

Метод параметризации точных уравнений электронных траекторий

С. Б. Бимурзаев, Е. М. Якушев

Институт ядерной физики Национального ядерного центра Республики Казахстан,
г. Алматы, Казахстан

Описан метод параметризации уравнений электронных траекторий, позволяющий представить решение точных уравнений как сумму решений параксиального уравнения и уравнений остатка. При выводе уравнений остатка не используется обычное в таких случаях разложение в ряд по степеням малых величин. Параксиальное уравнение и уравнения остатка приведены к виду, не содержащему особенностей, характерных для зеркальных и эмиссионных систем. Разработанный метод может быть с успехом использован для точного, неограниченного заданным порядком малости величин, расчета основных видов aberrаций — сферической и осевой хроматической.

Изучение фокусирующего действия электромагнитных полей — одна из основных проблем электронной оптики. Теоретическое исследование фокусирующих свойств, как правило, проводится на основе решения уравнения параксиальных траекторий, а оценка качества фокусировки — путем учета величин второго или третьего порядков малости, определяющих осевую хроматическую или сферическую aberrацию. При минимизации или корректировке этих видов aberrаций возникает проблема дальнейшего уточнения качества фокусировки. Принципиально это можно сделать путем разработки теории aberrаций высших порядков, однако этот путь очень трудоемкий. Другой путь — непосредственный расчет качества фокусировки электронных пучков по точным уравнениям. При этом семейство траекторий должно быть рассчитано с точностью, достаточной для изучения рассеяния частиц в окрестности наименьшего сечения пучка. Обеспечение необходимой точности численного расчета связано со значительными трудностями вычислительного характера. Эти трудности существенно усугубляются при расчете электронного зеркала, так как в окрестности точки поворота кривизна электронных траекторий неограниченно возрастает по мере приближения траекторий к оси зеркала.

Ниже описан метод параметризации уравнений электронных траекторий, позволяющий представить решение точного уравнения как сумму решений параксиального уравнения и уравнения остатка. Вывод уравнений остатка не ограничен заданным порядком малости величин. Метод демонстрируется на примере расчета электростатического электронного зеркала с вращательной симметрией.

Уравнения электронных траекторий

Введем цилиндрическую систему координат r, ψ, z , ось z которой совместима с осью симметрии

электрического поля, а через r и ψ обозначим радиальную и азимутальную координаты. Распределение скалярного электростатического потенциала зависит только от координат меридиональной плоскости r и z , $\varphi = \varphi(r, z)$, а уравнение нерелятивистского движения частицы заряда e и массы m в этой плоскости имеют вид:

$$\ddot{r} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\dot{r}^2 + \dot{z}^2 = 2 \frac{e}{m} (\varphi + \varepsilon). \quad (2)$$

Точками, как обычно, обозначено дифференцирование по времени t . Примем, что потенциал φ нормирован так, что он равен нулю в том месте пространства, где равна нулю скорость некоторой выбранной частицы. Вследствие разброса скоростей частиц в пучке, энергия любой другой частицы в этом месте равна $e\varepsilon$.

Сделаем два замечания:

уравнения (1) и (2) описывают только радиальные отклонения частиц от оси z . Такого описания достаточно для точного, неограниченного тем или иным порядком малости величин r и ε , расчета сферической и осевой хроматической aberrаций;

в случае наличия магнитного поля уравнения движения частиц имеют тот же вид, что и (1), (2). Отличие состоит только в том, что при наличии магнитного поля в уравнения (1), (2) вместо скалярного потенциала φ следует записать эффективный потенциал φ^* , равный

$$\varphi^*(r, z) = \varphi(r, z) - \frac{e}{2mc^2} A^2(r, z),$$

где $A = \psi$ — составляющая векторного потенциала \mathbf{A} ($A_r = A_z = 0$);

c — величина, численно равная скорости света в вакууме.

Принятые нами упрощения не имеют принципиального характера для существа описываемого метода, а используются лишь для того, чтобы облегчить его понимание и избежать излишней громоздкости.

При исследовании траекторий частиц в приосевой области обычно используется закон сохранения энергии (2) для исключения времени из уравнений движения и введения в качестве независимой переменной координаты оптической оси z . С этим преобразованием связано введение некоторых предположений, вытекающих из того обстоятельства, что в полученных уравнениях появляются структуры типа $\sqrt{\varphi + \varepsilon}$ и

$\sqrt{1 + (dr/dz)^2}$. Наличие этих структур при лиnearизации уравнений вынуждает принять наряду с требованием малости r следующие условия

параксиального приближения $\frac{\varepsilon}{\varphi} \ll 1$ и $\left| \frac{dr}{dz} \right| \ll 1$,

которые в окрестностях точек поворота электронных траекторий в электронном зеркале или в прикатодной области с очевидностью не могут быть удовлетворены. При таком преобразовании из рассмотрения исключаются зеркальные и эмиссионные системы.

В работе [1] предложен и в работах [2, 3] развит метод исследования электронно-оптических систем, позволяющий преодолеть указанные трудности. Мы будем следовать этому методу.

Рассмотрим поток движущихся частиц одинаковых удельных зарядов e/m , но несколько отличающихся друг от друга по начальным условиям. Частицу, движущуюся по оси z с $\varepsilon = 0$, будем называть центральной частицей. Положение центральной частицы в текущий момент времени будем обозначать через ζ . Тогда из соотношения (2) следует точное равенство

$$\dot{\zeta} = \sigma \sqrt{2 \frac{e}{m} \Phi(\zeta)}, \quad (3)$$

где $\Phi(\zeta)$ — та же функция аргумента ζ , что и $\Phi(z) = \varphi(0, z)$ — функция распределения потенциала вдоль оси z , а $\sigma = \frac{\dot{z}}{|z|}$ — знаковый множитель, характеризующий направление движения потока частиц вдоль оси z . Положение любой другой отклоненной от оси частицы в тот же момент времени будем характеризовать радиусом-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}$, проведенным к ней от центральной частицы. При этом имеет место равенство

$$z = \zeta + \eta. \quad (4)$$

Используя равенства (3) и (4), введем в уравнения (1) и (2) новую независимую переменную ζ и динамическую переменную η , исключив из этих уравнений t и z . Выполнив эти преобразования, получим:

$$\Phi r'' + \frac{1}{2} \Phi' r' = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (5)$$

$$\Phi \left[(1 + \eta')^2 + r'^2 \right] = \varphi + \varepsilon. \quad (6)$$

Здесь и далее штрихи обозначают дифференцирование по ζ .

Уравнения (5) и (6) записаны в такой форме, что позволяют отделить от точных уравнений уравнение параксиального приближения и корректно получить уравнения остатка, не опираясь на малость величин r , r' и ε . Положим, что пучок траекторий описывается уравнением

$$r = r_i (\rho + r_i^2 \chi), \quad (7)$$

где r_i — один из параметров траекторий, и потребуем, чтобы $\rho = \rho(\zeta)$ удовлетворяло уравнению параксиальных траекторий:

$$\Phi \rho'' + \frac{1}{2} \Phi' \rho' + \frac{1}{4} \Phi'' \rho = 0. \quad (8)$$

Подставим z и r в виде (4) и (7) в равенства (5) и (6) и разрешим уравнение (6) относительно η' . Тогда получим уравнения остатка в виде:

$$\Phi \chi'' + \frac{1}{2} \Phi' \chi' = \frac{1}{2 r_i^3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{2} r_i \Phi'' \rho \right) = H(\zeta, \eta, \varepsilon, r_i, \chi), \quad (9)$$

$$\eta' = \sqrt{\frac{\varphi(r, z) + \varepsilon - \Phi r'^2}{\Phi}} - 1. \quad (10)$$

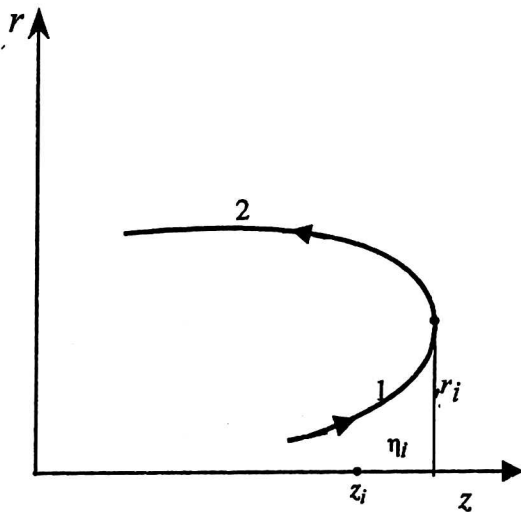
При выводе этих уравнений не вводились никакие дополнительные приближения по сравнению с исходной системой уравнений (1), (2). Поэтому решение системы уравнений (8)—(10) эквивалентно решению системы уравнений (1), (2). Вместе с тем, полученная система уравнений (8)—(10) качественно отличается от исходной (1), (2). Ее решение представлено в виде суммы решений: параксиального уравнения (8) $\rho = \rho(\zeta)$ и уравнений остатка (9), (10), где $\eta = \eta(\zeta)$ характеризует продольное (в направлении оси z) отклонение движения реальной частицы от параксиального движения, а $\chi = \chi(\zeta)$ — поперечное (в радиальном направлении) отклонение. Важно отметить, что правая часть уравнения (9) является величиной нулевого порядка относительно параметра r_i . Поэтому при численном анализе электронно-оптической системы качество фокусировки может быть рассчитано со столь же высокой степенью точности, как и параксиальные свойства (даже в предельном случае, когда $r_i \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$).

Расчет электронных линз путем численного интегрирования системы уравнений (8)—(10) не вызывает особых затруднений. В случае расчета электронных зеркал необходимо учесть изменение знакового множителя σ в процессе движения частиц. Это обстоятельство требует специального рассмотрения.

Электронное зеркало

Особенность электронного зеркала состоит в том, что вследствие отражения частиц все траектории пучка являются двухзначными функциями координаты z (рисунок). В этом случае численный расчет траекторий необходимо выполнить отдельно для падающей на зеркало частицы (прямая ветвь траектории, $\sigma = 1$) и отраженной частицы (обратная ветвь траектории, $\sigma = -1$) с учетом непрерывности траектории и сил, действующих на частицу, в точке поворота. Примем точку поворота в качестве начальной точки интегрирования и все величины, относящиеся к этой точке, будем отмечать индексом "i". Для характеристики поворота всего пучка как целого будем использовать точку z_i на оси z , определенную равенством $\Phi(z_i) = 0$, представляющую собой точку поворота центральной частицы. Координаты поворота другой частицы относительно этой точки будем определять величинами r_i, η_i . Примем, что в окрестности точки поворота $\Phi'(z_i) = \Phi'_i \neq 0$. Тогда на основании равенств (7), (9) в точке поворота можно написать

$$\rho_i = 1; \chi_i = 0; \chi'_i = \frac{H_i}{\Phi'_i}. \quad (11)$$



Двузначность траектории в окрестности точки поворота электронного зеркала:

1 — прямая ветвь ($\sigma = 1$); 2 — обратная ветвь ($\sigma = -1$)

Для вычисления начальных значений величин η_i, η'_i следует раскрыть в равенстве (10) возникающие при $\zeta \rightarrow z_i$ неопределенности типа $\frac{0}{0}$ и $0 \cdot \infty$. Выполнив эти процедуры, найдем, что

$$\eta'_i = \frac{\left. \frac{\partial \Phi(r, \zeta + \eta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=z_i}}{\Phi'_i} - 1,$$

а величина η_i определяется равенством

$$\Phi(r_i, z_i + \eta_i) + \varepsilon - (r_i W)^2 = 0.$$

Здесь

$$W = \sqrt{\Phi(pp' - p'\rho)} = \text{const} \quad (12)$$

инвариант Вронского, где $p = p(\zeta)$ — характерное для зеркала частное решение уравнения (8) с начальными условиями:

$$p_i = 1, \quad p'_i = -\frac{\Phi'_i}{2\Phi'_i}. \quad (13)$$

Отметим, что при численном интегрировании уравнений (8) и (9) необходимо их разрешить относительно второй производной искомой величины. При этом коэффициенты при первой производной и при свободном члене оказываются полюсами первого порядка в начальной точке интегрирования $\zeta = z_i$, что затрудняет непосредственное использование численных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Этим трудностям легко можно избежать путем замены переменных.

Рассмотрим решение уравнения (9). Учитывая начальные условия (11), будем искать величину $\chi(\zeta)$ в виде

$$\chi = i + \frac{2H_i}{\Phi'_i}(\zeta - z_i),$$

тогда для функции $i = i(\zeta)$ получим уравнение

$$\sqrt{\Phi}(\sqrt{\Phi'_i})' = H - H_i \frac{\Phi'}{\Phi'_i}.$$

Решение этого уравнения сводится к решению системы уравнений первого порядка

$$i' = \frac{v}{\sqrt{\Phi}}, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \left(H - H_i \frac{\Phi'}{\Phi'_i} \right) \quad (14)$$

с начальными условиями:

$$v_i = v'_i = i_i = i'_i = 0.$$

При этих начальных условиях система уравнений (14) свободна от особенностей во всей области интегрирования, включая точку $\zeta = z_i$.

Аналогично можно рассчитать частное решение $p = p(\zeta)$ уравнения (8) с начальными условиями (13). Для того чтобы найти решение $\rho = \rho(\zeta)$ параксиального уравнения (8), для которого $\rho' \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow z_i$ (см. рисунок) необходимо представить это решение в виде

$$\rho = p + bg. \quad (15)$$

Здесь $g = g(\zeta)$ — линейно независимое частное решение уравнения (8), имеющее вид

$$g = \sigma \sqrt{\Phi} q,$$

а функция $q = q(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi q'' + \frac{3}{2} \Phi' q' + \frac{3}{4} \Phi'' q = 0 \quad (16)$$

с начальными условиями в точке $\zeta = z_i$:

$$q_i = 1, \quad q_i' = -\frac{\Phi_i'}{2\Phi_i}. \quad (17)$$

Решение уравнения (16) с начальными условиями (17) аналогично решению уравнения паракиальных траекторий (8) для функции $p(\zeta)$ с начальными условиями (13).

Отметим, что функции $p = p(\zeta)$ и $g = g(\zeta)$ представляют собой фундаментальную систему частных решений дифференциального уравнения (8) при наличии особой точки, характерной для электронного зеркала, в которой $\Phi(z_i) = 0$, $\Phi_i' \neq 0$. Входящую в (15) постоянную b найдем, подставив $p(\zeta)$ в виде (15) в соотношение (12):

$$b = \frac{2W}{\Phi_i'}.$$

Интегрирование уравнений (8)–(10) дает решения в виде зависимостей координат r и z от переменного параметра ζ :

$$r = r(\zeta, \varepsilon, r_i, W), \quad z = z(\zeta, \varepsilon, r_i, W).$$

Постоянные параметры траектории r_i и W следует вычислить при заданном положении предметной точки на оси зеркала и заданном наклоне прямой ветви ($\sigma = -1$) траектории к оси в этой точке, используя уравнения

$$z = z_0, \quad r(z_0) = 0, \quad \left(\frac{dr}{dz}\right)_0 = \operatorname{tg} \alpha_0,$$

где $z = z_0$ — плоскость предмета, а α_0 — угол вылета частицы.

Положение плоскости гауссова изображения $z = z_G$ и рассеяние частиц в этой плоскости $r = r_G$ определяются системой уравнений для обратной ветви ($\sigma = -1$) траектории из условий:

$$p(z_0)g(z_G) + p(z_G)g(z_0) = 0;$$

$$r_G = r_i(p(\zeta_G) + r_i^2 \chi(\zeta_G)),$$

$$z_G = \zeta_G + \eta(\zeta_G).$$

Расчеты существенно упрощаются, если считать, что предмет и его изображение находятся в свободном от поля пространстве. При этом прямолинейные участки траекторий являются линейными функциями переменной ζ и легко могут быть представлены в виде явных зависимостей от z .

Расчеты

В качестве примера используем полученную систему уравнений (9)–(10) для расчета такого электронного зеркала, о котором *a priori* известно, что его сферическая aberrация третьего порядка малости равна нулю. Такой расчет позво-

лит проверить корректность выводов существующей теории aberrаций и рассчитать качество фокусировки с учетом величин высших порядков малости, не учитываемых этой теорией.

Рассчитано трехэлектродное асферичное зеркало [4], электродами которого служат соосные цилиндры равного диаметра d . При расчете принимается, что первый и третий электроды с потенциалами V_1 и V_3 , соответственно, представляют собой полубесконечные цилиндры, ширина второго электрода с потенциалом V_2 равна l , а зазор между электродами считается бесконечно малыми. Расчет выполнен для случая $l = 0,4 d$, $V_2 = -0,07 V_1$, $V_3 = -0,319 V_1$, при котором в фокальной плоскости $z = z_F$ рассматриваемого зеркала сферическая aberrация третьего порядка равна нулю. В этом случае фокусное расстояние зеркала и положение его фокуса, соответственно, равны: $f = 1,55 d$ и $z_F = -0,964 d$. Положительное направление оси z совпадает с направлением падающего пучка, а начало координат находится в середине зазора между первым и вторым электродами.

В таблице представлены значения функции рассеяния частиц в фокальной плоскости падающего на зеркало первоначально параллельного пучка в зависимости от отклонения $r = r_i$ частиц от оси зеркала в точке поворота. Расчеты показывают, что рассеяние частиц хорошо описывается параболой пятого порядка:

$$\frac{r(z_F)}{d} \approx 107 \left(\frac{r_i}{d}\right)^5.$$

Функция рассеяния частиц в фокальной плоскости асферичного электронного зеркала

r_i/d	$r(z_F)/d$	r_i/d	$r(z_F)/d$
0,01	$1,17 \cdot 10^{-8}$	0,11	$1,74 \cdot 10^{-3}$
0,02	$3,49 \cdot 10^{-7}$	0,12	$2,59 \cdot 10^{-3}$
0,03	$2,61 \cdot 10^{-6}$	0,13	$4,02 \cdot 10^{-3}$
0,04	$1,10 \cdot 10^{-5}$	0,14	$5,85 \cdot 10^{-3}$
0,05	$3,34 \cdot 10^{-5}$	0,15	$8,29 \cdot 10^{-3}$
0,06	$8,32 \cdot 10^{-5}$	0,16	$1,15 \cdot 10^{-2}$
0,07	$1,80 \cdot 10^{-4}$	0,17	$1,57 \cdot 10^{-2}$
0,08	$3,51 \cdot 10^{-4}$	0,18	$2,11 \cdot 10^{-2}$
0,09	$6,33 \cdot 10^{-4}$	0,19	$2,79 \cdot 10^{-2}$
0,1	$1,07 \cdot 10^{-3}$	0,2	$3,67 \cdot 10^{-2}$

Из приведенных данных следует, что рассеяние частиц третьего порядка малости действительно незначительны. Это подтверждает правильность aberrационной теории [3], используемой в работе [4]. Некоторые отклонения функции рассеяния от параболы пятого порядка наблюдаются при значениях $r_i \geq 0,15 d$, что связано с влиянием aberrаций высших порядков. Отметим, что для рассматриваемого зеркала расстояние r_0 траектории падающей на зеркало частицы от оси и угол α_1 между осью и траекторией этой частицы после отражения от зеркала связаны с параметром r_i следующим соотношением:

$$r_0 = f \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0,73 r_i.$$

Это соотношение позволяет представить функцию рассеяния частиц в фокальной плоскости зеркала в виде парабол пятого порядка

$$r(z_F) = B_s^{(5)} r_0^5 \text{ и } r(z_F) = C_s^{(5)} \alpha_1^5,$$

где $B_s^{(5)}$ и $C_s^{(5)}$ — коэффициент и постоянная сферической аберрации пятого порядка, соответственно.

Литература

1. Кельман В. М., Федупина Л. В., Якушев Е. М. Теория электростатических цилиндрических электронных зеркал//ЖТФ. 1971. № 41. С. 1489.
2. Дауменов Т., Кельман В. М., Якушев Е. М. Новый метод определения характеристической функции для заряженных частиц, движущихся в электронно-оптических системах с прямой оптической осью//Там же. 1978. № 48. С. 2447.
3. Yakushev E. M. and Sekunova L. M. Theory of Electron Mirrors and Cathode Lenses//Adv. Electronics and Electron Physics. 1986. № 68. P. 337.
4. Bimurzaev S. B., Serikbaeva G. S., Yakushev E. M. Electrostatic Mirror Lens with Eliminated Spherical and Axial Chromatic Aberrations//JEM, 2003. В печати.

Method of a parameterization for the precise equations of electron trajectories

S. B. Bimurzaev, E. M. Yakushev

Institute for Nuclear Physics of the National Nuclear Center, Alma-Ata, Kazakhstan

The method of parameterization for the equations of electronic trajectories is circumscribed. It allows to present the solution of the precise equations as the total of the solutions of the paraxial equation and equations of the heels. The deduction of the equations of the remainder does not utilize a series development on degrees of smalls, customary in such cases. The paraxial equation and the equations of the remainder are given in a kind, which is not containing of features, reference for reflecting and emissive systems. The designed method can with success be utilized for precise, not by a restricted given order of smallness of quantities, calculation of the basic kinds of aberrations — spherical and axial chromatic.