

УДК 537.2

## О некоторых аналитических связях осесимметричных и двумерных лапласовых полей

Ю. К. Голиков, Н. К. Краснова, К. В. Соловьев, Д. В. Григорьев  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
Санкт-Петербург, Россия

*Рассмотрены новые аналитические связи между осесимметричными и планарными лапласовыми потенциалами, на их основе построены эффективные и компактные алгоритмы решения задачи Коши для осесимметричных электрических полей в областях, содержащих ось симметрии. Приведены оценки точности полученных приближений.*

Электронно-оптические характеристики осесимметричных и двумерных электростатических линз полностью определяются ходом потенциала вдоль оси симметрии и если эта зависимость найдена в процессе поиска линзы с заданными параметрами, то возникает задача аналитического продолжения лапласова потенциала в пространство с оси симметрии поля, которая является оптической осью линзы. По своей природе эта задача некорректна, и малые вариации функции распределения поля на оси симметрии могут развиваться в любые структурные изменения эквипотенциального портрета поля вдали от нее. Вычислительные процедуры решения данной задачи обычно весьма неустойчивы и приводят к трудностям точного определения электродной конфигурации линзы. Для двумерных систем мы имеем прекрасное представление поля посредством комплексного потенциала  $\Omega(z + ir) = Q(r, z) + iR(r, z) = if(z + ir)$ , где  $f(x)$  — ход потенциала вдоль оси симметрии  $x$ . Для осесимметричных полей мы обычно имеем плохо сходящиеся ряды по четным степеням радиуса либо представление Уиттекера [1] в виде интеграла, который не всегда берется для функций требуемого класса и, следовательно, может не давать ясной картины аналитического продолжения. Для двумерных полей особые точки вычисляются легко и непринужденно, и мы получаем полное представление о глобальной форме полезадающих электродов. В осесимметричном случае у нас такого простого алгоритма нет.

В данной работе мы предлагаем простые трансформации двумерных потенциалов в осесимметричные, позволяющие с высокой точностью аналитически продолжать поля с оси симметрии в пространство и прогнозировать с большой достоверностью как положение и тип особых точек, так и микроструктуру эквипотенциального портрета возле них.

Исходной посылкой наших построений является анализ поведения степенных рядов по четным степеням поперечной к оси симметрии координаты в том случае, когда ход потенциала вдоль оси симметрии одинаков как для двумер-

ной, так и для осесимметричной систем. Можно заметить, что если в этих рядах произвести подходящие аффинные преобразования как аргументов, так и функций, то осесимметричные потенциалы можно привести к преобразованным двумерным, для которых есть точное представление. В результате мы получаем несколько вариантов аппроксимационных формул высокой точности, причем двумерный потенциал как бы "впитывает" в себя неизвестные нам особые точки осесимметричного потенциала.

Остановимся подробнее на технологии построений аппроксимаций.

Решение следующей задачи Коши для уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \varphi_{zz} &= 0, \\ \varphi|_{r=0} &= f(z) \end{aligned}$$

может быть записано в виде ряда по степеням  $r$

$$\begin{aligned} \varphi(r, z) = f(z) - \frac{1}{2^2} f''(z) r^2 + \frac{1}{(2 \cdot 4)^2} f^{IV}(z) r^4 - \\ - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n!!)^2} f^{(2n)}(z) r^{2n} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим теперь задачу Коши для двумерной симметричной относительно оси  $z$  функции  $R(r, z)$

$$\begin{aligned} R_{rr} + R_{zz} &= 0; \\ R(-r, z) &= R(r, z); \\ R|_{r=0} &= f(z). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение задачи (2) дается с помощью аналитической функции  $\Omega(z + ir)$

$$\Omega(z + ir) = Q(r, z) + iR(r, z) = if(z + ir).$$

Построим ряд Тейлора для функции  $\Omega$  по степеням  $r$

$$\begin{aligned} \Omega = if(z) - if^I(z)(ir) + if^{II}(z) \frac{(ir)^2}{2!} + \\ + if^{III}(z) \frac{(ir)^3}{3!} + if^{IV}(z) \frac{(ir)^4}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Выделив мнимую часть ряда (3), получим для  $R$  следующее выражение:

$$R(r, z) = f(z) - \frac{1}{2} f''(z)r^2 + \frac{1}{24} f^{IV}(z)r^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} f^{(2n)}(z)r^{2n} + \dots \quad (4)$$

Введем наряду с (4) также следующий ряд:

$$R^*(r, z) = R(kr, z) = f(z) - \frac{1}{2} f''(z)(kr)^2 + \frac{1}{24} f^{IV}(z)(kr)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} f^{(2n)}(z)(kr)^{2n} + \dots$$

Далее, подбором коэффициентов  $k$  и  $\alpha$  будем пытаться минимизировать разность

$$\delta(r, z) = \varphi(r, z) - \alpha R^*(r, z) = \varphi(r, z) - \alpha R(kr, z). \quad (5)$$

Запишем (5) в развернутом виде

$$\delta(r, z) = (1 - \alpha)f(z) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\alpha k^2}{2}\right) f''(z)r^2 + \left(\frac{1}{64} - \frac{\alpha k^4}{24}\right) f^{IV}(z)r^4 - \left(\frac{1}{2304} - \frac{\alpha k^6}{2}\right) f^{VI}(z)r^6 + \left(\frac{1}{147456} - \frac{\alpha k^8}{40320}\right) f^{VIII}(z)r^8 + \dots \quad (6)$$

Если считать  $f(z)$  заданной, а  $k$  и  $\alpha$  выбранными в соответствии с требованием зануления определенных слагаемых суммы (6) (о возможных вариантах выбора  $k$  и  $\alpha$  будет указано ниже), то в предположении сходимости ряда (6) возможен следующий алгоритм построения аппроксимации ряда (1):

- найти функцию  $R(r, z) = \text{Im}(if(z + ir))$ ;
- определить  $R^*(r, z) = R(kr, z)$ ;
- построить аппроксимационную формулу:  $\varphi(r, z) = \alpha R^*(r, z) + \delta(r, z)$ , сохраняя в выражении для  $\delta$  требуемое число слагаемых.

Обратимся далее к вопросу о возможных вариантах выбора констант приближения  $k$  и  $\alpha$ .

1. Пусть  $\alpha = 1$ ,  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Тогда (6) теряет два первых слагаемых и

$$\varphi(r, z) = R\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, z\right) + \frac{1}{194} f^{IV}(z)r^4 - \frac{1}{3840} f^{VI}(z) + \dots \quad (7)$$

2. Потребуем зануления в (6) коэффициентов при второй и четвертой степени  $r$ .

Данное требование приводит к значениям

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad k = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и к формуле}$$

$$\varphi(r, z) = \frac{2}{3} R\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}, z\right) + \frac{1}{3} f(z) - \frac{1}{23040} f^{VI}(z)r^6 + \dots \quad (8)$$

3. Уничтожим члены четвертой и шестой степени  $r$  в (6) выбором коэффициентов  $\alpha = \frac{27}{50}$ ,  $k = \sqrt{\frac{5}{6}}$ , тогда аппроксимация примет вид:

$$\varphi(r, z) = \frac{27}{50} R\left(\sqrt{\frac{5}{6}}r, z\right) + \frac{23}{50} f(z) - \frac{1}{40} f^{II}(z)r^2 + \frac{1}{3096576} f^{VIII}(z)r^8 \dots \quad (9)$$

Формулы (7)–(9) можно применять в самых разнообразных ситуациях и в зависимости от характера функции  $f(z)$  выбирать то или иное представление из приведенных. В частности, если взять в качестве примера потенциал  $\varphi = \exp(z) \cdot J_0(r)$ , то аппроксимация его с помощью (7)–(9) дает следующие представления для функции Бесселя  $J_0(r)$ :

$$J_0(r) \approx \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right); \quad (10)$$

$$J_0(r) \approx \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) + \frac{r^4}{192}; \quad (11)$$

$$J_0(r) \approx \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) + \frac{r^4}{192} - \frac{r^6}{3840}; \quad (12)$$

$$J_0(r) \approx \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right) + \frac{1}{3}; \quad (13)$$

$$J_0(r) \approx \frac{2}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right) + \frac{1}{3} - \frac{r^6}{23040}; \quad (14)$$

$$J_0(r) \approx \frac{27}{50} \cos\left(\frac{\sqrt{5}r}{\sqrt{6}}\right) + \frac{23}{50} - \frac{r^2}{40}. \quad (15)$$

Вычисление первого корня функции Бесселя с использованием аппроксимаций (10)–(15) дает следующие значения:

Номер аппроксимационной формулы	Значение корня
13 .....	2,22144
14 .....	2,52137
15 .....	2,39463
16 .....	2,4184
17 .....	2,4018
18 .....	2,40422
Точное значение согласно [2] .....	2,40483

Следовательно, даже на столь большом удалении от оси симметрии мы имеем достаточно высокий уровень точности представления потенциала.

Приведем также рис. 1, 2, иллюстрирующие аппроксимационные свойства формул (10)–(15).

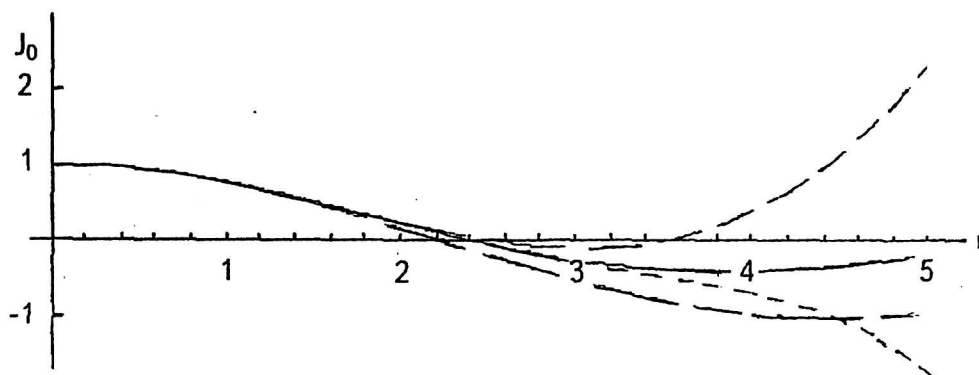


Рис. 1. Точная зависимость  $J_0(r)$  (сплошная линия) и аппроксимации (10)–(12) (пунктир, длина штриха падает с ростом номера аппроксимационной формулы)

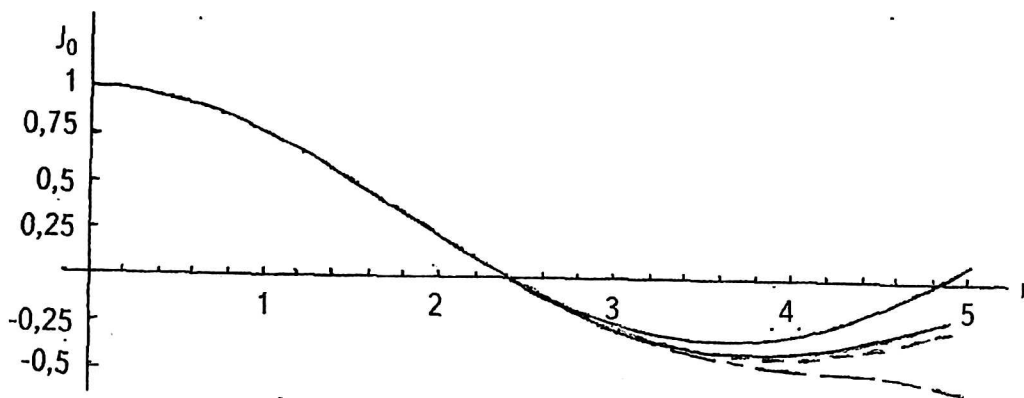


Рис. 2. Точная зависимость  $J_0(r)$  (сплошная линия) и аппроксимации (13)–(15) (пунктир, длина штриха падает с ростом номера аппроксимационной формулы)

### Заключение

Предложен эффективный алгоритм построения простых приближенных выражений, обеспечивающих продолжение лапласова потенциала в пространство с оси симметрии поля. Рассмотрены различные варианты аппроксимационных

формул. Приведены примеры, подтверждающие эффективность предложенного алгоритма.

### Литература

1. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. — М.: Мир, 1990.
2. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979.

## On analytical relations between axisymmetric and two-dimension Laplace's fields

Yu. K. Golikov, N. K. Krasnova, K. V. Solovjev, D. V. Grigorjev  
St.-Petersburg State Polytechnic University, St.-Petersburg, Russia

*New analytical relations between axisymmetric and planar (two-dimension) Laplace's potentials are described. Effective and compact algorithms of Cauchy problem solving for potentials with axial symmetry in areas containing symmetry axis are built on their base. Approximation errors are estimated.*