

УДК 621.385,537.533

## Повышение точности расчета интенсивных пучков заряженных частиц

В. М. Свешников

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
г. Новосибирск, Россия

*Предложены и реализованы численные алгоритмы расчета интенсивных пучков заряженных частиц с повышенной точностью, основанные на выделении особенности вблизи катода путем декомпозиции исходной области на прикатодную и основную подобласти. Расчеты в прикатодной области проводятся на основе антипараксиальной теории В. А. Сырового, адекватно отражающей поведение решения, а в основной области — по численным алгоритмам. Даны примеры численных расчетов тестовых задач.*

Пучок заряженных частиц в режиме ограничения тока пространственным зарядом, как известно, имеет вблизи катода особенность вида  $r^{\frac{4}{3}}$ , где  $r$  — расстояние от текущей точки до катода. Численные алгоритмы и программы для решения данной задачи обычно строятся без учета прикатодной особенности, что может не обеспечить достаточной точности расчетов. Измельчение разностной сетки, на которой ищется

решение, в этом случае приводит к скачкам погрешности, сопровождающимся ее возрастанием, а не уменьшением [1, 2]. Впервые вопрос о выделении особенности в решении данных задач был рассмотрен в работе [3] на примере решения модельной задачи о плоском диоде. Однако, как показано в настоящей работе, предлагаемые в [3] алгоритмы не приводят к уменьшению погрешности с уменьшением шага сетки в численных расчетах.

Для нахождения плотности тока при решении самосогласованной задачи обычно используется закон "3/2" для плоского диода [4] в виде, который можно назвать непоследовательным. Действительно, по модели плоского диода определяется только плотность тока, а все остальные величины находятся из решения многомерной, в нашем случае двумерной задачи, в том числе и вблизи особой поверхности катода.

В данной работе предложены и реализованы численные алгоритмы расчета интенсивных пучков заряженных частиц с повышенной точностью, основанные на выделении особенности вблизи катода путем декомпозиции исходной области на прикатодную и основную подобласти. Идея данного подхода была сформулирована в работе [5] без указания конкретных способов реализации. Прикатодную подобласть предлагается строить топологически эквивалентной прямоугольной, что обеспечивает равное удаление точек старта частиц в основной подобласти от особой поверхности катода. Решение в прикатодной подобласти ищется на основе антипараксиальных разложений В. А. Сырового [6] по распределению напряженности электрического поля на коллекторе, которые учитывают кривизну эмиттера и неоднородность плотности тока. Разрешение антипараксиальных соотношений изложено в [7]. В основной подобласти решение находится разностными методами на прямоугольной сетке. Такой выбор последней сделан преднамеренно с целью выделить влияние предлагаемого алгоритма на точность расчетов даже в простейшем случае. Решение задачи осуществляется в результате проведения итерационного процесса по подобластям. Для автоматизации вычислений создана структура данных, позволяющая скрыть декомпозицию расчетной области от стороннего пользователя.

Даются результаты численных экспериментов на тестовых задачах, свидетельствующие о том, что погрешность решения монотонно уменьшается с измельчением сетки, достигая сотых и даже тысячных долей процента.

### Постановка задачи

Задача расчета интенсивного стационарного пучка заряженных частиц рассматривается в замкнутой двумерной области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , где  $\Gamma$  — граница области  $G$ .

Математическая постановка задачи заключается в том, что в  $\bar{G}$  требуется найти решение системы дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнение Пуассона, уравнения движения заряженных частиц и уравнение неразрывности потока зарядов

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}; \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \beta \vec{E}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad \vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \beta = \frac{e}{m}; \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \rho \vec{v} \quad (3)$$

с краевыми

$$\varphi|_{\Gamma_1} = g(\vec{r}), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0 \quad (4)$$

и начальными

$$\vec{r}|_{t=0} = \vec{r}_0, \quad \vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0 \quad (5)$$

условиями.

Здесь  $\varphi, \vec{E}$  — потенциал и напряженность электрического поля;

$\vec{r}, \vec{v}, \beta$  — радиус-вектор, скорость и отношение заряда к массе заряженной частицы, соответственно;

$\vec{r}_0, \vec{v}_0$  — координаты и скорости частицы в начальный момент времени;

$\vec{j}$  — плотность тока;

$g(\vec{r})$  — известная функция;

$\Gamma_1, \Gamma_2$  — куски границы  $\Gamma$ , причем  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ;

$\vec{n}$  — нормаль к  $\Gamma_2$ ;

$t$  — время;

$\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная.

Решение задачи проводится в декартовых  $x, y$  или цилиндрических  $r, z$  координатах, причем в последнем случае расчетная область предполагается осесимметричной.

Наиболее важным для практики является случай, когда катод работает в режиме ограничения тока объемным зарядом, тогда задача (1)–(5) решается со следующими условиями:

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Gamma_k} = 0, \quad \left. \vec{E} \right|_{\Gamma_k} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_k} = 0, \\ \vec{v}|_{t=0} = 0, \quad \Gamma_k \subset \Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

т. е. на катоде, помимо условия для потенциала, задается еще и условие равенства нулю напряженности электрического поля. При этом плотность тока на катоде является неизвестной величиной, которая подлежит определению. Как правило, задача (1)–(6) решается численно, и этому посвящено много работ [4]. Ниже рассматриваются вопросы повышения точности решения данной задачи.

### Краткий обзор алгоритмов решения задачи

**Одномерная задача.** В одномерном случае И. Ленгмюром [8] были найдены аналитические решения задачи (1)–(6) для плоского, сфериче-

ского и цилиндрического диодов. Для первых двух случаев это решение можно записать следующим образом. В плоском диоде  $0 \leq x \leq d$  с потенциалом анода  $\varphi_a$ , где  $d, \varphi_a$  — заданы, плотность тока  $j$  и текущий потенциал  $\varphi$  выражаются как

$$j = c_j \frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2}, \quad \varphi = \varphi_a \left( \frac{x}{d} \right)^{4/3}, \quad \varphi(d) = \varphi_a, \quad (7)$$

а в сферическом диоде  $r_a \leq r \leq r_k$ , где  $r_a, r_k$  — соответственно, радиусы анода и катода, решение определяется по формулам

$$j = c_j \frac{\varphi_a^{3/2}}{[-\alpha(r_a)]^2 r_k^2}, \quad \varphi = \varphi_a \left[ \frac{-\alpha(r)}{-\alpha(r_a)} \right]^{4/3}. \quad (8)$$

Здесь  $c_j$  — константа, зависящая от сорта частиц, например для электронов  $c_j \approx 2,33 \cdot 10^{-6}$ , а  $\alpha$  — функция Ленгмюра, которая представима в виде следующего ряда

$$-\alpha = -\mu + 0,3\mu^2 - 0,075\mu^3 + 0,0143182\mu^4 - 0,0021609\mu^5 + 0,00026791\mu^6 - \dots, \quad (9)$$

где  $\mu = \ln \frac{r}{r_k}$ .

Решение задачи (1)–(6) для цилиндрического диода не вносит принципиально нового в рассматриваемые ниже алгоритмы, и поэтому здесь не приводится.

В работе [9] получено точное аналитическое решение задачи (1)–(5) для заданной плотности тока (при этом напряженность электрического поля на катоде в общем случае отлична от нуля).

**Двухмерная задача.** В многомерном, в частности, в двухмерном случае рассматриваемая задача для практически важных расчетных областей чаще всего решается численно. В данном случае дается краткий обзор используемых численных конечно-разностных алгоритмов на прямоугольных неравномерных сетках (более подробно см. [4]). Выбор именно прямоугольных сеток сделан не случайно, а преднамеренно с целью показать влияние алгоритмов, предлагаемых ниже, на точность расчетов при простейших аппроксимациях.

Покроем  $G$  прямоугольной неравномерной сеткой  $\Omega_h = \{x_i, y_j, i = 1, 2, \dots, m_x, j = 1, 2, \dots, m_y, x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m_x}, y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_{m_y}\}$ .

Отметим, что через  $j$  обозначен номер координатной линии, и здесь и в дальнейшем  $r = x, z = y$ . На  $\Omega_h$  построим систему пятиточечных разностных уравнений

$$P_{i,j}^1 u_{i-1,j}^k + P_{i,j}^2 u_{i,j-1}^k + P_{i,j}^3 u_{i+1,j}^k + P_{i,j}^4 u_{i,j+1}^k - P_{i,j}^0 u_{i,j}^k = f_{i,j}, \quad (10)$$

аппроксимирующее уравнение Пуассона (1) с граничными условиями (4).

Здесь  $P_{i,j}^k, k = 0, 1, 2, 3, 4$  — известные коэффициенты;

$u_{i,j}$  — приближенное значение искомого потенциала  $\varphi$ .

Систему (10) можно записать в матричном виде

$$Au = f, \quad (11)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов  $P_{i,j}^k, u = \{u_{i,j}\}$  — искомый и  $f = \{f_{i,j}\}$  — заданный векторы.

Уравнение (11) решаем каким-либо итерационным методом, каноническая форма которого есть

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\theta_{n+1}} + Au^n = f, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где  $B$  — известная матрица, а  $\theta_n$  — итерационные числовые параметры.

Для вычисления потенциала в произвольной точке  $(x, y) \in \bar{G}$  строится многочлен вида

$$u(x, y) = a_0'' + a_1''(x - x_i) + a_2''(y - y_j) + a_3''(x - x_i)(y - y_j), \quad (13)$$

где  $x_i, y_j$  — координаты левого нижнего угла сеточного прямоугольника  $P_{ij}$  такого, что  $(x, y) \in P_{i,j}$ .

Вычисление производных от потенциала, необходимых для расчета напряженности электрического поля, проводится по следующему алгоритму. Например, для расчета  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  находится узел сетки  $(i_n, j_l)$  такой, что  $|x - x_{i_n}| \leq \frac{1}{2}(x_{i_{n+1}} - x_{i_n}), y_{j_l} \leq y \leq y_{j_{l+1}}$ , т. е. узел, который является ближайшим по  $x$  и левым нижним по  $y$  (рис. 1).

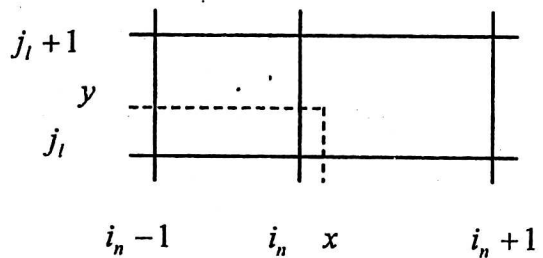


Рис. 1. К расчету производных

Вдоль координатных линий производные аппроксимируются трехточечными соотношениями вида

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=y_j} \approx \frac{1}{h_i^x + h_{i-1}^x} \left[ \frac{h_{i-1}^x + 2(x-x_i)}{h_i^x} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{h_i^x - 2(x-x_i)}{h_{i-1}^x} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right]; \quad (14)$$

$$i = i_n, \quad j = j_l, \quad h_i^x = x_{i+1} - x_i,$$

а между координатными линиями проводится линейная интерполяция. Если при этом ближайший узел лежит на границе области, то соотношения (14) заменяются на экстраполяционные формулы.

Для вычисления  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  применяется аналогичный алгоритм.

Пучок заряженных частиц представляется в виде бесконечно тонких трубок тока или нитей.

Уравнения движения интегрируются численно с вычислением напряженности электрического поля в промежуточной точке

$$\frac{\bar{r}^{k+1} - \bar{r}^k}{\tau_k} = \frac{\bar{v}^{k+1} + \bar{v}^k}{2}, \quad \frac{\bar{v}^{k+1} - \bar{v}^k}{\tau_k} =$$

$$= \beta \bar{E}(\bar{r}^{k+1/2}), \quad \bar{r}^{k+1/2} = \bar{r}^k + \frac{\tau_k}{2} \bar{v}^k,$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Объемный заряд  $q$  с какого-либо участка траектории разносится по узлам, ближайшим к его центру  $(x, y)$ , по формулам:

$$q_{i,j} = \frac{(x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y)}{h_i^x h_j^y} q;$$

$$q_{i+1,j} = \frac{(x - x_i)(y_{j+1} - y)}{h_i^x h_j^y} q;$$

$$q_{i+1,j+1} = \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{h_i^x h_j^y} q;$$

$$q_{i,j+1} = \frac{(x_{i+1} - x)(y - y_j)}{h_i^x h_j^y} q,$$

где  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$ .

### Методы отыскания плотности тока

Методы отыскания плотности тока при решении задачи (1)–(6) можно разбить на две группы.

К первой группе относятся методы, обеспечивающие выполнение условия равенства нулю напряженности электрического поля на катоде. Здесь в первую очередь необходимо отметить работы Г. Т. Головина [10] и Н. И. Мокина [11]. Данному вопросу посвящена также работа [9],

в которой предлагается подойти к проблеме нахождения плотности тока как к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\Phi(E(j)) = 0, \quad (15)$$

где  $\Phi$  — заданная функция от напряженности электрического поля на катоде.

Такой подход открывает возможность применения известных итерационных методов для решения нелинейных уравнений, что позволяет избежать трудностей, с которыми сталкивался Г. Т. Головин в своих работах. В [9] найден вид функции  $\Phi$ , обеспечивающий сходимость метода Ньютона для решения уравнений (15), которая в одномерном случае строго доказана.

Ко второй группе относятся методы, использующие закон "3/2" для плоского диода, при этом строится итерационный процесс нижней релаксации

$$j^{n+1} = \omega j^{n+1/2} + (1 - \omega) j^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

где  $\omega$  — заданное число, причем на каждой итерации плотность тока вычисляется по закону "3/2".

Потенциал  $\phi_a$ , входящий в (7), рассчитывается на заданном малом расстоянии  $d$  от катода из решения двухмерной задачи по интерполяционным формулам вида (13). Такому подходу можно дать следующую интерпретацию. Прикатодная область представляется в виде совокупности  $N_T$  плоских диодов, в каждом из которых потенциал анода постоянен ( $N_T$  — число траекторий, стартовых с катода), т. е. на аноде потенциал аппроксимируется кусочно-постоянной функцией.

Использование закона "3/2" для плоского диода при решении двухмерных задач приводит к ошибкам по следующим трем причинам:

- криволинейность катода;
- неоднородность плотности тока вдоль катода;
- особенность решения задачи вблизи катода.

Последнее обстоятельство следует непосредственно из формулы (7). Действительно, если дважды продифференцировать по  $x$  выражение для потенциала, то станет ясно, что плотность объемного заряда на катоде обращается в бесконечность.

Впервые вопрос о выделении прикатодной особенности был рассмотрен в работе [3]. В ней для расчета потенциала предлагалось использовать балансные схемы, причем в прикатодной области коэффициенты разностных уравнений и правая часть умножались, соответственно, на величины  $\lambda_\phi, \lambda_q$ , определяемые как

$$\lambda_\phi = \frac{\phi'}{\phi'_h}; \quad \lambda_q = \frac{I_p}{I_{p,h}}, \quad (17)$$

где  $\phi'$  — точное значение производной от потенциала;

$\phi'_h$  — ее разностная аппроксимация;

$I_p$  — точное значение интеграла от правой части;

$I_{p,h}$  — его аппроксимация, причем  $\varphi'$ ,  $I_p$  берутся из решения для плоского диода.

На примере расчета потенциала в модельной задаче о плоском диоде была продемонстрирована высокая эффективность предлагаемого подхода, при этом использовались аналитические выражения для плотности объемного заряда. В реальных расчетах помимо решения разностных уравнений (10), мы имеем дело со следующими вычислительными задачами:

- расчет напряженности электрического поля;
- интегрирование уравнений движения;
- расчет объемного заряда, в которых также необходимо учитывать прикатодную особенность.

Чтобы убедиться, насколько велико влияние особенности в решении данных задач, автором настоящей статьи были проведены эксперименты по численному решению задачи о плоском диоде с параметрами  $0 \leq x \leq 1, \varphi_a = 1$  по алгоритмам, приведенным выше. В табл. 1 даны значения относительной погрешности  $\delta_\varphi$  % расчета потенциала в процентах, которая вычислялась по формулам

$$\delta_\varphi \% = \max_i \delta_i^\varphi \%, \quad \delta_i^\varphi \% = \left| \frac{u_i - \varphi_i}{\varphi_i} \right|, \quad (18)$$

где  $\varphi'_i$  — точное, а  $u_i$  — приближенные значения потенциала.

Задача решалась на сетках с различным числом узлов  $N_i^h, i = 1, 2, 3, 4$ .

Таблица 1

Расчет одномерного плоского диода

$N_i / N_i^h$	16	32	64	128
1	1,2	1,8	2,5	3,2
2	0,50	0,60	0,73	1,4

В данной таблице цифрой "1" обозначен расчет без выделения особенности, а цифрой "2" — расчет с выделением особенности в разностных уравнениях по формулам (17), при этом прикатодное расстояние было равно  $d = \frac{1}{8}$ .

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что погрешности в расчетах "2" меньше соответствующих погрешностей в расчетах "1", но в том и в другом случае они не только не падают с уменьшением шага сетки, а, наоборот, даже возрастают.

Кроме перечисленных ошибок, следует отметить, что применение закона "3/2" для плоского диода при решении двумерных задач в итерационном процессе (16) является в принципе не последовательным. Основой его использования служит утверждение, что на малом расстоянии от катода распределение потенциала вдоль нормали к поверхности катода ведет себя приблизи-

тельно так же, как в плоском диоде. Это действительно так, но данное положение используется только при нахождении плотности тока, а потенциал, напряженность и объемный заряд вычисляются из решения двумерной задачи. При этом объемный заряд вблизи катода огромен, а потенциал, наоборот, мал по сравнению с их значениями вне прикатодной области, что приводит к большим ошибкам в расчетах вблизи катода и, как следствие, к существенным ошибкам в расчете пучка заряженных частиц в целом. На наличие данных ошибок указывалось в работе [1]. Их устранению не помогает введение локально-модифицированных сеток и специальных аппроксимаций потенциала, как это показано в работе [2].

Еще раз подчеркнем, что применение закона "3/2" для плоского диода для решения двумерных задач в той форме, о которой шла речь выше, является не последовательным, и эта не последовательность заключается в том, что он используется только для нахождения плотности тока, а все остальные искомые величины определяются из решения двумерной задачи. То, что все-таки закон "3/2" широко используется при численном решении задачи (1)–(6), можно объяснить простотой его реализации. В связи с этими обстоятельствами более естественным представляется алгоритм, предложенный ниже.

### Метод итераций по подобластям

Идея предлагаемого подхода была сформулирована в работе [5] без указания конкретных численных алгоритмов и способов их реализации. Там же прикатодная область выбиралась в виде криволинейного треугольника. Однако при такой форме прикатодной области с удалением от центра пучка к периферии расстояние по нормали к эмиттеру до границы прикатодной области стремится к нулю, т. е. фактически особенность для периферийных траекторий не учитывается. Это является недопустимым, так как периферийные траектории несут наибольший ток, и ошибки в их расчете, вызванные прикатодной особенностью, могут привести к существенным ошибкам в решении задачи в целом.

В настоящей работе предлагается выбирать прикатодную область топологически эквивалентной прямоугольной, что обеспечивает равное удаление стартовой поверхности траекторий от особой поверхности эмиттера.

Суть предлагаемого подхода заключается в следующем. Разобьем расчетную область  $G$  на две подобласти  $G_k$  и  $G_p$  такие, что  $G = G_k \cup G_p$  (в дальнейшем  $G_k$  будем называть прикатодной подобластью, а  $G_p$  — основной подобластью). Обозначим через  $\Gamma_p^\sigma$  границу между  $G_k$  и  $G_p$ , которая

состоит из двух кусков —  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_p^n$ , т. е.  $\Gamma_p^\sigma = \Gamma_p \cup \Gamma_p^n$ . Граница  $\Gamma_p$  представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от эмиттера на расстояние  $d$  по нормали к нему, а  $\Gamma_p^n$  — это отрезки нормали, ограничивающие пучок.

Для решения исходной задачи (1)–(6) в  $G$  построим итерационный процесс, который можно представить в виде последовательности шагов.

**Шаг 1.** На сетке  $\Omega_h$ , покрывающей всю область  $G$ , ищется решение уравнения Лапласа для потенциала  $\phi$  с заданными граничными условиями, т. е. рассчитывается "холодное" поле без пучка.

**Шаг 2.** Определяется напряженность поля  $E^{\frac{1}{2}}$  на коллекторе  $\Gamma_p$ , и там же вычисляется  $E^1 = \omega_p E^{\frac{1}{2}}$ , где  $0 < \omega_p \leq 1$  — заданный числовой параметр.

Последующие шаги выполняются итеративно, поэтому величины, входящие в их описание, имеют верхний индекс  $n = 1, 2, \dots$

**Шаг 3.** По аналитическим формулам (каким именно, будет изложено ниже), используя  $E^n$ , строится решение в  $G_k$ , в том числе находится потенциал  $\phi^n$  на всей границе  $\Gamma_p^\sigma$ , и определяются начальные условия для пучка заряженных частиц.

**Шаг 4.** Численно решается исходная задача в  $G_p$ , причем на  $\Gamma_p^\sigma$  ставится граничное условие Дирихле  $\phi = \phi^n$ , а пучок заряженных частиц стартует с  $\Gamma_p$ .

**Шаг 5.** На  $\Gamma_p$  пересчитывается напряженность поля  $E^n$  по формуле

$$E^{n+1} = \omega_p E^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \omega_p) E^n. \quad (19)$$

**Шаг 6.** Действия, выполняемые в шагах 3–5, повторяются до тех пор, пока не окажется, что

$$\max |E^{n+1} - E^n| < \varepsilon,$$

где максимум берется по всем расчетным точкам на  $\Gamma_p$ , а  $\varepsilon$  — заданная малая величина. Назовем итерации (19) внешними в отличие от внутренних итераций (12).

Приведенный алгоритм обеспечивает удаление стартовой поверхности пучка заряженных частиц от особой поверхности катода, но в данном виде значительно сложнее в реализации по сравнению с законом "3/2", что является серьезным тормозом в его практическом применении. Указанный недостаток существенен в универсальных пакетах прикладных программ, расчеты

по которым проводит пользователь, несведущий в тонкостях численного алгоритма. Ниже излагается структура данных, которая позволяет упорядочить реализацию предлагаемого алгоритма.

Представим множество узлов  $\Omega_h$  в виде  $\Omega_h = \Omega_k^h \cup \Omega_p^h$ , где  $\Omega_k^h$  — множество узлов прикатодной области, а  $\Omega_p^h$  — множество узлов основной области (рис. 2).

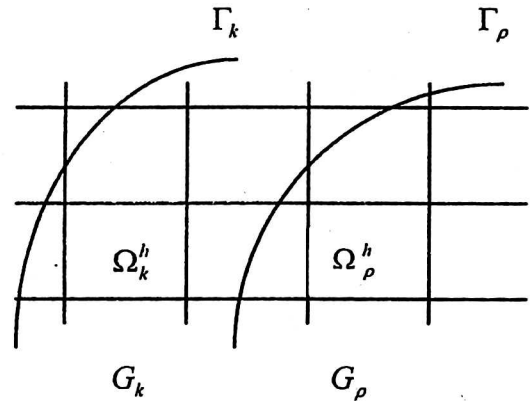


Рис. 2. Декомпозиция расчетной области

В узлах  $\Omega_k^h$  решение пересчитывается по аналитическим формулам на каждой внешней итерации, а при проведении внутреннего итерационного процесса (12) для расчета потенциала в  $G_p$  оно остается неизменным. Фактически потенциал на  $\Omega_k^h$  используется в качестве граничного условия Дирихле для уравнений (10), построенных в узлах  $\overline{\Omega_p^h} \subset \Omega_p^h$ , имеющих в качестве соседа хотя бы один узел из  $\Omega_k^h$ . Указанное разбиение выполняется достаточно просто: к  $\Omega_k^h$  относятся узлы, отстоящие от катода на расстояние, меньшее заданного расстояния  $d$ , и в приведенном выше алгоритме выполняется один раз на шаге 3.

Такой подход упрощает реализацию алгоритма итераций по подобластям, делая ее сравнимой с реализацией закона "3/2", так как при этом не происходит фактического разбиения расчетной области, а декомпозиция осуществляется на сеточном уровне.

Обратимся теперь к вопросу о выборе аналитической теории, по которой проводятся вычисления в  $G_k$ . Идя по пути упрощения численных алгоритмов, можно предположить, что для этих целей достаточно использовать модель плоского диода. Ведь особенность при этом будет учтена, и численное решение будет проводиться на конечном расстоянии от особой поверхности. Для выяснения того, насколько справедливо данное предположение, автором настоящей статьи были проведены численные эксперименты по решению модельной задачи о сферическом диоде в

одномерной постановке со следующими значениями параметров:

$$r_k = 2, r_a = 1; d_k = \frac{r_k - r_a}{2^{k+1}}; k = 1, 2, 3; \quad (20)$$

$$N_i^h = 2^{i+3}; i = 1, 2, 3, 4,$$

где  $d_k$  — прикатодные расстояния;

$N_i^h$  — число узлов сетки.

В табл. 2 даны относительные погрешности расчета потенциала, вычисленные по формулам (18).

Таблица 2

Решение одномерного сферического диода с расчетом прикатодной области по модели плоского диода

$d_k / N_i^h$	16	32	64	128
1/4	15	16	16	16
1/8	3,6	4,9	5,3	5,5
1/16	2,7	2,3	2,4	3,9

Из данной таблицы следует, что при большом прикатодном расстоянии  $d_k$  погрешности велики, с уменьшением  $d_k$  они также уменьшаются, но во всех случаях погрешности "не чувствуют" измельчения сетки, что говорит о недостаточной точности модели плоского диода и при таком подходе с выделением прикатодной особенности.

Выходом из данной ситуации служит применение антипараксиальных разложений В. А. Сырового, которые дают адекватное решение в прикатодной области с учетом криволинейности катода и неоднородности плотности тока. Запишем их в виде

$$\varphi_a = \left( \frac{j}{c_j} \right)^{\frac{2}{3}} s^{\frac{4}{3}} (F_\varphi^L + s^2 L_\varphi j), \quad (21)$$

где  $\varphi_a$  — потенциал на  $\Gamma_p$ ;

$s$  — расстояние, отсчитываемое вдоль нормали к эмиттеру, причем  $s \leq d$ ;

$F_\varphi^L$  — член, содержащий величины, учитывающие криволинейность эмиттера;

$L_\varphi$  — дифференциальный оператор, действующий на искомую функцию;

$j$  — плотность тока на катоде (по поводу конкретных выражений для  $F_\varphi^L, L_\varphi$  см. ниже).

Дифференцируя (21) по  $s$ , получим аналогичное разложение для нормальной составляющей напряженности электрического поля  $E_s$  на  $\Gamma_p$ .

$$E_s = \left( \frac{j}{c_j} \right)^{\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{3}} (F_E^L + s^2 L_E j). \quad (22)$$

Применяя антипараксиальную теорию к расчету прикатодной области в предлагаемом алго-

ритме, потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$d = K_s h, K_s > 1. \quad (23)$$

Конкретный вид членов, входящих в (21) и (22), способ разрешения этих соотношений, а также расчет прикатодной области в целом приводятся в предыдущей статье [7] автора в данном выпуске журнала.

### Численные эксперименты

В проведенных численных экспериментах решались модельные задачи по алгоритму, предложенному в настоящей статье. Были рассмотрены задачи о сферическом диоде в одномерной и двухмерной постановках и о потоке Мельтцера [12]. Во всех этих задачах учитывалась прикатодная особенность. На примере решения задачи о сферическом диоде демонстрируется влияние учета криволинейности катода на точность решения, а на примере задачи о потоке Мельтцера — влияние неоднородности плотности тока (катод в последней задаче является прямолинейным).

Помимо погрешности вычисления потенциала, которая рассчитывалась по формулам (18), исследовалось также поведение относительной погрешности  $\delta_j$  % вычисления плотности тока

$$\delta_j \% = \max_i \delta_i^j \%, \delta_i^j \% = \left| \frac{j_i - j_i^*}{j_i^*} \right| 100 \%, \quad (24)$$

где  $j_i$  — приближенное, а  $j_i^*$  — точное значения плотности тока ( $i = 1, 2, \dots, N_i$ ), а также поведение других величин, выражения для которых приводятся ниже по мере необходимости.

Расчеты проводились на различных сетках  $\Omega_i^h$  и при различных прикатодных расстояниях. Такие счетные параметры как  $N_T$  — число траекторий,  $\tau$  — шаг численного интегрирования уравнений движения (он был постоянным) выбирались так, что дальнейшее увеличение  $N_T$  и уменьшение  $\tau$  не влияло на численные результаты. Для этого проводились предварительные численные эксперименты, которые дали следующие значения:  $N_T = 150$ , а  $\tau$  — таково, что число точек траектории приблизительно равнялось 100.

### Сферический диод

Рассчитывался сферический диод с параметрами, определяемыми согласно (20). Аналитическое решение задачи дается формулами (8), (9). Данная задача решалась в одномерной и двухмерной постановках.

### Одномерная постановка

Результаты численного решения задачи приведены в табл. 3.

Таблица 3

Расчет одномерного сферического диода

$\delta_\varphi$	$N_i^h$	16	32	64	128
	$d_1$		0,12	0,029	0,0069
	$d_2$	0,46	0,12	0,030	0,0080
	$d_3$	2,5	0,57	0,14	0,036
$\delta_j$	$d_1$	0,18	0,044	0,010	0,0022
	$d_2$	0,70	0,17	0,046	0,012
	$d_3$	3,8	0,86	0,21	0,054

Из табл. 3 следует, что:

погрешности уменьшаются квадратично с измельчением сетки, достигая тысячных долей процента;

уменьшение прикатодного расстояния приводит к увеличению погрешности, так как в этом случае стартовая поверхность для численного расчета траекторий приближается к особой поверхности катода.

### Двухмерная постановка

Расчетная область изображена на рис. 3 и заключена между двумя четвертями концентрических окружностей. На линиях, параллельных координатным осям, ставится граничное условие равенства нулю нормальной производной от потенциала. Область является осесимметричной и рассматривается в цилиндрических координатах. Расчеты проводились на различных сетках  $\Omega_i^h$  с числом узлов по каждой переменной  $N_i^h$  и при различных прикатодных расстояниях  $d_k$ , которые определялись согласно (20).

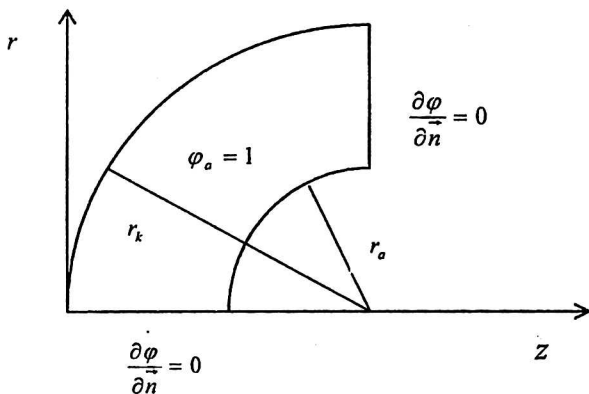


Рис. 3. Расчетная область задачи о сферическом диоде в двухмерной постановке

Помимо погрешностей  $\delta_\varphi\%$ ,  $\delta_j\%$ , рассчитываемых по формулам (18), (24), исследовалось поведение следующих погрешностей:

отклонение плотности тока от среднего значения  $\Delta_j\%$ , которая равна (напомним, что в точном решении плотность тока постоянна)

$$\Delta_j\% = \max_k \Delta_{ki}^j\%, \quad \Delta_k^j\% = \left| \frac{j_k - j_m}{j_m} \right| 100\%,$$

$$k = 1, 2, \dots, N_T, \quad j_m = \frac{1}{N_T} \sum j_k;$$

отклонение траектории на аноде от истинного значения  $\Delta_T\%$ , которая определяется по формулам (в точном решении траектории идут по радиусам)

$$\Delta_T\% = \max_k \Delta_{ki}^T\%, \quad \Delta_k^T\% = \left| \frac{\Delta_k}{h_1} \right| 100\%, \quad k = 1, 2, \dots, N_T,$$

где  $h_1$  — шаг самой редкой сетки;

$\Delta_k$  — отклонение  $k$ -й траектории, измеряемое как длина перпендикуляра из конечной точки данной траектории к радиусу, проведенному в начальную точку.

Результаты численных расчетов приведены в табл. 4.

Из табл. 4 можно сделать выводы, аналогичные одномерному случаю, а именно:

погрешности уменьшаются с измельчением сетки;

уменьшение прикатодного расстояния приводит к увеличению погрешности.

Однако есть и отличия от одномерного варианта: погрешности в двухмерных расчетах больше соответствующих погрешностей в одномерных расчетах, и их уменьшение уже не имеет квадратичной зависимости от шага сетки. Это можно объяснить следующими причинами:

Таблица 4

Расчет сферического диода в двухмерной постановке

$\delta_\varphi\%$	$\Omega_i^h$	16×16	32×32	64×64	128×128
		$d_1$	0,67	0,20	0,06
	$d_2$	1,0	0,52	0,20	0,03
$\delta_j\%$	$d_1$	0,75	0,20	0,08	0,05
	$d_2$	1,5	0,44	0,21	0,05
$\Delta_j\%$	$d_1$	1,0	0,32	0,08	0,04
	$d_2$	1,0	0,38	0,25	0,14
$\Delta_T\%$	$d_1$	0,76	0,43	0,15	0,06
	$d_2$	1,1	0,82	0,20	0,10

прямоугольность сетки и увеличение ошибок вблизи криволинейных границ;

представление потока заряженных частиц в виде бесконечно тонких нитей и увеличение ошибок в расчете объемного заряда.

Кроме изложенного выше, из проведенных численных экспериментов следует, что погрешности  $\delta_k^j, \Delta_k^T, \Delta_k^j, k = 1, 2, \dots, N_T$  максимальны на краях пучка и уменьшаются к его центру, а погрешности  $\delta_i^h, i = 1, 2, \dots, N_h$ , где  $N_h$  — число узлов сетки, максимальны вблизи катода.

### Поток Мельтцера

Рассматривалась задача о движении электронного пучка в поле, аналитическое выражение для которого есть [12]

$$2\varphi = r^{-2} \sin^4 / 3 \left( \frac{3}{2} \psi \right), r = \sqrt{x^2 + y^2}, \psi = \arctg \frac{x}{y}. \quad (25)$$

В этом случае катодом является отрезок прямой  $x = 0$ , траектории представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат, а плотность тока равна

$$j = \frac{9c_j}{8\sqrt{2}} y^{-5}.$$

Для численных расчетов выбиралась область ABCD (рис. 4), где радиус внешней окружности  $R = 4$ . Катодом являлась линия AD, причем  $y_A = 3,95, y_D = 2$ . На участках границы AB, BC, CD ставились граничные условия для потенциала согласно формуле (25).

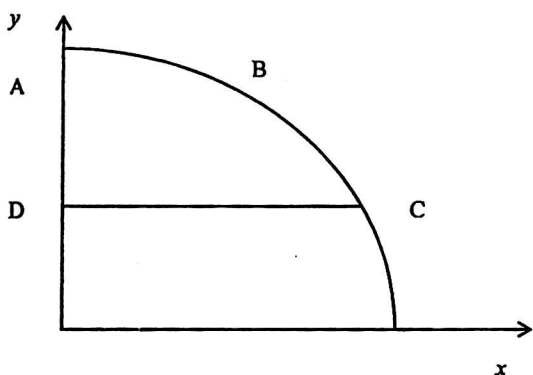


Рис. 4. Расчетная область задачи о потоке Мельтцера

Данная задача является "плохой" для численных расчетов, так как плотность тока значительно меняется вдоль катода (от точки D до точки A она уменьшилась в 32 раза).

Расчеты проводились на сетках  $\Omega_i^h$  с числом узлов по  $x$  и  $y$ , соответственно,  $m_i^x = 2^{i+2}; m_i^y = 7 \times 2^i; i = 1, 2, 3$ , что дает приблизительно равные шаги по обеим переменным. Прикатодные расстояния выбирались равными  $d_k = \frac{R}{7 \times 2^{k-1}}, k = 1, 2, 3, 4$ .

Ошибки вычисления потенциала и плотности тока оценивались по формулам (18), (25), а для оценки точности вычисления траекторий служили следующие величины:

максимальное отклонение траекторий от истинного значения

$$\Delta_T \% = \max_k \Delta_{ki}^T \%, \Delta_k^T \% = \left| \frac{\Delta_k}{R} \right| 100 \%, k = 1, 2, \dots, N_T,$$

где  $\Delta_k$  — отклонение  $k$ -й траектории;

среднее отклонение траекторий от истинного значения

$$\overline{\Delta_T \%} = \frac{1}{N_T} \sum_k \Delta_k^T \%.$$

Проведенные численные эксперименты показали, что погрешности вычисления потенциала и плотности тока максимальны вблизи точки D, в то время как погрешности в расчете траектории максимальны на другом краю пучка, т. е. вблизи точки A. Первое обстоятельство можно объяснить тем, что погрешность возрастает с приближением к особенности при  $y = 0$ , а второе — прямоугольностью сетки.

Результаты расчета потока Мельтцера приведены в табл. 5.

С целью выяснить эффект влияния предлагаемого алгоритма на точность вычислений прикаточная область рассчитывалась в двух вариантах:

с учетом производных от плотности тока, т. е. согласно антипараксимальной теории;

без учета производных от плотности тока, т. е. фактически по закону "3/2" для плоского диода.

Таблица 5

Расчет потока Мельтцера

	$\Omega_i^h$	8×14	16×28	32×56	64×112
$\delta_\varphi \%$	$d_1$	18	16	15	15
		19	17	15	15
	$d_2$	12	7,3	5,7	5,0
		13	7,4	5,9	5,5
	$d_3$	—	8,4	3,6	2,5
		—	8,5	3,7	2,7
	$d_4$	—	—	7,4	2,5
		—	—	7,4	2,5
$\delta_j \%$	$d_1$	32	29	26	22
		39	36	34	31
	$d_2$	22	12	10	9,2
		22	13	10	9,5

	$\Omega_i^h$	8×14	16×28	32×56	64×112
$\delta_j\%$	$d_3$	—	12	4,4	3,3
		—	12	4,5	3,2
	$d_4$	—	—	9,5	2,4
		—	—	9,6	2,5
$\Delta_T\%$	$d_1$	8,9	5,8	4,4	4,1
		20	17	16	16
	$d_2$	5,2	1,0	0,8	0,32
		10	7,9	6,5	6,2
	$d_3$	—	3,1	1,2	0,5
		—	1,5	1,9	2,0
	$d_4$	—	—	3,5	0,71
		—	—	2,7	0,56
$\bar{\Delta}_T\%$	$d_1$	1,1	0,96	0,96	0,99
		12	12	12	11
	$d_2$	0,89	0,26	0,16	0,14
		3,7	4,1	4,2	4,2
	$d_3$	—	0,70	0,21	0,10
		—	1,0	1,4	1,5
	$d_4$	—	—	0,62	0,14
		—	—	0,65	0,42

В табл. 5 для каждого набора счетных параметров приведены две цифры: верхняя относится к первому варианту расчета прикатодной области, а нижняя — ко второму. Прочерки в таблице означают, что для данного набора параметров расчеты не проводились из-за нарушения условия (23).

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что:

наибольший эффект применения антипарааксиальной теории дает в расчете траекторий: ошибки при этом значительно (до 10 раз и более) уменьшаются по сравнению с использованием закона "3/2", что можно объяснить существенным уточнением стартовых условий для траекторий;

погрешности вычисления потенциала и плотности тока также уменьшаются, но значительно слабее погрешностей расчета траекторий;

при больших прикатодных расстояниях  $d = d_1, d_2$  погрешности  $\delta_\phi, \delta_j$  "не чувствуют" измельчения в сетках, а при малых  $d = d_3, d_4$  указанные погрешности уменьшаются с уменьшением шага сетки (последние два обстоятельства объясняются, видимо, недостаточной точностью вычислительной модели в целом и могут быть уточнены за счет выбора сетки и увеличения порядка аппроксимаций);

при значительном уменьшении прикатодного расстояния ( $d = d_4$ ) погрешности не уменьшаются, так как начинает сказываться прикатодная особенность;

применение предлагаемого численного алгоритма для решения такой сложной с вычислительной точки зрения задачи, как расчет потока Мельцера, дает погрешности порядка 2–3 %, а погрешности расчета траектории — порядка десятых долей процента, что значительно меньше погрешностей решения этой же задачи, прове-

денного в работе [1] с применением традиционных алгоритмов.

### Выводы

1. Предложенный алгоритм итераций по подобластям, основанный на декомпозиции расчетной области на прикатодную и основную подобласть, позволяет существенно повысить точность расчетов.

2. Введение специальной разметки прикатодных узлов значительно упрощает реализацию предложенного алгоритма, делая ее сравнимой с традиционным использованием закона "3/2" для расчета плотности тока.

3. Применение антипарааксиальной теории В. А. Сырового позволяет учесть не только криволинейность катода, но и неоднородность плотности тока, что особенно заметно сказывается на точности расчета траекторий движения заряженных частиц.

*Работа выполнена при поддержке гранта "Университеты России" № УР.03.01.011.*

### Литература

1. Акимов П. И., Осипова Г. П., Сыровой В. А. // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. 1989. Т. 29. № 3. С. 405.
2. Свеишников В. М. Численный расчет пучков заряженных частиц на локально модифицированных сетках: Препринт № 1189/ИВМиМГ СО РАН, 1997.
3. Ильин В. П., Саблин Н. И. Метод конечных элементов в некоторых задачах численного анализа. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. С. 46.
4. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука. 1985.

5. Свешников В. М., Сыровой В. А. // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. 1990. Т. 30. № 11. С. 1675.
6. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. // Журн. прикл. механ. и техн. физики. 1966. № 2. С. 41.
7. Свешников В. М. // Прикл. физика. 2004. № 1. С. 50.
8. Langmuir I. // Phys. Rev. 1929. V. 33. № 5. P. 954.

9. Свешников В. М. О численном решении самосогласованной задачи расчета стационарных пучков заряженных частиц: Препринт № 1189/ИВМиМГ СО РАН, 1997.
10. Головин Г. Т. // Журн. вычисл. мат. и матем. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 700.
11. Мокин Ю. И. // Матем. сб. 1978. Т. 106 (148). № 2 (6). С. 234.
12. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62. № 355B. P. 431.

## Increasing of the accuracy of the intensive charged particle beams calculation

V. M. Sveshnikov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

*Numerical algorithms of the intensive charged particles beams calculation with the increased accuracy, based on singularity isolation near cathode are suggested and realized by decomposition of the initial domain to the nearcathode and the basic subdomains. Calculations in nearcathode subdomain are carried out on a basis of the antiparaxial V. A. Syrovy's theory, which provides adequate behavior of the solution, and in the basic subdomain the numerical algorithms are used. The examples of numerical test problems calculations are given.*