УДК 536.55:536.632

Метод определения тепловых свойств веществ с линейным источником тепла постоянной мощности

А. И. Лунин, Е. П. Тетерин
Ковровская государственная технологическая академия, г. Ковров, Владимирская обл., Россия

Рассмотрено формирование температурных полей импульсным источником тепла постоянной мощности. Показано, что закон изменения температурной функции импульсного источника тепла совпадает с законом изменения первой производной от температурной функции источника тепла постоянной мощности. На этом основана формула температурной функции импульсного источника используется для описания первой производной температурной функции источника тепла постоянной мощности. Это позволяет по результатам измерения времени достижения максимума первой производной определить коэффициент температуропроводности, а объемная теплоемкость определяется по результатам измерения этого же времени и максимума температуры в контролируемой точке среды.

Среди методов определения теплофизических характеристик веществ, основанных на нестационарных тепловых потоках, обращает на себя внимание метод определения этих характеристик с линейным источником тепла постоянной мощности. Это обусловлено двумя обстоятельствами: во-первых, относительной простотой обеспечения режима работы источника тепла и, во-вторых, возможностью получения температуры точки исследуемой среды, в которой помещается датчик температуры, соизмеримой с температурой источника, в отличие от импульсных нагревателей, которые имеют температуру, на один-два порядка большую, чем температура датчика исследуемой среды.

В основу аналитического обоснования метода определения теплофизических характеристик веществ с линейным источником тепла постоян-

© Лунин А. И., Тетерин Е. П., 2004

ной мощности положено решение дифференциального уравнения теплопроводности Фурье для двухмерного потока тепла [1]

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) \qquad (1)$$

с соответствующими краевыми условиями:

начальные условия

$$t(r,\tau) = t_0,\ -\infty < r < +\infty,\quad \tau = 0,$$

т. е. в начальный момент времени температура во всей бесконечной исследуемой среде постоянная в результате ее термостатирования;

граничные условия

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r} = 0,\ \ r \to \infty,\ \ \tau > 0\,.$$

В момент измерения температуры на расстоянии r от источника тепла температурное возмущение, созданное источником тепла, еще не дошло до бесконечности, там температура постоянная и градиент ее равен нулю.

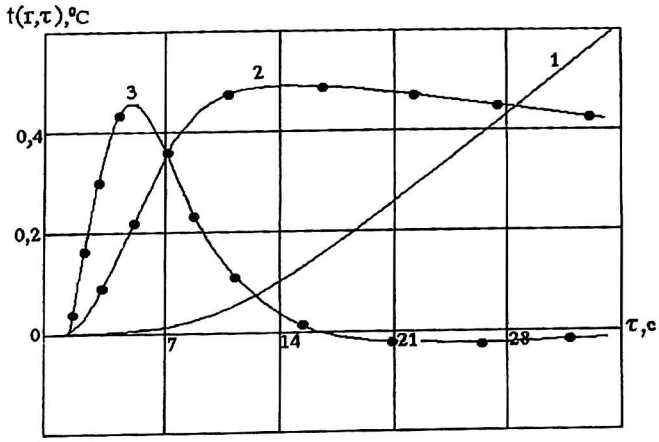
$$t(r,\tau + d\tau) = t(r,\tau) + \frac{dPd\tau}{\pi L c\rho dr^2},\ \ r = 0,\ \ \tau \ge 0\,.$$

Это условие описывает действие линейного источника тепла постоянной мощности dP с длиной L.

Аналитическое выражение решения уравнения (1) далее будем называть *температурной функцией*. В процессе формирования нестационарного температурного поля в определенные моменты времени температурная функция или ее производные могут иметь экстремум. Если функция имеет экстремум, то ее первая производная в этот момент времени меняет знак, т. е. происходит реверс знака производной. Далее смену знака функции или ее производных будем называть *реверсом*.

Исследование закономерностей температурных полей, возникающих при действии линейного источника тепла постоянной мощности, выполним на математической модели, построенной методом конечных разностей [2].

В качестве примера рассмотрим моделирование теплопроводности в среде с параметрами: коэффициент теплопроводности $\lambda = 0{,}5$ Вт/мК, коэффициент температуропроводности $a = 0{,}5\cdot10^{-6}$ м^2/с и коэффициент объемной теплоемкости $c\rho = 10^6$ Дж/м^{3}К. Датчик температуры расположим на расстоянии 6 мм от источника тепла. В исследуемой среде действует источник тепла с постоянной мощностью 25 Вт длиной 1 м. По данным матрицы, полученной с помощью модели, на рисунке кривой 1 представлено изменение со временем температуры слоя, находящегося на расстоянии $r = 6$ мм от источника тепла, кривой 2 — изменение со временем первой производной, кривой 3 — второй производной по времени от температуры исследуемой точки среды.



Изменение температуры исследуемого слоя среды (1), первой (2) и второй (3) ее производных в зависимости от времени для источника тепла постоянной мощности

Анализ кривых, представленных на рисунке, показывает, что форма кривых 2 и 3 аналогична графикам температурной функции и ее производной, получаемых при действии импульсного линейного источника тепла, для которого аналитическое выражение этой функции известно [1]

$$t(r,\tau) = \frac{Q}{4\pi L a c\rho \tau} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}. \qquad (2)$$

Первая производная от этой функции имеет вид

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{Q}{4\pi L a c\rho}\tau^{-2} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}\left(\frac{r^2}{4a\tau} - 1\right). \qquad (3)$$

Так как температурная функция (2) имеет максимум в определенный момент времени τ_m, то в этот момент времени производная (3) должна быть равна нулю, что выполняется при условии

$$\tau_m = \frac{r^2}{4a}. \qquad (4)$$

Для сопоставления температурных функций и их производных при действии импульсного источника и источника постоянной мощности для тех же параметров источника и исследуемой среды по формуле (2) были вычислены температуры, а по (3) — значения производных в зависимости от времени. Кроме того, для проверки объективности моделирования на модели были рассчитаны те же температуры и производные. При этом оказалось, что расчеты по формулам (2), (3) и данные, полученные на модели, полно-

стью совпадают. Результаты этих расчетов на рисунке показаны точками. Совпадение точек с графиками позволяет сделать вывод: первая производная по времени от температурной функции $t(r, \tau)$, возникающей при действии источника тепла постоянной мощности, численно равна температуре $t_i(r, \tau)$, возникающей при действии импульсного источника

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = t_i(r,\tau),$$

откуда следует: $t(r,\tau) = \int_0^\tau t_i(r,\tau)d\tau$ или с учетом (2) получаем

$$t(r,\tau) = \int_0^\tau \frac{Q}{4\pi Lac\rho\tau} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}} d\tau. \qquad (5)$$

Интеграл (5) является решением уравнения (1). Его значение можно найти только численными методами, которые не позволяют получить аналитическую зависимость температуры от параметров исследуемой среды, что исключает возможность разработки метода определения теплофизических характеристик исследуемых материалов. Решение этой задачи было выполнено *аппроксимированием* кривой 1 (см. рисунок) с помощью симметричного ряда, представленного ниже [2]. В силу симметрии нумерация i членов ряда выбрана от $i = -\infty$ до $i = +\infty$ и показана цифрами над соответствующими членами ряда

$$t(r,\tau) = \frac{Q\tau_m}{4\pi Lac\rho}\Bigg[\ldots \overset{i=-3}{-3!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^4 \tau^4 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} +$$

$$+ \overset{i=-2}{2!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^3 \tau^3 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=-1}{- 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^2 \tau^2 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} +$$

$$+ \overset{i=0}{0!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^1 \tau^1 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=1}{+ \frac{1}{0!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^0 \tau^0 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} + \qquad (6)$$

$$+ \overset{i=2}{\frac{1}{1!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-1} \tau^{-1} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=3}{+ \frac{1}{2!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-2} \tau^{-2} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} -$$

$$\overset{i=4}{- \frac{1}{3!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-3} \tau^{-3} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=5}{+ \frac{1}{4!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-4} \tau^{-4} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \ldots\Bigg].$$

Первая производная по времени от функции (6) представлена формулой

$$\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{Q\tau_m}{4\pi\pi Lac}\Bigg[\ldots \overset{i=-3a}{- 4!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^4 \tau^3 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} -$$

$$\overset{i=-3b}{- 3!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^3 \tau^2 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=-2a}{+ 3!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^3 \tau^2 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} +$$

$$\overset{i=-2b}{- 2!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^2 \tau^1 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=-1a}{- 2!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^2 \tau^1 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} -$$

$$\overset{i=-1b}{- 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^1 \tau^0 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=0a}{+ 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^1 \tau^0 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} + \qquad (7)$$

$$\overset{i=0b}{+ 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^0 \tau^{-1} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=1a}{+ 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^0 \tau^{-1} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} -$$

$$\overset{i=1b}{- 0!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-1} \tau^{-2} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=2a}{- 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-1} \tau^{-2} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} +$$

$$\overset{i=2b}{+ 1!\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-2} \tau^{-3} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} \overset{i=3a}{- \frac{2}{2!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-2} \tau^{-3} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} +$$

$$\overset{i=3b}{+ \frac{1}{2!}\left(\frac{4a}{r^2}\right)^{-3} \tau^{-4} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}} + \ldots\Bigg].$$

Так как производная от каждого члена ряда (7) представляет собой двучлен, в выражении (7) члены ряда пронумерованы таким образом, что первое слагаемое двучлена обозначено номером соответствующего члена ряда (6) с индексом ia, второе — с индексом ib.

Если от (7) взять производную по времени, то получим выражение вида

$$\frac{\partial^2 t(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{Q\tau_m}{4\pi Lac\rho}\tau^{-2} e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}\left(\frac{r^2}{4a\tau} - 1\right).$$

Эта производная равна нулю при условии

$$\tau_m = \frac{r^2}{4a}, \qquad (8)$$

таким образом, формулы (4) и (8) совпадают. Из этих соотношений следует, что скорость выравнивая температур в среде не зависит от длительности действия источника тепла (мгновенного или постоянно действующего).

Вычисление температуры по формуле (6) осуществить нельзя, так как левая часть рассматриваемого ряда быстро расходится. Однако сопоставление функции (6) и ее производной (7) позволяет устранить эту проблему. Выражение (7) получено в процессе дифференцирования функции (6). Если выполнить обратную процедуру, т. е. проинтегрировать ряд (7), но начиная с номера $i = 0a$, то получится часть ряда (6), начиная с номера $i = 0$. Эти выражения можно приравнять

$$\frac{Q}{4\pi Lac\rho}\left(\frac{4a\tau}{r^2}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^2}{4a\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{4a\tau}\right)^2e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\ldots\right)=$$

$$=\int\frac{Q}{4\pi Lac\rho}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\int\frac{Q}{4\pi Lac\rho\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}dt+ \qquad (9)$$

$$+\int\frac{Q}{4\pi Lac\rho}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\frac{r^2}{4a}\frac{1}{\tau^2}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-\right.$$

$$\left.-\frac{r^2}{4a}\frac{1}{\tau^2}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\ldots\right)dt.$$

Из сопоставления второго интеграла в правой части соотношения (9) с интегралом (5) следует, что второй интеграл в (9) можно заменить на $t(r, \tau)$.

$$t(r,\tau)=\frac{Q}{4\pi Lac\rho}\left[\frac{4a\tau}{r^2}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\right.$$

$$+e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\frac{r^2}{4a\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-\int e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-$$

$$\left.-\int\left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\frac{r^2}{4a\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-\ldots\right)dt\right].$$

Сделав такую замену и вынеся постоянные величины за скобки, выражение для температурной функции, используя соотношение (8), можно записать в следующем виде:

$$t(r,\tau)=\frac{Q\tau_m}{\pi Lr^2c\rho}\left[\frac{4a\tau}{r^2}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\frac{r^2}{4a\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-\right.$$

$$\left.-\int e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-\int\left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}+\frac{r^2}{4a\tau}e^{-\frac{r^2}{4a\tau}}-\ldots\right)dt\right]$$

или

$$t(r,\tau)=\frac{Q\tau_m}{\pi Lr^2c\rho}K, \qquad (10)$$

где K — выражение, стоящее в квадратных скобках.

Исследование функции K показало, что в моменты времени $\tau = \tau_m$ она остается постоянной при любых значениях коэффициента температуропроводности a и равна 0,22066 (a изменялось от 0,005 до 500 м^2/с).

Так как $\frac{\ln 2}{\pi} = 0{,}2206356$,

то формулу (10) можно представить в виде

$$t_M(r,\tau)=\frac{\ln 2}{\pi^2}\frac{Q\tau_m}{Lr^2c\rho},$$

откуда следует выражение для удельной теплоемкости

$$c=\frac{\ln 2}{\pi^2}\frac{Q\tau_m}{Lr^2\rho t_M(r,\tau)}. \qquad (11)$$

Соотношения (8) и (11) могут быть положены в основу метода определения теплофизических характеристик вещества с источником тепла постоянной мощности.

Для этого в исследуемую среду с известной плотностью ρ помещается линейный источник тепла в виде тонкого проводника на расстоянии r, от которого устанавливается точечный или линейный (параллельный источнику) датчик температуры. По проводнику пропускается стабилизированный постоянный электрический ток. Количество тепла Q в (11), которое поступает в среду, равно разности между количеством тепла, определяемым законом Джоуля-Ленца, и количеством тепла, идущим на нагрев проводника. Пренебрегать этим обстоятельством нельзя, так как количество тепла, идущее на нагрев проводника, может достигать (20—30) % от общего количества тепла, выделяемого при прохождении электрического тока в зависимости от площади его сечения. Так, для константиновой проволоки диаметром 0,5 мм при пропускании

тока в 1 А в течение 17 с общее количество выделившегося тепла составило 0,42 Дж/см, а количество тепла, пошедшее на нагрев проволоки на 10 °С, оказалось равным 0,08 Дж/см.

В этом случае формула (11) трансформируется в выражение

$$c = \frac{\ln 2}{\pi^2} \frac{\tau_m}{\rho r^2 t_M(r,\tau)} \left[\frac{\gamma}{s} I^2 \tau_m - c_h \rho_h s \left(t_M^h - t_0^h \right) \right],$$

где γ — удельное сопротивление проводника;
S — площадь поперечного сечения проводника;
I — сила тока;
c_h, ρ_h — удельная теплоемкость и плотность проводника, соответственно;
t_M^h — температура нагревателя в момент реверса;
t_0^h — начальная температура нагревателя.

В соответствии с этим выражением объемная теплоемкость исследуемой среды определяется по результатам измерения времени реверса τ_M и температуры $t_M(r, \tau_m)$ точки среды в этот момент времени, силы тока I в проводнике, температуры источника тепла в начальный момент времени t_0^h и в момент реверса t_M^h. В соответствии с соотношением (8) коэффициент температуропроводности определяется по результатам измерения времени реверса τ_m, а коэффициент теплопроводности λ из известного соотношения [1]

$$\lambda = ac\rho.$$

Относительная погрешность определения коэффициентов температуро- и теплопроводности с учетом конструктивных особенностей датчика температуры составляет не более 0,05 и 0,08, соответственно, объемной теплоемкости — не более 0,07.

Заключение

Представленный в работе метод обеспечивает комплексное определение теплофизических характеристик жидкостей и газов с достаточно простым конструктивным оформлением экспериментальной установки и легко автоматизируемым, на базе современной цифровой техники, процессом измерения.

Литература

1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 346 с.

2. *Лунин А. И., Тетерин Е. П.* Обобщенная теория нестационарных температурных полей и динамические методы определения теплофизических свойств материалов. — Ковров: ГОУ ВПО "КГТА", 2003. — 248 с.

Determining method of thermal properties of substances with steady power line source

A. I. Lunin, E. P. Teterin
Kovrov State Technological Academy, Kovrov, Vladimir region, Russia

Temperature field formation by steady power pulsed source of heat is under consideration. It is stated that the law of variation of temperature function of pulsed source of heat coincides with the law of variation of the first derivative from temperature function of steady power source. This forms the basis of the known pulsed source temperature function formula used for the first derivative from temperature function of steady power source description. It enables to determine thermal diffusivity from the measuring results of the first derivative maximum peak achievement time, and volumetric heat capacity is determined under the measuring results of the same time and temperature maximum peak in the environment controlled point.