Общая физика

УДК 537.3

Неклассические флуктуации заряда в электрических цепях в условиях термодинамического равновесия

Б. А. Векленко
Институт высоких температур РАН, Москва, Россия,
Ю. Б. Шеркунов
Институт теплофизики экстремальных состояний ОИВТ РАН, Москва, Россия

Показано, что квантовые поправки к классическим флуктуациям заряда в электрических цепях в условиях термодинамического равновесия не зависят от джоулева сопротивления. Они определяются произведением постоянной Планка $\hbar$, умноженной на величину, формируемую выражением, названным в работе вторым сопротивлением и имеющим отличную от стандартного сопротивления температурную зависимость. Квантовые добавки ко второму сопротивлению обладают вакуумной природой и осуществляют во флуктуацию заряда вклад, пропорциональный $\hbar^2$. Эти свойства не отражает квантовая формула Найквиста, таким образом оказывающаяся несостоятельной уже в первом порядке разложения по постоянной Планка.

Предметом настоящего исследования служит противоречие между квантовой формулой Найквиста [1], записанной здесь с учетом вакуумного слагаемого без использования симметризации

$$<\varepsilon^2>_\omega=\int_{-\infty}^{\infty}<\varepsilon(t)\varepsilon(0)>e^{i\omega t}dt=$$
$$=\hbar\omega\left(1+\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)2R,\quad -\infty<\omega<\infty, \tag{1}$$

и следствиями начал термодинамики. Формула (1) описывает, в частности, усредненные по статистическому ансамблю флуктуации электродвижущей силы $\varepsilon(t)$ в последовательном (R, L, C)-контуре в условиях термодинамического равновесия. Через R, L и C обозначены, соответственно, сопротивление, индуктивность и емкость колебательного контура.

Суть противоречий заключается в следующем. С помощью (1) нетрудно получить выражение для спектра флуктуаций заряда на конденсаторе

$$<q^2>_\omega=\frac{<\varepsilon^2>_\omega}{\omega^2|z(\omega)|^2}=$$
$$=\hbar\omega\left(1+\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)\frac{2R}{\left(\omega^2L-\frac{1}{C}\right)^2+\omega^2R^2}. \tag{2}$$

Здесь $z(\omega)=R-i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ — импеданс цепи.

Формула (2) имеет, казалось бы, достаточно серьезное обоснование, поскольку следует из флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ)

$$<q^2>_\omega=-i\hbar\left(1+\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)\left[G_r(\omega)-G_r^*(\omega)\right], \tag{3}$$

справедливость которой сомнений не вызывает, и выражения для гриновской функции

$$G_r(\omega)=\frac{1}{-\omega^2L-i\omega R+\frac{1}{C}}, \tag{4}$$

представляющей следствие закона Ома

$$L\frac{d^2G_r(t-t')}{dt^2}+R\frac{dG_r(t-t')}{dt}+\frac{1}{C}G_r(t-t')=\delta(t-t').$$

Из (3) и (4) следует (2), причем средний квадрат флуктуации заряда $\overline{q^2}=<q(t)q(t)>$ на конденсаторе оказывается равным

$$\overline{q^2}=\frac{\hbar R}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}\right)\frac{\omega d\omega}{\left(\omega^2L-\frac{1}{C}\right)^2+\omega^2R^2} \tag{5}$$

и очевидным образом зависящим от сопротивления R. Такая зависимость от R, как показал Горелик [2], находится в противоречии с началами термодинамики. При $\hbar \to 0$ из (5) имеем

$$\overline{q^2} = CT .$$

Таким образом, противоречие возникает лишь в теории квантовых флуктуаций. Но здесь это противоречие носит принципиальный характер, поскольку аналогичные вопросы возникают в оптических флуктуациях, теории ван-дер-ваальсовых сил и т.д. По этой причине данный вопрос неоднократно дискутировался в литературе [3—5], но полной ясности до сих пор нет. Конечно, возникают сомнения в возможности приложения к (R, L, C)-контуру термодинамических соображений [3]. Но с большим основанием можно подвергнуть сомнению предположение о том, что средние электрические величины в контуре и их квантовые флуктуации описываются набором одних и тех же параметров R, L и C. В квантовой физике мы имеем дело с волновой функцией системы, и представляется удивительным, что параметры, определяющие математическое ожидание, и методы статистической физики оказываются достаточными для расчета дисперсии системы без обращения к уравнению Шредингера. В лучшем случае на этом пути можно найти лишь часть дисперсии, обусловленную статистическими причинами.

С другой стороны, в пользу формулы (5) свидетельствует, казалось бы, ФДТ (3). Но доказательство этой теоремы опирается на точные волновые функции, не содержащие релаксационных констант, к каковым относится параметр R. Если в правую часть формулы ФДТ подставить точные квантовые функции Грина $G_r(\omega)$, то получим, разумеется, точное значение $\overline{q^2}$. Но сам факт возникновения релаксационных параметров представляет собой следствие некоторых приближений [5]. Теперь не ясно, как поведет себя ФДТ при использовании в ее правой части функции $G_r(\omega)$ с диссипативными параметрами. Этот открытый вопрос в настоящее время широко обсуждается в литературе [6—9].

Вопрос о корректности формулы (3) можно решить лишь путем прямого, не зависящего от ФДТ расчета коррелятора $\langle q(t)q(t) \rangle$. До настоящего времени попытки такого расчета осуществлялись путем сведения на базе феноменологических соображений расчета $\overline{q^2}$ к модели идеальных квантовых осцилляторов [3—5]. Как мы увидим ниже, на этом пути решить проблему принципиально не удается.

Возможность независимого от ФДТ расчета $\overline{q^2}$ методом статистической физики появилась в результате разработки теории Г-операторов [10], первоначально предложенной для иных целей. Этот метод в виде, применяемом в настоящей работе, излагается в [11].

Отметим, что квантовый вариант формулы Найквиста должен следовать из последовательной квантовой теории. Для этого прежде всего надлежит квантовым образом описать эволюцию кинетических процессов в (R, L, C)-контуре. Джоулево сопротивление в такой системе появится в результате взаимодействия ее с окружающим резервуаром. Пусть матрица плотности $\tilde{\rho}$ описывает полную систему — электрический контур+резервуар, и пусть $\hat{q}$ — квантовый оператор заряда на конденсаторе. Тогда

$$\overline{q^2} = Sp\,\hat{q}\hat{q}\tilde{\rho} . \tag{6}$$

Поскольку оператор $\hat{q}$ аргументов резервуара не содержит, то в (6) по этим аргументам можно выполнить суммирование. Найдем

$$\overline{q^2} = Sp\,\hat{q}\hat{q}\rho . \tag{7}$$

$$\rho = Sp_R\tilde{\rho} . \tag{8}$$

При этом в (7) суммирование выполняется по квантовым аргументам электрического контура, в то время как в (8) — по аргументам резервуара. Метод Г-операторов позволяет развить технику расчета (8). Он обладает рядом достоинств, которые ниже будут особо отмечены, по сравнению с другими методами, преследующими ту же цель.

Предварительно опуская R, переходим к квантовому описанию (L, C)-контура.

Квантовое описание электрического контура

Стандартное уравнение для заряда на конденсаторе выглядит так:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}q(t) = 0 . \tag{9}$$

Решением этого уравнения служит функция

$$q(t) = \gamma\left(\alpha e^{-i\omega_0 t} + \alpha^* e^{i\omega_0 t}\right); \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \tag{10}$$

где γ и α — некоторые константы.

Полная энергия в контуре может быть найдена следующим образом:

$$E = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{\gamma^2}{2C}\left(\alpha\alpha^* + \alpha^*\alpha\right).$$

Такая запись удобна для дальнейших манипуляций. Переход к квантовому описанию заряда осуществляется заменой

$$\alpha \to \hat{\alpha}, \quad \alpha^* \to \hat{\alpha}^+, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0 C}{2}}.$$

Операторы $\hat{\alpha}$ и $\hat{\alpha}^+$ подчиняются коммутационному соотношению $[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^+] = 1$.

При этом

$$E \to \hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\left(\hat{\alpha}\hat{\alpha}^+ + \hat{\alpha}^+\hat{\alpha}\right),$$

где $\hat{H}_0$ — гамильтониан квантового осциллятора. Такая процедура квантования полностью аналогична процедуре квантования электромагнитного поля в вакууме [12]. Если считать, что $\hbar \to 0$, то построенная выше квантовая теория возвращается к исходной теории, опирающейся на уравнение (9). Теперь на смену выражению (10) приходит операторное выражение

$$\hat{q}(t) = \gamma\left(\hat{\alpha}\, e^{-i\omega_0 t} + \hat{\alpha}^+ e^{i\omega_0 t}\right). \tag{11}$$

Рассмотрим коррелятор $<\hat{q}(t)\hat{q}(t')>$, где усреднение осуществляется как в квантовом, так и в статистическом смысле. Непосредственная проверка показывает, что образ преобразования Фурье этого коррелятора выглядит так:

$$\begin{aligned} <\hat{q}\hat{q}>_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} <\hat{q}(t)\hat{q}(t')> d(t-t') = \\ &= \pi C\hbar\omega_0\left[\left(<\hat{N}>+1\right)\delta(\omega-\omega_0) + <\hat{N}>\delta(\omega+\omega_0)\right], \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\hat{N} = \hat{\alpha}^+\hat{\alpha}.$$

С другой стороны, если ввести запаздывающую и опережающую функции Грина, удовлетворяющие уравнению

$$L\frac{d^2G_{r,a}(t-t')}{dt^2} + \frac{1}{C}G_{r,a}(t-t') = \delta(t-t'),$$

то их Фурье-образы

$$G_{r,a}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 L + \frac{1}{C} \mp i0\omega}, \qquad G_r(\omega) = G_a^*(\omega)$$

оказываются связанными между собой соотношением

$$G_r(\omega) - G_a(\omega) = \frac{i\pi}{\omega_0 L}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right]. \tag{13}$$

Сопоставление (12) и (13) показывает, что

$$\begin{aligned} <\hat{q}\hat{q}>_\omega &= -i\hbar\left[<\hat{N}(\omega)>+1\right]\left[G_r(\omega) - G_a(\omega)\right], \quad \omega > 0; \\ <\hat{q}\hat{q}>_\omega &= i\hbar <N(-\omega)>\left[G_r(\omega) - G_a(\omega)\right], \quad \omega < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

В случае термодинамического равновесия

$$\begin{aligned} <\hat{N}(\omega)> &= \left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1\right)^{-1}, \\ <\hat{N}(-\omega)> &= -\left(1 + <\hat{N}(\omega)>\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Совокупность равенств (14) представляет собой содержание флуктуационно-диссипационной теоремы [13—14], позволяющей выражать описывающий шум коррелятора $<\hat{q}\hat{q}>_\omega$ через гриновские функции $G_{r,a}$. Достоинство ФДТ состоит в том, что справедливость формул (14) не нарушается при включении в системе любых дополнительных взаимодействий заряда $q(t)$ с резервуаром, описываемых некоторым гамильтонианом. Такое обобщение можно выполнить методом, указанным в [14].

Обе формулы (14) удается объединить в одну, что влечет за собой формулу (3).

Эволюция средних величин

Наличие активного сопротивления в контуре мы учтем, предположив взаимодействие заряда $\hat{q}$ с внешним по отношению к контуру резервуаром. При этом резервуар будем также описывать квантовым образом. За взаимодействие контура с резервуаром пусть отвечает гамильтониан взаимодействия $\hat{H}'$ так, что полный гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_i \varepsilon_i\, \hat{\beta}_i^+ \hat{\beta}_i + \hat{H}' - \hat{q}\,\varepsilon(t). \tag{16}$$

Будем считать, что резервуар представляет собой газ из бозе-частиц и

$$\hat{H}' = -g\int \hat{\psi}^{+}(x)\hat{P}\hat{q}\hat{\psi}(x)dx\,,$$

где

$$\hat{\psi}(x) = \sum_i \psi_i(x)\hat{\beta}_i\,; \quad \hat{\psi}^{+}(x) = \sum_i \psi_i^{*}(x)\hat{\beta}_i^{+}\,;$$

$$\hat{q} = \gamma\left(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^{+}\right),$$

причем $\hat{\beta}_i$ и $\hat{\beta}_i^{+}$ — операторы уничтожения и рождения частиц резервуара в состоянии ψ_i с энергией ε_i такие, что

$$\left[\hat{\beta}_i,\ \hat{\beta}_i^{+}\right] = \delta_{ij}\,.$$

Через g обозначена константа взаимодействия, $\hat{P}$ — некоторый эрмитовый оператор, $\varepsilon(t)$ — электродвижущая сила в (R, L)-контуре.

Нам понадобятся уравнения движения для гейзенберговых операторов $\check{\alpha}(t)$ и $\check{\beta}_i(t)$. Стандартным образом находим, что

$$i\hbar\frac{d\check{\alpha}(t)}{dt} = \left[\check{\alpha},\ \check{H}\right] = \hbar\omega_0\check{\alpha}(t) - g\gamma\sum_{ij} P_{ij}\check{\beta}_i^{+}(t)\check{\beta}_i(t) - \gamma\varepsilon(t)\,; \tag{17}$$

$$i\hbar\frac{d\check{\beta}_j(t)}{dt} = \left[\check{\beta}_i,\ \check{H}\right] = \varepsilon_j\check{\beta}_j(t) - g\gamma\sum_i P_{ji}\left(\check{\alpha}(t) + \check{\alpha}^{+}(t)\right)\check{\beta}_i(t)\,,$$

где

$$P_{ij} = P_{ji}^{*} = \int \psi_i^{*}\hat{P}\psi_j dx\,.$$

Используя операцию эрмитового сопряжения, получаем уравнения для операторов $\check{\alpha}^{+}(t)$ и $\check{\beta}_i^{+}(t)$. Для входящего в (17) произведения операторов $\check{\beta}_i^{+}(t)\check{\beta}_j(t)$ уравнение движения выглядит так:

$$i\hbar\frac{d\check{\beta}_i^{+}(t)\check{\beta}_j(t)}{dt} = -\omega_{ij}\check{\beta}_i^{+}(t)\check{\beta}_j(t) + g\gamma\sum_{j'} P_{j'i}\check{\beta}_{j'}^{+}(t)\check{\beta}_j(t)\left(\check{\alpha}(t) + \check{\alpha}^{+}(t)\right) - g\gamma\sum_{i'} P_{ji'}\check{\beta}_i^{+}(t)\check{\beta}_{i'}(t)\left(\check{\alpha}(t) + \check{\alpha}^{+}(t)\right), \tag{18}$$

$$\omega_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j\,.$$

В уравнениях (17) и (18) осуществляем усреднение как в квантовом, так и в статистическом смысле. В возникшем таким образом из (18) уравнении осуществляем разрыв корреляторов

$$<\check{\beta}_{j'}^{+}(t)\check{\beta}_j(t)\check{\alpha}(t)> = \delta_{jj'}N_j <\check{\alpha}(t)>;$$

$$<\check{\beta}_{j'}^{+}(t)\check{\beta}_j(t)\check{\alpha}^{+}(t)> = \delta_{jj'}N_j <\check{\alpha}^{+}(t)>,$$

причем $N_i = <\check{\beta}_i^{+}(t)\check{\beta}_i(t)>$ — средние числа заполнения состояний ψ_i. Система уравнений (17)—(18) оказывается замкнутой. После преобразования Фурье находим, что

$$<\check{q}(\omega)> = -\frac{\varepsilon(\omega)}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2\omega_0}{\hbar}\pi_r(\omega)\right)}, \tag{19}$$

где

$$\pi_r(\omega) = -g^2\gamma^2\sum_{ij}\left|P_{ij}\right|^2\frac{N_i - N_j}{\hbar\omega - \hbar\omega_{ij} + i0}. \tag{20}$$

Появление $i0$ в знаменателе (20) связано с выбором запаздывающего характера решения.

Сравнивая (19) с решением

$$q(\omega) = -\frac{\varepsilon(\omega)}{L\left(\omega^2 - \omega_0^2 + i\frac{R}{L}\omega\right)}$$

стандартного уравнения, описывающего поведение заряда на конденсаторе в (R, L, C)-контуре с электродвижущей силой $\varepsilon(t)$, видим, что

$$\pi_r(\omega) = -i\frac{\hbar\omega}{2\omega_0 L}R\,.$$

Это равенство лучше переписать так

$$\mathrm{Im}\,\pi_r(\omega) = -\frac{\hbar\omega}{2\omega_0 L}R\,, \tag{21}$$

имея в виду, что $\operatorname{Re}\pi_r(\omega)$ осуществляет добавку к ω_0^2, которой будем пренебрегать. Таким образом, роль активного сопротивления выполняет мнимая часть поляризационного оператора $\pi_r(\omega)$.

Сравнивая формулы (20) и (19) с учетом явного выражения для γ, убеждаемся в отсутствии зависимости сопротивления R от параметров контура L и C.

Согласно (21) оказывается, что $\pi_r(\omega)\sim\hbar$, если считать, что сопротивление контура R имеет классическую природу и не обращается в ноль при $\hbar\to 0$. Такое предположение согласуется с пропорциональностью

$$\left|P_{ij}\right|^2\sim\hbar,$$

что легко проверяется на модели квантового осциллятора, если считать, что $\hat{P}=-i\hbar\frac{d}{dx}$.

Возникает вопрос: может ли сопротивление R в виде (21) участвовать в формуле (5) и не противоречит ли это теореме Горелика? Ответ неочевиден. Дело в том, что поляризационный оператор $\pi_r(\omega)$ в силу причинных свойств представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости комплексного ω и потому при вещественном аргументе обладающую свойством

$$\operatorname{Im}\pi_r(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}\pi_r(\omega')d\omega'}{\omega-\omega'}.$$

Это означает, что $\operatorname{Im}\pi_r(\omega)$ существует лишь постольку, поскольку существует $\operatorname{Re}\pi_r(\omega)$. Последняя же согласно (19) осуществляет добавку к ω_0^2, т. е. в конечном счете к L и С. Таким образом, величина R оказывается связанной с изменениями параметров L и C. При доказательстве теоремы Горелика параметры R, L и C считаются взаимно независимыми.

В действительности ситуация оказывается сложнее. Как показывает дальнейший анализ, даже в виде (21) джоулево сопротивление R в формуле (5) участвовать не может.

Переходим к непосредственному расчету коррелятора $<\check{q}(t)\check{q}(t)>$ без использования ФДТ.

Метод Г-операторов

Независимый от ФДТ расчет коррелятора $<\check{q}(t)\check{q}(t)>$ в условиях термодинамического равновесия осуществим методом Г-операторов, предложенным в [11]. В интересующей нас одномерной ситуации с гамильтонианом (16) этот метод существенно упрощается. Изложим его основы, акцентируя существенные для нас аспекты.

Вместо стандартного пространства чисел заполнения с базисными волновыми функциями

$$\frac{\left(\hat{\alpha}\right)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle=|N\rangle \tag{22}$$

используется вспомогательное Г-пространство, волновые функции (22) в котором выглядят так:

$$\hat{A}^+(N)\ \rangle_\Gamma^0 . \tag{23}$$

Через $\rangle_\Gamma^0$ обозначена волновая функция вакуума в Г-пространстве. Оператор $\hat{A}^+(N)$ порождает состояние сразу с N частицами. Отсюда ясно, что состояния типа $\hat{A}^+(N)\hat{A}^+(N)\ \rangle_\Gamma^0$ в теории встречаться не могут, поэтому конкретные перестановочные свойства вспомогательных операторов $\hat{A}^+(N)$ и $\hat{A}(N)$ на результатах расчетов не отразятся. Будем считать, что

$$\left[\hat{A}(N),\ \hat{A}^+(N')\right]=\delta_{NN'}.$$

Волновые функции (22) и (23) описывают один и тот же набор частиц и потому физически эквивалентны. Математическое их соответствие осуществляет некоторый унитарный оператор $\hat{O}$. Нам будет удобно волновые функции (22) представить в виде волновых функций квантового осциллятора $\varphi_N(\xi)$ и иметь в виду представление, в котором

$$\hat{\alpha}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi-\frac{\partial}{\partial\xi}\right),\qquad \hat{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\right).$$

Переменная ξ имеет определенный физический смысл, который в нашей работе не играет роли. Построим операторы

$$\hat{O}=\hat{\Phi}^+(\xi)\ \rangle_\Gamma^0,\qquad \hat{\Phi}(\xi)=\sum_N A(N)\varphi_N(\xi). \tag{24}$$

Тогда

$$\hat{O}\,\varphi_{N_0}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{\Phi}^{+}(\xi)\,\rangle_\Gamma^0\varphi_{N_0}(\xi)d\xi=\hat{A}^{+}(N_0)\,\rangle_\Gamma^0\,;$$

$$\hat{O}^{+}\,\hat{A}^{+}(N_0)\,\rangle_\Gamma^0={}_\Gamma^0\langle\;\hat{\Phi}(\xi)\,\hat{A}^{+}(N_0)\,\rangle_\Gamma^0=\varphi_{N_0}(\xi)\,.$$

Теперь любая волновая функция фотонов $f(\xi)$в Г—пространстве выглядит так:

$$\rangle_\Gamma=\hat{O}\,f(\xi)\,.$$

Среднее значение любого оператора, например $\hat{q}(\xi,\xi')$, может быть вычислено с помощью волновых функций в Г-пространстве. Очевидно, что в Г-пространстве

$$\hat{q}_\Gamma=\int\hat{\Phi}^{+}(\xi)\,\rangle_\Gamma^0\,\hat{q}(\xi,\xi')\,{}_\Gamma^0\langle\;\hat{\Phi}(\xi')d\xi\,d\xi'=$$

$$=\int\hat{\Phi}^{+}(\xi)\hat{q}(\xi,\xi')\hat{\Phi}(\xi')d\xi\,d\xi'\,.$$

В частности, в Г-представлении гамильтониан (16) при $\varepsilon=0$ оказывается равным

$$\hat{H}_\Gamma=\sum_N\varepsilon(N)\hat{A}^{+}(N)\hat{A}(N)+\sum_i\varepsilon_i\,\hat{\beta}_i^{+}\,\hat{\beta}_i-$$

$$-g\int\hat{\Phi}^{+}(\xi)\hat{\psi}^{+}(x)\hat{P}\,\hat{q}\,\hat{\psi}(x)\hat{\Phi}(\xi)d\xi\,dx,\;\;\varepsilon(N)=\hbar\omega_0 N\,.$$

Здесь учтена диагональность операторов $\hat{P}$ и $\hat{q}$. Например,

$$\hat{q}(\xi,\xi')=\gamma\left(\hat{\alpha}+\hat{\alpha}^{+}\right)\delta(\xi-\xi')\,,$$

в $\varepsilon(N)$ мы опустили вакуумное слагаемое, не сказывающееся на результатах расчетов.

Если обозначить через $<\hat{s}_\Gamma>_\Gamma$ результат усреднения произвольного оператора $\hat{s}_\Gamma$ по квантовому состоянию $\rangle_\Gamma$, включающему любые взаимодействия с резервуаром, и провести дальнейшее статистическое усреднение с матрицей плотности $\tilde{\rho}$

$$<\hat{s}>=Sp\tilde{\rho}<\hat{s}_\Gamma>_\Gamma=$$

$$=Sp\tilde{\rho}\int\left\langle\hat{\Phi}^{+}(\xi)\hat{s}(\xi,\xi')\hat{\Phi}(\xi')\right\rangle_\Gamma d\xi d\xi'\,,$$

то результат может быть представлен в виде

$$<\hat{s}>=\iint\hat{s}(\xi,\xi')\rho(\xi',\xi)d\xi d\xi'\,,\qquad(25)$$

где

$$\rho(\xi',\xi)=Sp\tilde{\rho}\langle\hat{\Phi}^{+}(\xi)\hat{\Phi}(\xi')\rangle_\Gamma\,.\qquad(26)$$

Раз оператор $\hat{s}(\xi,\xi')$ произволен, то $\rho(\xi',\xi)$ представляет собой матрицу плотности изучаемой подсистемы. В данном случае подсистемой служит $(R,\,L)$-контур, сколь угодно сильно взаимодействующий со своим окружением.

В состоянии термодинамического равновесия матрица $\tilde{\rho}$ определяется распределением Гиббса и имеет вид

$$\tilde{\rho}=\exp\frac{\Omega-\hat{H}-\mu\hat{N}_R}{T}\,;\qquad\hat{N}_R=\sum_i\hat{\beta}_i^{+}\,\hat{\beta}_i\,.$$

Все величины здесь имеют стандартное значение, $\hat{N}_R$ — оператор числа частиц резервуара; Ω и μ, — соответственно, термодинамический и химический потенциалы.

С помощью матрицы (26) интересующий нас усредненный квадрат заряда в согласии с (25) находится следующим образом:

$$<\hat{q}^2>=\iiint\hat{q}(\xi,\,\xi'')\hat{q}(\xi'',\,\xi')\rho(\xi',\,\xi)d\xi d\xi' d\xi''\,.$$

Метод температурных функций Грина

Прежде всего в (26) нам будет удобно перейти от переменных ξ и ξ' к переменным N и N' с помощью функций квантового осциллятора

$$\rho(N',N)=\iint\varphi_{N'}(\xi')\rho(\xi',\xi)\varphi_N(\xi)d\xi d\xi'\,.\qquad(27)$$

Легко выписывается обратное преобразование. Конструкция (27) может быть рассчитана с помощью мацубаровских функций Грина [15, 16]. Введем функцию

$$D(N,\tau;N',\tau')=-Sp\,\hat{T}_\tau\,\hat{A}(N,\tau)\hat{\bar{A}}(N',\tau')\,,\qquad(28)$$

где $\hat{T}_\tau$ — хронологический оператор по параметру τ. Под символом Sp здесь понимается усреднение как в квантовом, так и в статистическом смысле. Гейзенберговские операторы $\check{A}(N,\tau)$ и $\check{\bar{A}}(N,\tau)$ строятся следующим образом:

$$\check{A}(N,\tau)=\exp\left[\left(\hat{H}-\mu\hat{N}_R\right)\tau\right]\hat{A}(N)\exp\left[-\left(\hat{H}-\mu\hat{N}_R\right)\tau\right];$$
$$\check{\bar{A}}(N,\tau)=\exp\left[\left(\hat{H}-\mu\hat{N}_R\right)\tau\right]\hat{A}^{+}(N)\exp\left[-\left(\hat{H}-\mu\hat{N}_R\right)\tau\right]. \quad (29)$$

Параметр τ считается положительным. Искомая матрица плотности (27) находится как

$$D\to-\rho(N',N)=-\delta(N-N')\rho(N)$$
$$\tau'\to\tau+0\,. \quad (30)$$

Для вычисления (28) переходим к мацубаровскому представлению взаимодействия. В этом представлении определяем операторы $\hat{A}(N,\tau)$ и $\hat{\bar{A}}(N,\tau)$ с помощью формул (29), в которых полный гамильтониан $\hat{H}$ заменен на гамильтониан

$$\hat{H}_0=\sum_N\varepsilon(N)\hat{A}^{+}(N)\hat{A}(N)+\sum_i\varepsilon_i\,\hat{\beta}_i^{+}\,\hat{\beta}_i\,.$$

Для невзаимодействующих систем

$$\hat{A}(N,\tau)=\hat{A}(N)\exp(-\hbar\omega_0N\tau)\,;$$
$$\hat{\bar{A}}(N,\tau)=\hat{A}^{+}(N)\exp(\hbar\omega_0N\tau)\,. \quad (31)$$

Переход в (28) к введенным таким образом операторам носит стандартный характер [16] и приводит к

$$D(N,\tau;N',\tau')=-Q^{-1}\left\langle\hat{T}_\tau\,\hat{A}(N,\tau)\hat{\bar{A}}(N',\tau')B\left(\frac{1}{T}\right)\right\rangle^0\,. \quad (32)$$

Усреднение здесь подразумевается как в квантовом смысле по состояниям невзаимодействующих систем (электрический контур + резервуар), так и в статистическом смысле с матрицей плотности

$$\rho^0=\exp\frac{\Omega^0\,\hat{H}^0-\mu\,\hat{N}_R}{T}\,,$$

где Ω^0 — термодинамический потенциал в отсутствие взаимодействия,

$$Q=\exp\left(-\frac{\Omega-\Omega^0}{T}\right)=\left\langle B\left(\frac{1}{T}\right)\right\rangle^0\,.$$

Что касается оператора *B*, то он определяется формулой

$$B(\tau)=\hat{T}_\tau\exp\left[-\int_0^\tau H'(\tau')\,d\tau'\right],$$

где $\hat{H}'(\tau')$ — оператор взаимодействия в мацубаровском представлении взаимодействия.

Поскольку согласно (24) и (31)

$$\hat{\Phi}(\xi,\tau)=\sum_N\hat{A}(N)\varphi_N(\xi)e^{-\frac{\hbar\omega_0N}{T}}\,;$$

$$\hat{\bar{\Phi}}(\xi,\tau)=\sum_N\hat{A}^{+}(N)\varphi_N(\xi)e^{\frac{\hbar\omega_0N}{T}}\,,$$

то

$$\hat{H}'(\tau)=-g\sum_{NN'}\int\hat{\bar{A}}(N,\tau)\hat{\bar{\psi}}(x,\tau)\hat{P}\,\hat{q}\,\hat{\psi}(x,\tau)\hat{A}(N',\tau)dx\,,$$

причем

$$\hat{\psi}(x,\tau)=\sum_i\hat{\beta}_i\,\psi_i(x)\exp(-(\varepsilon_i-\mu)\tau)\,;$$
$$\hat{\bar{\psi}}(x,\tau)=\sum_i\hat{\beta}_i^{+}\,\psi_i(x)\exp(-(\varepsilon_i-\mu)\tau)\,.$$

Здесь шредингеровский оператор $\hat{q}$ в представлении чисел заполнения определяется выражением (11) при t = 0. Рассмотрим разность между хронологическим и нормальным произведениями операторов

$$\left(\hat{T}_\tau-\hat{N}\right)\hat{A}(N,\tau)\hat{\bar{A}}(N',\tau')=-\delta_{NN'}\Delta^0(N,\tau-\tau'),$$

где

$$\Delta^0(N,\tau-\tau')=-\vartheta(\tau-\tau')\exp(-\hbar\omega_0(\tau-\tau')), \quad (33)$$

причем $\vartheta(\tau)$ — функция Хевисайда.

В отсутствие взаимодействия $B\left(\frac{1}{T}\right)=1$ и

$$D^0(N,\tau;N',\tau')=\delta_{NN'}D^0(N,\tau-\tau');$$

$$D^0(N,\tau-\tau')=\Delta^0(N,\tau-\tau')-\rho^0(N,\tau-\tau')\,; \quad (34)$$

$$\rho^0(N,\tau-\tau')=\rho^0(N)\exp(-\hbar\omega_0N(\tau-\tau'))\,;$$

$$\rho^0(N)=\frac{\Omega^0-\hbar\omega_0N}{T}.$$

Для функции Грина свободного поля частиц резервуара имеем

$$G(X,X') = -\left\langle T_r\, \hat{\psi}(X)\hat{\overline{\psi}}(X')\right\rangle^0; \quad X = \{x,\tau\};$$

$$\hat{\psi}(X) = \sum_i \psi_i(x)\hat{\beta}_i\, e^{-(\varepsilon_i-\mu)\tau};$$

$$\hat{\overline{\psi}}(X) = \sum_i \psi_i^*(x)\hat{\beta}^+ e^{(\varepsilon_i-\mu)\tau}.$$

Следовательно,

$$G(X,X') = -\sum_i \psi_i(x)\psi_i^*(x')e^{-(\varepsilon_i-\mu)(\tau-\tau')}\times \\ \times\left[(1+N_i)\vartheta(\tau-\tau')+N_i\vartheta(\tau'-\tau)\right], \tag{35}$$

где, как и прежде, N_i — средние числа заполнения i-го состояния резервуара.

Расписываем выражение (32) во втором порядке теории возмущений

$$QD = D^0 - \frac{g^2}{2!} < \hat{T}_\tau\, \hat{A}(N,\tau)\hat{\overline{A}}(N',\tau')\times \\ \times\int \hat{\overline{A}}\hat{\overline{\psi}}\hat{P}\hat{\psi}\hat{q}\hat{A}\,dX_1 \int \hat{\overline{A}}\hat{\overline{\psi}}\hat{P}\hat{q}\hat{\psi}\hat{A}\,dX_2 > .$$

Для упрощения произведения операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\overline{\psi}}$ используем термодинамический вариант теоремы Вика [15—16]. Другими словами, считаем резервуар гауссовым, и в термодинамическом пределе допускаем, что корреляторы высших порядков операторов $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{\overline{\psi}}(x)$ выражаются через низшие корреляторы. Для упрощения произведения операторов $\hat{A}$ и $\hat{\overline{A}}$ воспользуемся алгебраической теоремой Вика [17—18] и тем фактом, что на физически допустимых состояниях (23) справедливо тождество $\hat{A}\hat{A}=0$ [11]. Таким образом, среди всевозможных $\hat{N}$-произведений операторов "выживают" выражения, содержащие оператор уничтожения $\hat{A}$ лишь в первой степени. По этой причине в любом члене фейнмановского ряда функция $\rho^0(N)$ может появиться только в первой степени. Использование алгебраической теоремы Вика не вносит каких-либо огрублений и упрощений. По этой причине корреляторы заряд—заряд любого порядка учитываются в предлагаемой технике, в отличие от стандартного мацубаровского формализма [16], точным образом, что существенно сказывается на результатах. Это первое, специально отмечаемое нами достоинство метода Г-операторов. Теперь

$$QD = D^0 - g^2\int \hat{P}G(X,X')\hat{P}G(X',X)\times \\ \times(-\Delta^0\hat{q}\Delta^0\hat{q}\Delta^0 + \rho^0\hat{q}\Delta^0\hat{q}\Delta^0 + \Delta^0\hat{q}\rho^0\hat{q}\Delta^0 + \\ + \Delta^0\hat{q}\Delta^0\hat{q}\rho^0)dXdX', \quad dX = dxd\tau.$$

Здесь учтены только связанные диаграммы Фейнмана. Последнюю формулу можно переписать следующим образом:

$$QD = \Delta^0 - \rho^0 + \Delta^0\hat{F}\Delta^0 - \rho^0\hat{F}\Delta^0 - \\ - \Delta^0\hat{F}\rho^0 - \Delta^0\hat{F}^{(n)}\Delta^0, \tag{36}$$

где

$$\hat{F} = g^2\int \hat{P}\hat{q}G(X,X')\Delta^0\hat{P}\hat{q}G(X',X)dXdX'; \tag{37}$$

$$\hat{F}^{(n)} = g^2\int \hat{P}\hat{q}G(X,X')\rho^0\hat{P}\hat{q}G(X',X)dXdX'.$$

Общая структура ряда теории возмущений

В высших приближениях к Δ^0 в (36) добавляются не содержащие $\rho^0(N)$ слагаемые, отвечающие связанным диаграммам Фейнмана. Их сумму с Δ^0 обозначим через Δ. Эта сумма в свою очередь умножается на сумму всевозможных петлевых диаграмм, совокупность которых [16] равна Q. В итоге вместо (36)

$$QD = Q\Delta - \rho^{con}.$$

Через ρ^{con} обозначена совокупность связанных диаграмм, каждая из которых обязательно содержит $\rho^0(N)$ в первой степени. В свою очередь

$$\Delta = \Delta^0 + \Delta^0\hat{F}\Delta; \tag{38}$$

$$\rho^{con} = \rho^0 + \rho^0\hat{F}\Delta + \Delta^0\hat{F}\rho^{con} + \Delta^0\hat{F}^{(n)}\Delta. \tag{39}$$

Оператор $\hat{F}$ — сумма диаграмм без $\rho^0(N)$, $\hat{F}^{(n)}$ — сумма диаграмм, каждая из которых обязательно содержит $\rho^0(N)$ в первой степени. Согласно (30)

$$\rho(N) = -D = Q^{-1}\rho^{con}, \quad \text{при } \tau' \to \tau + 0 . \quad (40)$$

Уравнение (39) может быть переписано в виде

$$\left(1 - \Delta^0 \hat{F}\right)\rho^{con} = \rho^0\left(1 + \hat{F}\Delta\right) + \Delta^0 F^{(n)}\Delta . \quad (41)$$

Непосредственная проверка с использованием (38) показывает, что

$$\left(1 + \hat{F}\Delta\right)\left(1 - \Delta^0 \hat{F}\right) = 1 .$$

После умножения (41) на $1 + \hat{F}\Delta$ слева имеем

$$\rho^{con} = \rho^{(c)} + \rho^{(n)}, \quad (42)$$

где

$$\rho^{(c)} = \left(1 + \hat{F}\Delta\right)\rho^0\left(1 + \hat{F}\Delta\right); \quad (43)$$

$$\rho^{(n)} = \Delta\hat{F}^{(n)}\Delta .$$

В матрице $\rho^{(c)}$ содержатся процессы взаимодействия, при которых состояние резервуара не изменяется (когерентный канал). Матрица $\rho^{(n)}$ отвечает за процессы, изменяющие состояние рассеивающей системы (некогерентный канал).

Пропагатор Δ наряду с оператором $\hat{F}$ носит "запаздывающий" по τ характер. Поскольку интегрирование в (43) распространяется по области $0 < \tau < 1/T$, то

$$\rho^{(n)}\left(N, \tau, \frac{1}{T}\right) = 0, \text{ при } \tau < \frac{1}{T}.$$

По той же причине

$$\rho^{(c)}\left(N, \tau, \frac{1}{T}\right) = \left(1 + \hat{F}\Delta\right)\rho^0 \text{ при } \tau < \frac{1}{T}.$$

Из (34), (42) и (38) следует, что

$$\rho^{(con)}\left(N, \tau, \frac{1}{T}\right) = \rho^{(c)}\left(N, \tau, \frac{1}{T}\right) =$$
$$= -\Delta(N, \tau)\rho^0\left(N, \tau, \frac{1}{T}\right).$$

Согласно (40) окончательно имеем

$$\rho(N) = -\frac{1}{Z}\Delta\left(N, \frac{1}{T}\right),$$
$$Z^{-1} = Q^{-1}\exp\left(\frac{\Omega^0}{T}\right). \quad (44)$$

Постоянная Z может быть найдена из диаграммной техники, но удобнее воспользоваться условием нормирования

$$\sum_N \rho(N) = 1, \; Z = -\sum_{N=0}^{\infty} \Delta\left(N, \frac{1}{T}\right). \quad (45)$$

Формулы (40), (42) и (44) свидетельствуют о том, что некогерентный канал эволюции, определяемый матрицей $\rho^{(n)}$, из расчета искомой матрицы $\rho(N)$ выпадает. В свою очередь это означает, что процессы некогерентного канала в расчетах одновременных корреляторов участия не принимают. Это второе, специально отмечаемое нами, достоинство метода Г-операторов. Такая теорема в какой-то мере обобщает ФДТ (3), в правой части формулы которой содержатся гриновские функции, определяющие в кинетических условиях распространение когерентных сигналов.

В некогерентном определяемом матрицей $\rho^{(n)}$ канале содержатся процессы неупругого рассеяния, спонтанное излучение, комбинационное рассеяние и вынужденное излучение. Все эти процессы непосредственно в расчете $\rho(N)$ в условиях равновесия участия не принимают. Опосредованно они проявляют себя в когерентном канале как некоторый разрушающий этот канал фактор. Исключение из $\rho(N)$ некогерентного канала влечет за собой важное следствие. Поскольку величина джоулева сопротивления электрической цепи определяется совокупностью всех элементарных процессов и не может быть сформирована лишь процессами упругого рассеяния, то джоулево сопротивление R не может содержаться в выражении для $\rho(N)$ и во всех одновременных корреляторах в условиях термодинамического равновесия.

Это можно сформулировать иначе. Так как кинетическое уравнение Больцмана учитывает все процессы взаимодействия, то отсутствие процессов некогерентного канала в расчетах $\rho(N)$ позволяет утверждать, что в матрице $\rho(N)$ отсутствуют диссипативные константы, определяемые уравнением Больцмана. В полной мере это относится к омическому сопротивлению. В то же время диссипативные константы, определяемые лишь когерентным каналом, в $\rho(N)$ содержаться могут. При этом надо иметь в виду следующее. При точных расчетах и знании точных собственных функций оператора $\hat{H}$ в матрице $\rho(N)$ никаких вообще диссипативных констант содержаться не будет. Речь идет о том, что в случае приближенных вычислений (которые технически только и возможны) и при введении в теорию диссипативных констант какие-то из них могут, а какие-то не могут участвовать в формировании $\rho(N)$.

Итак, на поставленный в начале статьи вопрос о возможной зависимости $\overline{q^2}$ от джоулева сопротивления R получен окончательный отрицательный ответ.

Предлагаемый формализм позволяет рассчитать $\overline{q^2}$ в условиях взаимодействия электрического контура с окружением в явном виде и ответить на вопрос, каким образом (если не через R) среда проявляет себя в этом корреляторе.

Коррелятор $\langle q(t)q(t)\rangle$

Согласно (34) для расчета $\rho(N)$ необходимо в явном виде вычислить функцию $\Delta(N, \tau)$, определяемую согласно (38) уравнением

$$\Delta(N,\tau)=\Delta^0(N,\tau)+\int_0^{\tau}\Delta^0(N,\tau-\tau')\times \times\int_0^{\tau'}\hat{F}(N,\tau'-\tau'')\Delta(N,\tau'')d\tau'd\tau'' . \quad (46)$$

Уравнение (46) решается с помощью преобразования Лапласа. Это третье, специально отмечаемое нами достоинство предлагаемого метода. Аналог используемого формализма — стандартный метод мацубаровских функций Грина [16] имеет дело с дискретными частотами, что чрезвычайно затрудняет обратное преобразование Фурье. Для образов преобразования Лапласа из (46) следует, что

$$\Delta(N,s)=\frac{\Delta^0(N,s)}{1-\Delta^0(N,s)\hat{F}(N,s)}, \quad (47)$$

причем, согласно (33)

$$\Delta^0(N,s)=-(s+\hbar\omega_0 N)^{-1}. \quad (48)$$

Оператор $\hat{F}(N, s)$ находится из формул (35) и (37)

$$\hat{F}(N,s)|N\rangle=[(N+1)a(s)+Nc(s)]|N\rangle, \quad (49)$$

где структурные коэффициенты $a(s)$ и $c(s)$ представимы всюду аналитическими функциями с особенностями на вещественной оси

$$c(s)=-g^2\gamma^2\sum_{ij}|P_{ij}|^2\frac{N_j(1+N_i)}{s+\hbar\omega_{ij}+\hbar\omega_0(N-1)};$$
$$a(s)=-g^2\gamma^2\sum_{ij}|P_{ij}|^2\frac{N_j(1+N_i)}{s+\hbar\omega_{ij}+\hbar\omega_0(N+1)}. \quad (50)$$

Обратное преобразование Лапласа дает

$$\Delta(N,\tau)=\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}e^{\tau s}\Delta(N,s)\frac{ds}{2\pi i}. \quad (51)$$

Учитывая аналитические свойства функции, $\Delta(N,\tau)$, интеграл (51) можно представить в виде

$$\Delta(N,\tau)=\int_{\beta(N)}^{\infty}e^{-\tau s}[\Delta(N,-s-i0)-\Delta(N,-s+i0)]\frac{ds}{2\pi i}, \quad (52)$$

причем $\beta(N)$ совпадает с нижней границей энергетического спектра системы в целом. Поскольку

$$\overline{q^2}=\gamma^2\langle 1+2\hat{\alpha}^+\hat{\alpha}\rangle \quad (53)$$

и

$$\langle\hat{\alpha}^+\hat{\alpha}\rangle=\sum_{N=0}^{\infty}N\rho(N), \quad (54)$$

то формулы (44), (45), (47) и (52) полностью решают задачу вычисления $\overline{q^2}$. При этом, если оператор $\hat{F}(N,s)$ известен точно, то получим точный результат.

Произведем в (52) замену переменной $s = \hbar\omega N$. Тогда

$$\Delta\left(N,\frac{1}{T}\right)=\int_{\beta(N)/N\hbar}^{\infty}e^{-\frac{\hbar\omega N}{T}}\times \times\frac{1}{\hbar\omega-\hbar\omega_0-\frac{1}{N}\hat{F}(-\hbar\omega N-i0)}\frac{d\hbar\omega}{2\pi i}+c.c., \quad (55)$$

где

$$\hat{F}(-\hbar\omega N-i0)=-g^2\gamma^2\sum_{ij}|P_{ij}|^2\times \times\left[\frac{NN_j(1+N_i)}{-\hbar\omega N+\hbar\omega_{ij}+\hbar\omega_0(N-1)-i0}+\frac{(N+1)N_i(1+N_j)}{-\hbar\omega N-\hbar\omega_{ij}+\hbar\omega_0(N+1)-i0}\right]. \quad (56)$$

Рассмотрим предельные случаи.

- Квантовый предел $\hbar\omega_0 \gg T$. При суммировании по N в (54) достаточно ограничиться первым неисчезающим слагаемым

$$\left\langle \hat{\alpha}^{+}\hat{\alpha}\right\rangle = -\frac{1}{Z}\int_0^\infty e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} \frac{1}{\hbar\omega - \hbar\omega_0 + g^2\gamma^2\sum\limits_{ij}|P_{ij}|^2\left[\frac{N_j(1+N_i)}{-\hbar\omega+\hbar\omega_{ij}-i0} + \frac{2N_i(1+N_j)}{-\hbar\omega+\hbar\omega_{ij}+2\hbar\omega_0-i0}\right]}\frac{d\hbar\omega}{2\pi i} + c.c. \qquad (57)$$

Нижний предел здесь можно положить равным нулю. Согласно (53) теперь находится $\overline{q^2}$. Сопоставление (53), (57) с (5) и (21) показывает, что никакой связи между этими формулами установить не удается.

- Область промежуточных температур $\hbar\omega_0 \approx T$. При таких более высоких температурах показательная функция в (55) слабо зависит от ω, сказывается влияние больших N. Поэтому в поляризационном операторе (56) можно опустить вакуумное слагаемое. Учитывая далее, что подынтегральная функция в (55) в сумме с ее комплексным сопряжением оказывается функцией колоколообразной формы с максимумом в точке

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{N}\hat{F}(-\hbar\omega_0 N),$$

то в операторе $\hat{F}$ с используемой точностью можно положить $\omega_0 = \omega$. Теперь

$$\frac{1}{N}\hat{F}(-\hbar\omega N - i0) = -g^2\gamma^2\sum_{ij}|P_{ij}|^2 \times$$
$$\times\left[\frac{N_j(1+N_i)}{\hbar\omega_{ij}-\hbar\omega-i0} + \frac{N_i(1+N_j)}{-\hbar\omega_{ij}+\hbar\omega+i0}\right].$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{N}\operatorname{Re}\hat{F}(-\hbar\omega N - i0) = \operatorname{Re}\pi_r(\omega),$$

в то время как

$$\operatorname{Im}\pi_r(\omega) \neq \frac{1}{N}\operatorname{Im}\hat{F}(-\hbar\omega N - i0) = -g^2\gamma^2\pi\times$$
$$\times\sum_{ij}|P_{ij}|^2\left[N_j(1+N_i) + N_i(1+N_j)\right]\delta(\hbar\omega - \hbar\omega_{ij}).$$

Представляется целесообразным по аналогии с (21) ввести понятие второго сопротивления

$$R^{(2)}(\omega) = -\frac{2\omega_0 L}{\hbar\omega N}\operatorname{Im}\hat{F}(-\hbar\omega N - i0).$$

Именно эта релаксационная величина, а не стандартное (21) сопротивление $R^{(1)}$ определяет квантовые добавки к $\overline{q^2}$. Опущенное в (56) вакуумное слагаемое можно рассматривать как квантовую добавку ко второму сопротивлению. Если в соответствии с (20) и (21)

$$R^{(1)} \sim N_i - N_j,$$

то

$$R^{(2)} \sim N_j(1+N_i) + N_i(1+N_j).$$

Квазиклассический предел

Формула (37) определяет поляризационный оператор $\hat{F}$ во втором порядке теории возмущений. Это вселяет надежду в осуществление расчета $\overline{q^2}$ с точностью до членов, пропорциональных g^2. Такие вычисления удается осуществить явным образом.

Первая итерация формулы (46) после преобразования Лапласа приводит к

$$\Delta(N,s) = \Delta^0(N,s) + \Delta^0(N,s)\hat{F}(N,s)\Delta^0(N,s).$$

Обратное преобразование Лапласа с учетом (48) и (49) дает

$$\Delta(N,\tau) = -e^{-\hbar\omega_0 N\tau} - \tau g^2\gamma^2 e^{-\hbar\omega_0 N\tau}\times$$
$$\times\sum_{ij}|P_{ij}|^2\frac{N(N_j - N_i) - N_i(N_j+1)}{\hbar\omega_{ij} - \hbar\omega_0} -$$
$$-g^2\gamma^2 e^{-\hbar\omega_0 N\tau}\sum_{ij}|P_{ij}|^2\Big[NN_j(1+N_i)\times \qquad (58)$$
$$\times\left(e^{-\tau(\hbar\omega_{ij}-\hbar\omega_0)} - 1\right) + (N+1)N_i(1+N_j)\times$$
$$\times\left(e^{\tau(\hbar\omega_{ij}-\hbar\omega_0)} - 1\right)\Big]\frac{1}{(\hbar\omega_{ij} - \hbar\omega_0)^2}.$$

Согласно (53), (54), (44) и (45) для расчета $\overline{q^2}$ необходимо знать

$$\left\langle \hat{\alpha}^{+}\hat{\alpha}\right\rangle = \frac{\sum\limits_{N=0}^{\infty} N\Delta\left(N,\frac{1}{T}\right)}{\sum\limits_{N=0}^{\infty}\Delta\left(N,\frac{1}{T}\right)}. \qquad (59)$$

Формула (58) и суммы

$$\sum_{N=0}^{\infty} N^m e^{-\hbar\omega_0 N\tau} = \left(\frac{-1}{\hbar\omega_0}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\left(1 - e^{-\hbar\omega_0\tau}\right)^{-1}$$

позволяют без труда найти выражение для $\overline{q^2}$ в приближении ~g^2.

Нас интересует квазиклассический предел $T \to \infty$, т. е. $\tau \to 0$. Из (58) следует, что

$$\Delta(N,\tau) \to -e^{-\hbar\omega_0 N\tau} - \frac{g^2\gamma^2\tau^2}{2} e^{-\hbar\omega_0 N\tau} \sum_{ij} |P_{ij}|^2 \times$$
$$\times \left[NN_j(1+N_i) + (N+1)N_i(1+N_j)\right]$$

при $\tau \to 0$.

Подстановка этой формулы в (59) для $\overline{q^2}$ согласно (53) дает

$$\overline{q^2} = CT\left(1 + \frac{g^2 C}{T}\sum_{ij}|P_{ij}|^2\left[N_j(1+N_i) + N_i(1+N_j)\right]\right). \quad (60)$$

Если вспомнить, что $|P_{ij}|^2 \sim \hbar$, то квантовая поправка к классической формуле $\overline{q^2} = CT$ осуществляется произведением $\hbar$ на выражение, структура которого характерна для второго сопротивления $R^{(2)}$. Стандартное сопротивление $R^{(1)}$ к квантовым поправкам флуктуации заряда на конденсаторе отношения не имеет, кроме тех экзотических случаев, при которых

$$R^{(2)} = R^{(1)}.$$

Вакуумная добавка в поляризационном операторе (49) осуществляет вклад в $\overline{q^2}$ в $\hbar\omega_0/T$ раз меньше последнего слагаемого в (60).

Заключение

В статье рассчитаны квантовые флуктуации заряда $\overline{q^2}$ в электрическом колебательном контуре в условиях термодинамического равновесия. Расчет опирается на метод Г-операторов, первоначально предложенный для иных целей, но оказавшийся идеальным инструментом для расчета одновременных корреляторов в равновесных условиях. Существенно использована теория о том, что процессы некогерентного канала рассеяния, изменяющие состояние резервуара при взаимодействии с ним исследуемого электрического контура, из расчета одновременных корреляторов в случае термодинамического равновесия выпадают. Это — своеобразное обобщение флуктуационно-диссипационной теоремы. Из этого обобщения следует, что релаксационные константы, описывающие эволюцию классических сигналов, в выражения для равновесных одновременных корреляторов входить не могут. В полной мере это относится к омическому сопротивлению R. Таким образом, положен конец многолетней дискуссии по этому вопросу [3—5]. Отсюда следует, что прямое использование теории возмущений без учета такого обобщения ФДТ не ведет к цели.

Показано также, что квантовые флуктуации релаксирующих динамических величин в условиях термодинамического равновесия не могут быть выражены только через классические феноменологические характеристики систем и квантовый вариант распределения Гиббса. Такой подход исключает часть квантовых флуктуаций, определяемых исключительно уравнением Шредингера и требующих для своего учета в феноменологической теории введения специфических дополнительных релаксационных констант (второе сопротивление). Из этого замечания следует несостоятельность так называемой квантовой формулы Найквиста, определяющей ошибочную поправку к своему классическому варианту уже в первом члене разложения по $\hbar$.

Квантовая поправка к классической формуле флуктуации заряда в действительности определяется специфическим выражением (второе сопротивление). Эта величина, обладающая размерностью сопротивления, имеет отличную от стандартного сопротивления температурную зависимость. Квантовая часть второго сопротивления имеет вакуумную природу и определяет в $\overline{q^2}$ поправку, пропорциональную $\hbar^2$.

Указанные закономерности в полной мере относятся к любым одновременным квантовым корреляторам в условиях термодинамического равновесия. Такие корреляторы встречаются в теории флуктуаций электромагнитного поля в поглощающих средах, в теории сил Ван-дер-Ваальса и т. д.

Авторы выражают благодарность участникам семинара, руководимого А. А. Рухадзе, за обсуждение работы.

Литература

1. *Nyquist H.*// Phys. Rev. 1928. Т. 32. № 110.
2. *Горелик Г. С.*// УФН. 1951. Т. 114. № 33.
3. *Гинзбург В. Л.*// Там же. 1952. Т. 66. Вып. 3. № 348.
4. *Климонтович Ю. Л.*// Там же. 1987. Т. 151. № 309.
5. *Гинзбург В. Л., Питаевский Л. П.*// Там же. № 333.
6. *Shiktorov P., Starikov E., Gruzinskis V., Reggiani L.*// Proc. of the 17th Int.: Conf. on Noise and Fluctuations. Prague. August Ed. J. Sikula 2003. P. 31.
7. *Ford C. W., O'Connell R. F.*// Phys. Rev. Lett. 1996. Т. 77. № 798.
8. *Crobert H.*// Z. Phys. 1982. В 49. № 161.
9. *Talkner P.*// Ann. Phys. (USA), 1986. Т. 167. № 390.
10. *Векленко Б. А.*// ЖЭТФ. 1989. Т. 96. № 457.
11. *Векленко Б. А.*// Там же. 1998. Т. 114. № 492.
12. *Лоудон Р.* Квантовая теория света. — М.: Мир, 1983.
13. *Callen H. B., Welton T. A.*// Phys. Rev. 1951. Т. 83. № 34.
14. *Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В.*// ДАН СССР. 1959. Т. 126. № 53.
15. *Matsubara T.*// Progr. Theor. Phys. 1955. Т. 14. № 351.

16. *Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. — ГИФМЛ, М., 1962.

17. *Wick G.*// Phys. Rev. 1950. T. 80. № 268.

18. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. — Наука, М.: 1969.

Nonclassical charge fluctuations in electric circuits under thermal equilibrium conditions

B. A. Veklenko
Institute for High Temperatures, Moscow, Russia

Yu. B. Sherkunov
Institute for Thermal Physics of Extreme States, Moscow, Russia

It is shown that quantum corrections to classical charge fluctuations in electric circuits under the condition of thermal equilibrium do not depend on Joule resistance. They depend on the product of Planck constant $\hbar$ and a function introduced in this work and named second resistance. The temperature dependence of the second resistance differs from that of standard resistance. Quantum corrections to the second resistance are due to vacuum effects, their contributions to the result are proportional to $\hbar^2$. The quantum Nyquist formula does not possess such propeties. Therefore, it turns out to be incorrect even in the first order of expansion on the Planck constant.