УДК 537.2

Обобщенное комплексное разделение переменных в теории осесимметричных потенциалов

Ю. К. Голиков, Д. В. Григорьев, Н. К. Краснова, К. В. Соловьев
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Санкт-Петербург, Россия

Предложен новый аналитический метод получения элементарных осесимметричных Лапласовых потенциалов с кольцевыми особенностями, на базе которых можно конструировать электрические конфигурации различного назначения, в частности для использования в энергоанализе.

Рассмотрим осесимметричное уравнение Лапласа в переменных x и y, где x играет роль радиальной координаты, а y — осевой

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1}{x}\varphi_x = 0. \qquad (1)$$

Стандартный способ разделения переменных $\varphi(x,\ y) = X(x)Y(y)$ доставляет фундаментальные решения в виде произведения экспонент и функций Бесселя

$$\varphi(x,y) = (A_1 J_0(\lambda x) + A_2 Y_0(\lambda x))(B_1 e^{\lambda y} + B_2 \bar{e}^{\lambda y}).$$

Можно существенно обогатить метод разделения переменных, если при помощи сопряженных комплексных “координат” $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и соответствующих дифференциальных операторов

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

привести уравнение Лапласа (1) к комплексной форме

$$(2z\varphi_z + \varphi)_{\bar{z}} + (2\bar{z}\varphi_{\bar{z}} + \varphi)_z = 0. \qquad (2)$$

Поиск решений вида $\varphi(z,\bar{z}) = P(z)R(\bar{z})$, где P и R — неизвестные аналитические функции, непосредственно ведет к разделению переменных в уравнении (2)

$$\frac{2zP_z + P}{P_z} = -\frac{2\bar{z}R + R}{R_{\bar{z}}} = 2c = 2(\alpha + i\beta), \qquad (3)$$

здесь $c = \alpha + i\beta$ — комплексная константа разделения.

Решение элементарных уравнений (3) представляет собой комплексный гармонический потенциал

$$\varphi(z,\bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{(z - c)(\bar{z} + c)}} \qquad (4)$$

или, переходя к обычным цилиндрическим координатам x и y,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \beta + i\alpha)^2}}. \qquad (5)$$

Несмотря на то, что выражение (5) напоминает потенциал точечного заряда, представляемые вещественными потенциалами $Re\varphi$ и $Im\varphi$ физические поля достаточно сложны, в частности, кольцо $x = \alpha$, $y = \beta$ является их существенной особенностью. Тем не менее оказывается, что $Re\varphi$ и $Im\varphi$ являются, попросту, сфероидальными гармониками [1].

В качестве нового шага попытаемся обобщить идею метода разделения переменных, восходящую к Л. Эйлеру. Будем искать решение комплексного осесимметричного уравнения Лапласа в виде суммы уже двух произведений

$$\varphi = P(z)R(\bar{z}) + Q(z)T(\bar{z}), \qquad (6)$$

где P, R, Q, T — неизвестные пока функции.

Подставив (6) в уравнение Лапласа (2), получим соотношение

$$(2zP_z + P)R_{\bar{z}} + (2zQ + Q)T_{\bar{z}} + (2\bar{z}R_{\bar{z}} + R)P_z + (2\bar{z}T_{\bar{z}} + T)Q_z = 0, \qquad (7)$$

которое можно трактовать как своеобразное функционально-дифференциальное уравнение относительно неизвестных аналитических функций $P(z)$, $R(z)$, $Q(z)$, $T(z)$. Для его решения применим метод, развитый в работах [2, 3].

Разделив сумму (7) на $P_z R_{\bar{z}}$

$$\frac{2zP_z + P}{P_z} + \frac{2\bar{z}R_{\bar{z}} + R}{R_{\bar{z}}} + \frac{2zQ_z + Q}{P_z}\frac{T_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{z}T_{\bar{z}} + T}{R_{\bar{z}}}\frac{Q_z}{P_z} = 0 \qquad (8)$$

и применив затем оператор $\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\left(\frac{2zQ_z + Q}{P_z}\right)_z \left(\frac{T_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}} + \left(\frac{2\bar{z}T_{\bar{z}} + T}{R_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}} \left(\frac{Q_z}{P_z}\right)_z = 0.$$

Выполняя еще одно деление и обозначив константу разделения символом $c = \alpha + i\beta$

$$\left(\frac{2zQ_z+Q}{P_z}\right)_z\Big/\left(\frac{Q_z}{P_z}\right)_z=-\left(\frac{2\bar{z}T_{\bar{z}}+T}{R_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}\Big/\left(\frac{T_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}=$$
$$=2c=2(\alpha+i\beta),$$

получим линейную систему, выражающую некоторые необходимые условия на искомые функции

$$\frac{2zQ_z+Q}{P_z}=2c\frac{Q_z}{P_z}+a,\ \frac{2\bar{z}T_{\bar{z}}+T}{R_{\bar{z}}}=-2c\frac{T_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}}+b. \quad (9)$$

Возвращаясь к исходному уравнению (8) с учетом полученных связей (9)

$$\frac{2zP_z+P}{P_z}+\frac{2\bar{z}R_{\bar{z}}+R}{R_{\bar{z}}}+\left(2c\frac{Q_z}{P_z}+a\right)\frac{T_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}}+$$
$$+\left(-2c\frac{T_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}}+b\right)\frac{Q_z}{P_z}=0$$

и произведя несложную перегруппировку слагаемых, снова приходим к разделению переменных

$$\frac{2zP_z+P+bQ_z}{P_z}=-\frac{2\bar{z}R_{\bar{z}}+R+aT_{\bar{z}}}{R_{\bar{z}}}=2k,$$

где a, b, c, k — произвольные комплексные числа. В результате выполненных преобразований образовались две системы уравнений относительно неизвестных функций P, Q, R, T

$$\begin{cases}2(z--)Q_z-aP_z+Q=0;\\ 2(z-k)P_z+bQ_z+P=0'\end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases}2(\bar{z}+c)T_{\bar{z}}-bR_{\bar{z}}+T=0\\ 2(\bar{z}+k)R_{\bar{z}}+aT_{\bar{z}}+R=0\end{cases} \quad (11)$$

Эти изолированные друг от друга системы дают уже необходимые и достаточные условия на выбор функций в сумме произведений (6). При этом нетрудно заметить, что решение системы (11) легко получить из решения системы (10) несложным комбинированием параметров a, b, c и k. Итак, займемся системой (10).

Легко проверить, что в предельных случаях $a = 0$ или $b = 0$ потенциал (6) вырождается в тривиальную комбинацию двух независимых простых кольцевых особенностей (4), рассмотренных выше. Исключим из второго уравнения в (10) функцию P, для этого из первого уравнения выразим P_z и затем P_{zz} при $a \neq 0$.

$$\begin{cases}P_z=\frac{1}{a}(Q+2(z-c)Q_z)\\ P_{zz}=\frac{1}{a}(3Q_z+2(z-c)Q_{zz}).\end{cases}$$

Дифференцируем теперь второе уравнение в системе (10)

$$3P_z+2(z-k)P_{zz}+bQ_{zz}=0$$

и подставляем сюда подсчитанные производные

$$(4(z-c)(z-k)+ab)Q_{zz}+$$
$$+(12z-6c-6k)Q_z+3Q=0.$$

Выделив в первой скобке полный квадрат

$$4\left(\left(z-\frac{c+k}{2}\right)^2+\frac{ab-(c-k)^2}{4}\right)Q_{zz}+$$
$$+12\left(z-\frac{c+k}{2}\right)Q_z+3Q=0$$

и введя новую независимую переменную ω вместо z и параметр m

$$\omega=z-\frac{c+k}{2} \qquad m^2=\frac{ab-(c-k)^2}{4},$$

получим уравнение для Q в наиболее компактной форме

$$(\omega^2+m^2)Q_{\omega\omega}+3\omega Q_\omega+\frac{3}{4}Q=0,$$

которое без труда интегрируется

$$Q=M\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2+m^2}+m}{\omega^2+m^2}}+N\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2+m^2}-m}{\omega^2+m^2}},$$

здесь M и N — "произвольные постоянные".

Выражая в системе (10) производную P_z из первого уравнения и подставляя ее во второе, получим представление для P

$$P=-\frac{1}{a}\left\{4(\omega^2+m^2)Q_\omega+\left(\omega+\frac{c-k}{2}\right)Q\right\},$$

доставляющее неизвестную функцию P в виде

$$P=\frac{2mM+(k-c)N}{a}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2+m^2}-m}{\omega^2+m^2}}+$$
$$+\frac{(k-c)M-2mN}{a}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2+m^2}+m}{\omega^2+m^2}}.$$

Функции R и T, являющиеся решением для системы (11), получаем заменой знака параметров c и k, перестановкой величин a и b, а также вводом новых постоянных интегрирования L и K вместо M и N, соответственно. Величина m при этом не меняется. Обозначив для удобства $\tilde{\omega}=\bar{z}+(c+k)/2$, получим окончательное решение системы (11) в виде

$$T=L\sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^2+m^2}+m}{\omega^2+m^2}}+K\sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^2+m^2}-m}{\omega^2+m^2}};$$

$$R=\frac{2mL-(k-c)K}{b}\sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^2+m^2}-m}{\omega^2+m^2}}+$$
$$+\frac{(c-k)L-2mK}{b}\sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^2+m^2}+m}{\omega^2+m^2}}.$$

Эти громоздкие выражения содержат одинаковые радикалы, поэтому для краткости целесообразно ввести следующие обозначения:

$$S = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + m^2} + m}{\omega^2 + m^2}} \quad \tilde{S} = \sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^2 + m^2} + m}{\tilde{\omega}^2 + m^2}}; \quad (12)$$

$$J = \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^2 + m^2} - m}{\omega^2 + m^2}} \quad \tilde{J} = \sqrt{\frac{\sqrt{\tilde{\omega}^2 + m^2} - m}{\tilde{\omega}^2 + m^2}}. \quad (13)$$

Теперь общее решение систем (10) и (11), содержащее восемь комплексных параметров M, N, K, L, a, b, c, k, запишется в следующей компактной форме

$$\begin{cases} P = \dfrac{2mM + (k-c)N}{a} J + \dfrac{(k-c)M - 2mN}{a} S \\ R = \dfrac{2mL - (k-c)K}{b} \tilde{J} + \dfrac{(c-k)L - 2mK}{b} \tilde{S} \end{cases}; \quad (14)$$

$$\begin{cases} Q = NJ + MS \\ T = KJ + LS \end{cases}. \quad (15)$$

Таким образом, в результате разделения переменных в уравнении Лапласа в виде суммы произведений

$$\varphi = P(z)R(\bar{z}) + Q(z)T(\bar{z}) \quad (16)$$

появилось новое многопараметрическое семейство гармонических функций.

Анализ радикалов (12) и (13) показывает, что вещественная и мнимая части потенциала (16) описывают поля уже с двумя кольцевыми особенностями, характером и положением которых можно независимо управлять, изменяя многочисленные параметры в выражениях (14) и (15). Потенциал (16) уже не сводится к известным классическим, хотя и представляется в элементарных функциях. Это может оказаться выгодным, например, при численном моделировании краевых эффектов в осесимметричных электронно-оптических системах, если принять в расчет характер особенностей полученных гармонических функций.

Последовательным дифференцированием по осевой координате из потенциала (16) может быть получена цепочка "обобщенных" мультиполей, гораздо более сложных по структуре, чем классические, с большим числом внутренних параметров. Отметим также, что представленное обобщение метода разделения переменных допускает расширение по представленной нами схеме на сумму трех, четырех и т. д. произведений. Разработка полной схемы такого обобщения, а также детальный анализ полученных при этом гармонических функций выходят за рамки данной работы.

Литература

1. *Голиков Ю. К., Григорьев Д. В., Шорина Т. А.*//Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 9. С. 23.

2. *Голиков Ю. К., Коломенков В. Ю.*: Труды ЛПИ. — Л., 1977. С. 95.

3. *Голиков Ю. К., Коломенков В. Ю.*//ЖТФ. 1980. Т. 50. № 10. С. 2061.

Generalization of the variables separation method in axisymmetric potential theory

Yu. K. Golikov, D. V. Grigorjev, N. K. Krasnova, K. V. Solovjev
St.-Petersburg State Polytechnic University, St.-Petersburg, Russia

The new analytical recipe which allows to generate a new class of elementary axisymmetric Laplace's potentials with circular singularities is proposed in this paper. Different electric configurations for various applications (for example, for usage in energy analysis) can be built on the base of these potentials.