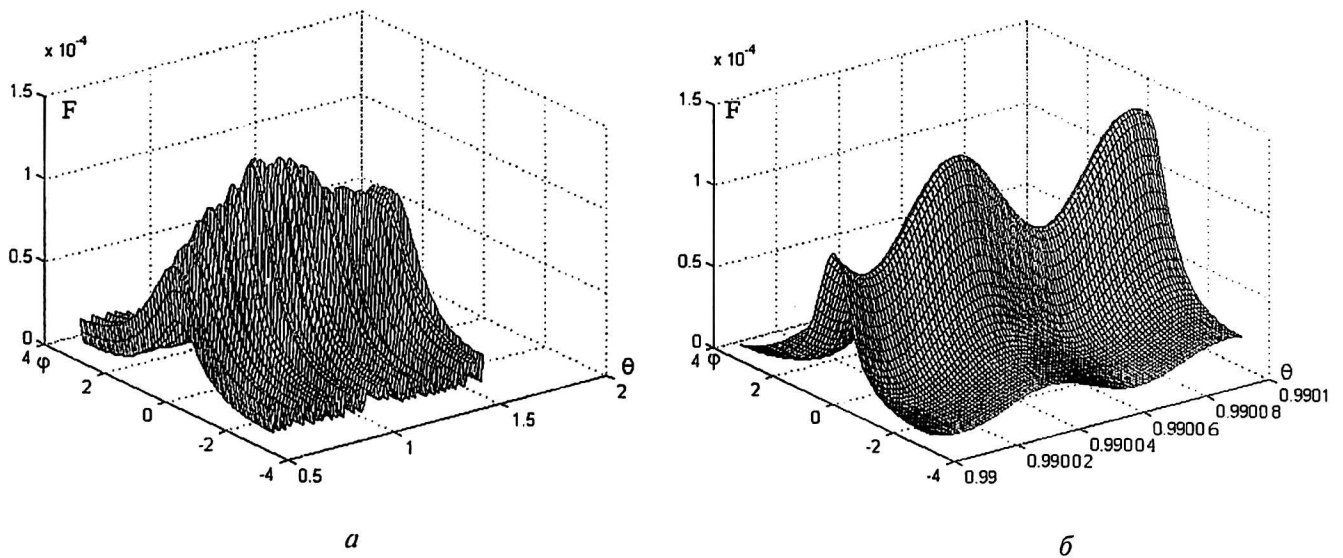


Рис. 2. Поверхность $F(\theta, \varphi)$ (а) и ее фрагмент (б) на интервалах $\theta \in (0,54; 1,55)$, $\theta \in (0,99; 0,9901)$, соответственно, при $\theta_0 = 0,9$ и $\omega = 315$

Поверхности, показанные на рис 1, в, 3, а—д, иллюстрируют зависимость функций $F_{\vec{n}}(\theta, \varphi)$ от направления вектора \vec{k}_F при фиксированных $\theta_0 = 0,9$ и $\omega = 315$. Так, из рис. 1, в и 3, а видно, что при заданном значении угла $\varphi_F = -1,88$ функции $F_{\vec{n}}(\theta, \varphi)$ незначительно отличаются при

величинах угла θ_F , равных $\pi/2$ (см. рис. 1, в) и 0 (см. рис. 3, а). Если же значение угла θ_F зафиксировано, то поверхность $F_{\vec{n}}(\theta, \varphi)$ заметно изменяется вместе с φ_F . Этот факт иллюстрируется рис. 3, б—д, на которых изображены $F_{\vec{n}}(\theta, \varphi)$ при $\theta_F = \pi/2$ и $\varphi_F = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

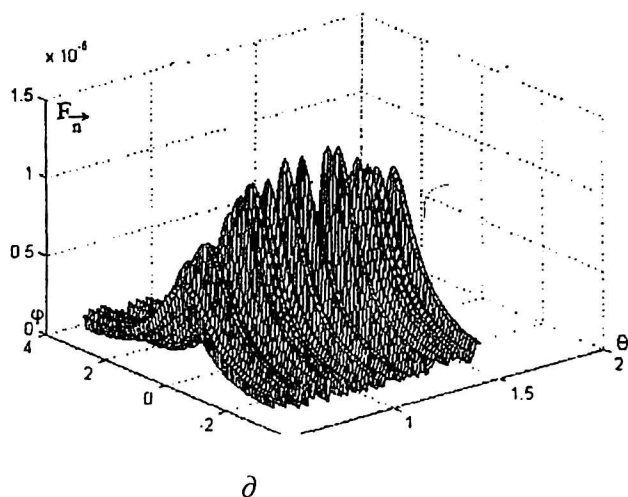
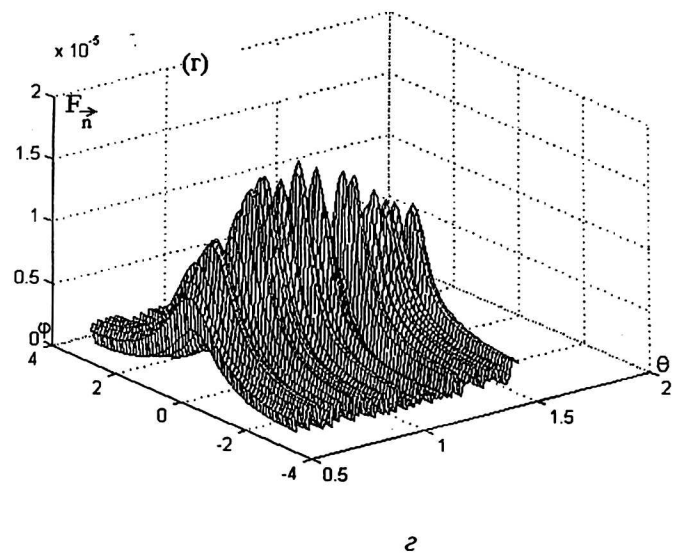
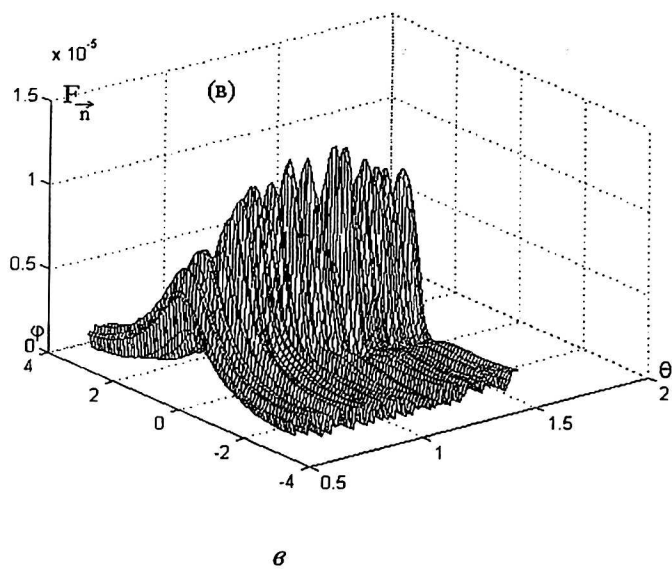
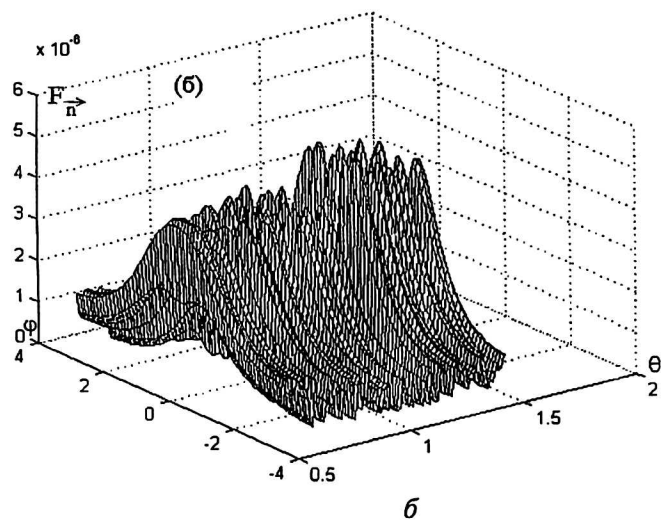
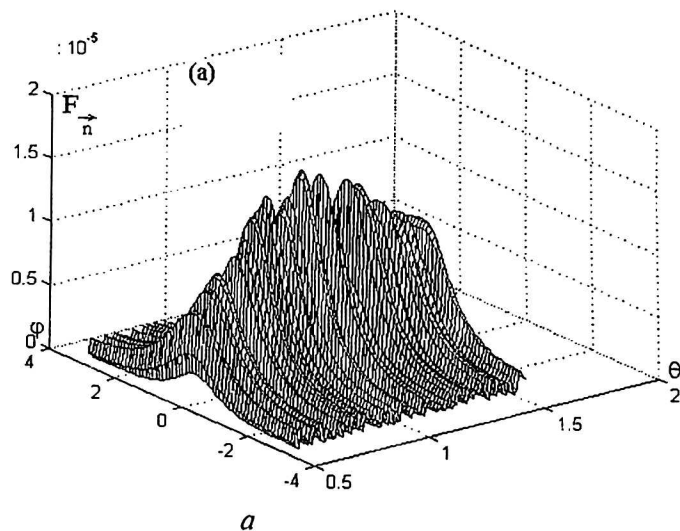
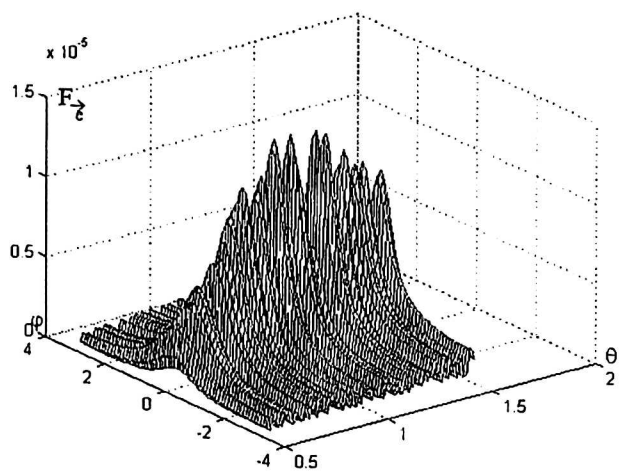


Рис. 3. Поверхности $F_{\vec{n}}(\theta, \varphi)$:

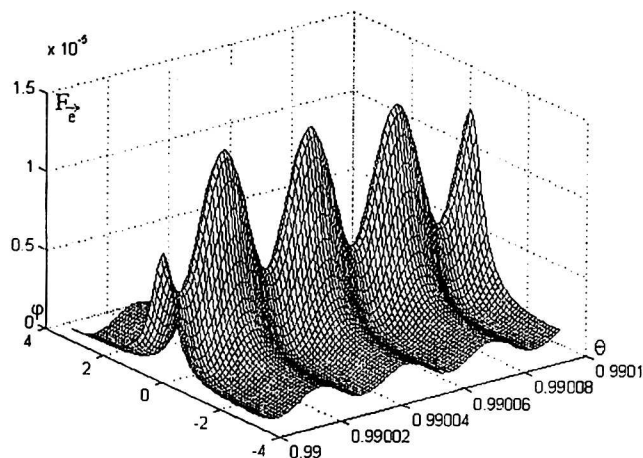
а — $\varphi_F = -1,88$, $\theta_F = 0$; б — при $\theta_F = \pi/2$ и $\varphi_F = 0$;
 в — при $\theta_F = \pi/2$ и $\varphi_F = \pi/4$; г — при $\theta_F = \pi/2$ и $\varphi_F = \pi/2$;
 д — при $\theta_F = \pi/2$ и $\varphi_F = 3\pi/4$.
 Для всех поверхностей $\theta_0 = 0,9$ и $\omega = 315$

Изменение функции $F_{\vec{e}}(\theta, \varphi)$ (вместе с ее фрагментом) при повороте вектора поляризации, т. е. варьировании угла $\varphi_{\vec{e}}$ с шагом $\pi/4$ от 0 до $3\pi/4$, когда волновой вектор фотона задан ($\theta_F = \pi/2$ и $\varphi_F = \pi/2$), показано на рис. 4, а—г и 5, а—г.

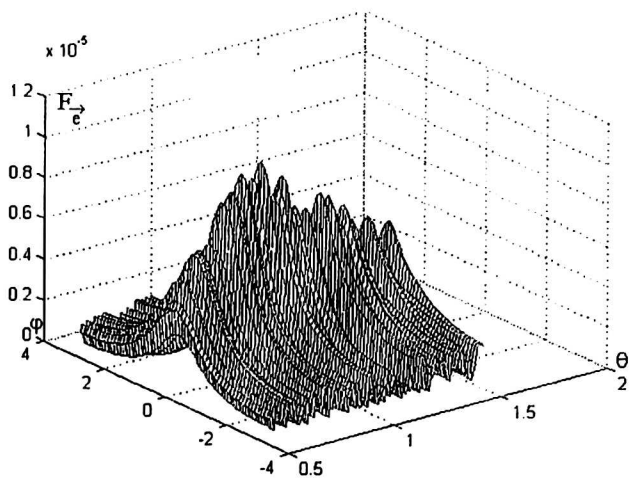
Нетрудно заметить, что при повороте вектора поляризации происходит как увеличение или уменьшение наибольших значений максимумов, так и смещение их вдоль осей θ и φ , а также появление новых (см. рис. 5, а, б) осцилляционных структур.



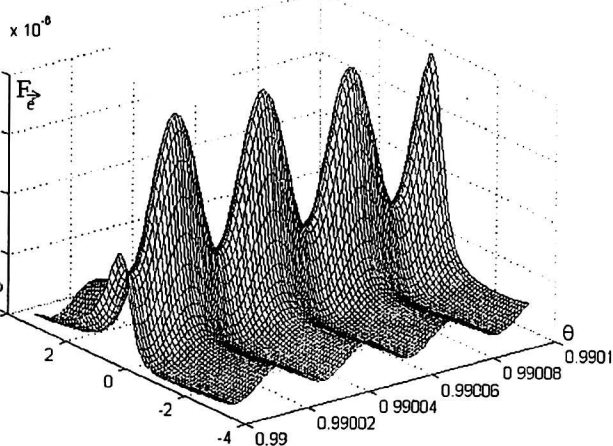
а



б



в



г

Рис. 4. Поверхности $F_{\vec{e}}(\theta, \varphi)$ и их фрагменты на интервалах $\theta \in (0,54; 1,55)$, $\theta \in (0,99; 0,9901)$, соответственно:
 а, б — при $\varphi_{\vec{e}} = 0$; в, г — при $\varphi_{\vec{e}} = \pi/4$ и $\omega = 315$. Для всех поверхностей $\theta_F = \pi/2$, $\varphi_F = \pi/2$, $\theta_0 = 0,9$, $\omega = 315$

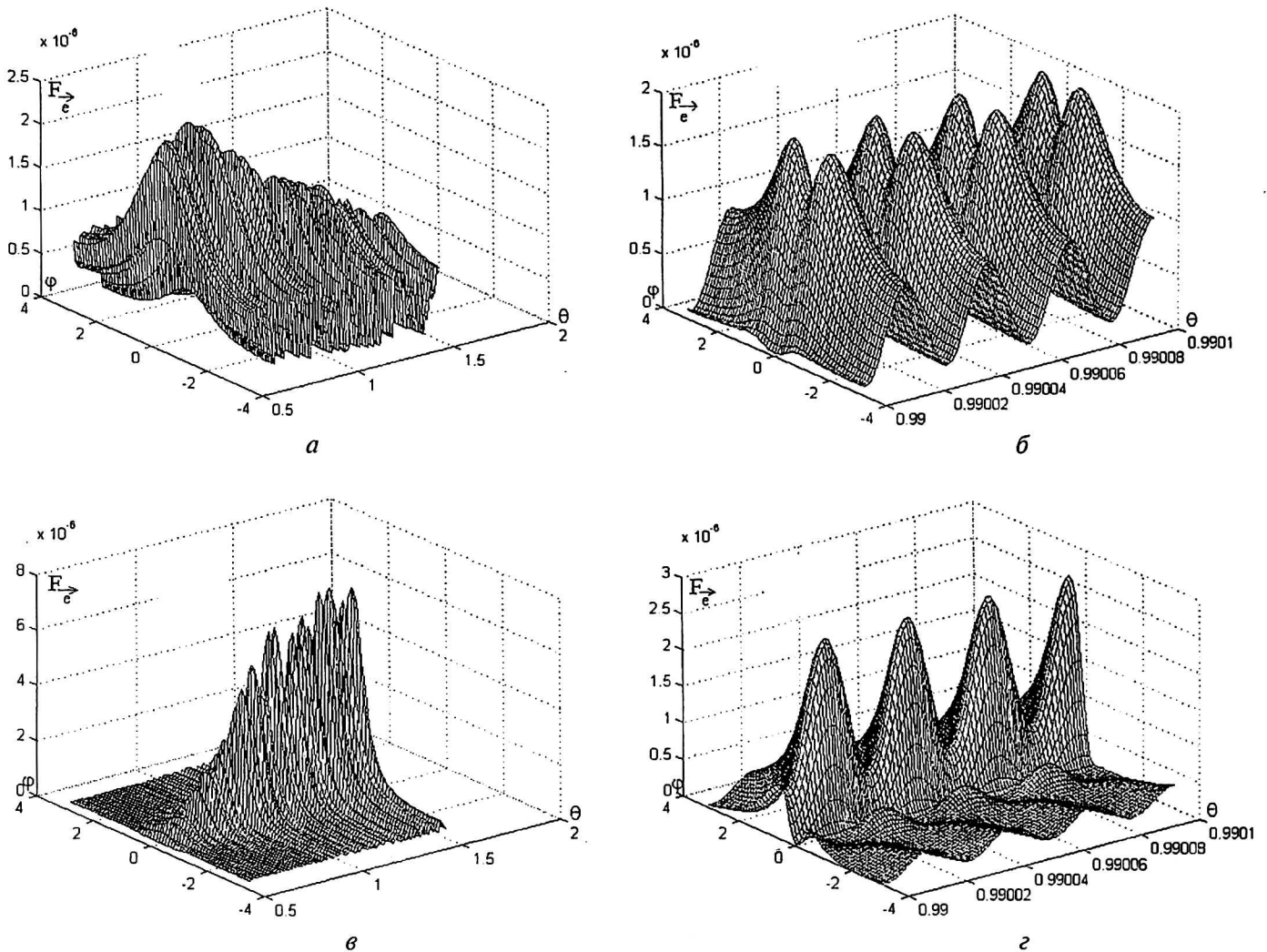


Рис. 5. Поверхности $F_e(\theta, \varphi)$ и их фрагменты на интервалах $\theta \in (0,54; 1,55)$,

$\theta \in (0,99; 0,9901)$, соответственно:

а, б — при $\varphi_e = \pi/2$; в, г — при $\varphi_e = 3\pi/4$. Для всех поверхностей $\theta_F = \pi/2$, $\varphi_F = \pi/2$, $\theta_0 = 0,9$, $\omega = 315$

Отметим, что условия применимости полученных здесь выражений должны включать неравенства [1—3], $E_z/e\epsilon \ll n^{-1/3}$ (n — концентрация рассеивающих тяжелых частиц) и $(mE_z)^{1/2}/e_m\epsilon \ll \tau$, которые соответствуют малости расстояния между рассеивающей частицей и точкой отражения (от потенциального барьера внешнего поля) легкой частицы и среднего времени прохождения ею этого расстояния, соответственно, по сравнению с расстоянием $n^{-1/3}$ между тяжелыми частицами и характерным временем задачи τ (для плазмы вместо $n^{-1/3}$ характерным размером задачи в данной теории, по-видимому, должна являться длина свободного пробега электрона).

Заключение

При выборе фаз (8), соответствующих, по-видимому, очевидным результатам упругого рассеяния заряженных частиц друг на друге, дифференциальные сечения тормозного излучения

сталкивающихся частиц в слабом внешнем электрическом поле могут заметно отличаться от подобных сечений с действительными фазами, которые были найдены и численно проанализированы в работах [1, 2]. Наиболее важным, на наш взгляд, отличием является увеличение максимальных значений и глубины осцилляций найденных сечений. Кроме того, использование (8) позволяет избавиться от неопределенности, отмеченной в [1], связанной с сильной зависимостью сечений как функций θ_F, φ_F от $\alpha_{1,2}$.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Рухадзе за внимание к работе.

Настоящие исследования поддержаны программой Министерства образования РФ "Федерально-региональная политика в науке и образовании"; подпрограмма 1; проект 1611.

Л и т е р а т у р а

1. Крылов В. И. Столкновения частиц во внешнем электрическом поле. — Хабаровск: Изд-во Хабаровского гос. пед. ун-та, 1999. — 347 с.
2. Крылов В. И., Пивкин В. В. Анализ дифференциального сечения тормозного излучения, возникающего при столкновении двух заряженных частиц в однородном электрическом поле// Физика плазмы. 2000. Т. 26. № 8. С. 737—746.

3. Крылов В. И. К вопросу о сечениях упругих и неупругих столкновений электронов с водородоподобным атомом во внешнем электрическом поле// Прикладная физика. 2003. Вып. 4. С. 5—11.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974. — 752 с.
5. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989. — 723 с.

The cross-sections of a bremsstrahlung and elastic collisions of the charged particles in an external electric field

V. I. Krylov

The Khabarovsk State Pedagogical University, Khabarovsk, Russia

On the base of the analysis of elastic collisions of charged particles in an external electrical field the fitting parameters were determined. These parameters determine an earlier found cross-sections of a bremsstrahlung of charged particles the in such a field. This allowed to exclude (in a selected approximation) indefiniteness in these cross-sections. It is shown, that the cross-sections of a bremsstrahlung, with the found complex parameters have larger magnitude and larger amplitudes of oscillations as compared to the cross sections, numerically analyzed in earlier published works, in which the fitting parameters had the real values.