Quantum radiation of classical current in dielectric media and diffusion of electromagnetic wave front in vacuum

B. A. Veklenko
Institute for High Temperature, Moscow, Russia

The problem of quantum radiation of a classical current in dilute atomic gas is solved. It is shown that the properties of exact solution in quantum electrodynamics are in qualitative disagreement with the ones obtained in the framework of perturbation theory. In accordance with the exact solution, quantum mean values of operators corresponding to electric and magnetic field intensities are equal to zero. But the mean values of squares of these operators are not equal to zero. It is shown that a classical current in external electromagnetic field background creates induces radiation. The superluminous radiation occurs preceding the ballistic front of the signal.

УДК 533.9

Релятивистская пондеромоторная сила квазимонохроматической волны

В. П. Милантьев
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

С помощью последовательной процедуры метода усреднения получено общее выражение для пондеромоторной силы, с которой мощная квазимонохроматическая волна действует на релятивистскую заряженную частицу. Поле волны рассматривается в приближении геометрической оптики. Отмечена существенная зависимость пондеромоторной силы от поляризации волны и от соотношения между скоростью частицы и фазовой скоростью волны. В частности, в случае продольной волны пондеромоторная сила меняет знак, когда скорость частицы превышает 1/3 фазовой скорости волны. Рассмотрена пондеромоторная сила давления продольной квазимонохроматической волны, действующая на релятивистскую плазму.

С пондеромоторными силами связаны разнообразные явления, происходящие при нелинейном взаимодействии высокочастотных волн с частицами плазмы (самофокусировка и филаментация лазерных пучков, образование кавитонов, параметрические неустойчивости, генерация магнитного поля в лазерной плазме и т. п.). В работе [1] было впервые показано, что в монохроматическом электромагнитном поле с произвольной пространственной зависимостью амплитуды

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \operatorname{Re}\vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t)$$

на частицу с зарядом e и массой m действует усредненная (пондеромоторная) сила

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4m\omega^2}\nabla\left|\vec{E}\right|^2. \qquad (1)$$

Эту силу, имеющую потенциальный характер, называют силой Миллера. В дальнейшем проводился анализ применимости формулы Миллера и были получены ее различные обобщения [2—8]. В частности, в связи с созданием мощных источников электромагнитного излучения разных диапазонов встал вопрос о релятивистском обобщении пондеромоторной силы. Этот вопрос обсуждался во многих работах. В работе [8] на примере релятивистского движения частицы в поле электромагнитной волны в прямоугольном волноводе методом последовательных приближений было показано, что пондеромоторная сила не является потенциальной. Рассмотрение пондеромоторной силы при произвольной интенсивности поля излучения проводилось в работах [6, 7] на основе лагранжева подхода. В настоящей работе дается последовательный вывод релятивистской пондеромоторной силы на основе метода усреднения Боголюбова [4, 5]. Предполагается, что малый параметр, равный отношению амплитуды осцилляторной скорости частицы в поле волны к скорости света, сравним с малым параметром геометрической оптики для волны. Малость параметра разложения в случае мощного излучения обеспечивается достаточно большим значением релятивистского фактора, связанным со скоростью плавного (усредненного) движения частицы. Подробно рассмотрена пондеромоторная сила в случае квазимонохроматической продольной волны.

Исходные уравнения

Релятивистское движение заряженной частицы описывается уравнениями (в стандартных обозначениях):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + c^{-1}[\vec{v}\vec{B}]), \qquad (2)$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{p}/m\gamma .$$

Зададим высокочастотное (ВЧ) электромагнитное поле в виде квазимонохроматической волны

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)\exp(i\theta) + k.c., \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)\exp(i\theta) + k.c.,$$

где $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды;
$\theta(\vec{r},t)$ — быстрая фаза (эйконал);
$k.\ c.$ — комплексное сопряжение.

Локальный волновой вектор и частота волны определяются с помощью формул [9]

$$\vec{k}(\vec{r},t) = \nabla\theta ; \quad \omega(\vec{r},t) = -\frac{\partial\theta}{\partial t}. \qquad (3)$$

Если L, T — характерные пространственно-временные масштабы изменения амплитуд поля волны, то в приближении геометрической оптики можно ввести малый параметр

$$\mu_g = 1/\left|\vec{k}\right| L \approx 1/\omega T \ll 1 .$$

Проводя разложение амплитуд поля по этому параметру, из максвелловского уравнения индукции последовательными приближениями можно получить выражения для амплитуд магнитного поля

$$\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega}[\vec{k}\vec{E}_0]; \quad \vec{B}_1 = \frac{c}{i\omega}\left(\operatorname{rot}\vec{E}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}_0}{\partial t} + i[\vec{k}\vec{E}_1]\right). \qquad (4)$$

С учетом разложений амплитуд ВЧ-поля правая часть уравнений (2) представляет собой разложение по параметру геометрической оптики. Наряду с этим при рассмотрении релятивистского движения заряженной частицы в ВЧ-поле возникает параметр $\mu = e\left|\vec{E}\right|/m\omega c\gamma$. В нерелятивистском приближении этот параметр мал в случае достаточно малой интенсивности поля. При релятивистском движении частицы параметр μ может быть малым и в достаточно мощном поле излучения. При этом, чем более релятивистским является движение частицы, тем более мощным может быть ВЧ-поле. Далее будем считать, что указанные малые параметры имеют одинаковый порядок: $\mu_g \approx \mu$.

Поскольку уравнения (2) содержат быструю фазу θ, то удобно эту фазу рассматривать как независимую переменную, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\mu}(-\omega + \vec{k}\cdot\vec{v}) . \qquad (5)$$

Здесь явно введен малый параметр, показывающий, что фаза θ является быстрой переменной. Таким образом, мы разделили медленные переменные $\vec{r}, \vec{p}, \vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)$ и быструю фазу θ. Разделение переменных необходимо для последовательного применения метода усреднения к системе уравнений (2), (5).

Процедура усреднения

Согласно методу усреднения ищется замена переменных:

$$\vec{r} = \vec{R} + \mu\,\vec{g}_{1r}(t,\vec{R},\vec{P},\psi) + \mu^2\,\vec{g}_{2r}(t,\vec{R},\vec{P},\psi) + \cdots ;$$
$$\vec{p} = \vec{P} + \mu\,\vec{g}_{1p}(t,\vec{R},\vec{P},\psi) + \mu^2\,\vec{g}_{2p}(t,\vec{R},\vec{P},\psi) + \cdots ; \qquad (6)$$
$$\theta = \psi + \mu\,q_1(t,\vec{R},\vec{P},\psi) + \mu^2\,q_2(t,\vec{R},\vec{P},\psi) + \cdots ,$$

где $\vec{R}$, $\vec{P}$, ψ — сглаженные по быстрой фазе переменные;
g_i, q_j — периодические составляющие этих переменных.

При этом сглаженные переменные должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\varphi}_{0r}(t,\vec{R},\vec{P}) + \mu\,\vec{\varphi}_{1r}(t,\vec{R},\vec{P}) + \mu^2\,\vec{\varphi}_{2r}(t,\vec{R},\vec{P}) + \cdots ;$$
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\varphi}_{0p}(t,\vec{R},\vec{P}) + \mu\,\vec{\varphi}_{1p}(t,\vec{R},\vec{P}) + \mu^2\,\vec{\varphi}_{2p}(t,\vec{R},\vec{P}) + \cdots ; \qquad (7)$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\mu}(-\Omega + \vec{K}\vec{V}) + C_0(t,\vec{R},\vec{P}) + \mu C_1(t,\vec{R},\vec{P}) + \cdots ,$$

где $\Omega \equiv \omega(t,\vec{R})$, $\vec{K} \equiv \vec{k}(t,\vec{R})$, $\vec{V} = \vec{P}/m\Gamma$ — скорость сглаженного движения;

Γ — релятивистский фактор сглаженного движения.

Задача состоит в том, чтобы, используя замену (6), с помощью разложений уравнений (2), (5) вычислить периодические добавки g_i, q_j к сглаженным переменным и найти правые части уравнений (7) для этих переменных в соответствующем приближении. Предполагается, что черенковский резонанс частицы с волной отсутствует. Пондеромоторная сила представляет собой правую часть уравнения системы (7) для усредненного импульса.

В общем вычисления по указанной схеме являются довольно громоздкими. Приведем результаты этих вычислений с точностью до членов второго порядка

$$\vec{g}_{1r} = 0;$$

$$\vec{g}_{2r} = -\frac{e}{m\Gamma\nu^2}\hat{I}_V\{(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0])\exp(i\psi) + k.c.\}. \quad (8)$$

Здесь и далее используются обозначения: $\nu \equiv \Omega - \vec{K}\vec{V}$ — усредненная частота с доплеровским сдвигом, тензор $\hat{I}_V \equiv \hat{I} - \vec{V}\vec{V}/c^2$, где $\hat{I}$ — единичный тензор; $\vec{V}\vec{V}$ — диада.

$$\vec{g}_{1p} = -\frac{e}{i\nu}(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0])\exp(i\psi) + k.c.;$$

$$\begin{aligned}\vec{g}_{2p} = \frac{e}{\nu}\Big\{D\frac{1}{\nu}(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0]) + \\ + i(\vec{E}_1 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_1]\Big\}\exp(i\psi) + k.c.\end{aligned} \quad (9)$$

В формуле (9) опущены члены, содержащие фазу 2ψ, поскольку они не дают вклада при усреднении. Введен также оператор

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\nabla.$$

Периодические добавки к сглаженной фазе определяются формулами:

$$q_1 = \vec{K}\vec{g}_{2r},$$

$$\begin{aligned}q_2 = -\frac{e}{im\Gamma\nu}\{\frac{i}{\nu}\hat{I}_V : \vec{K}(\vec{E}_1 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_1] + \\ + \frac{1}{\nu}\hat{I}_V : \vec{K}D\frac{1}{\nu}(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0]) + \\ + D\frac{1}{\nu^2}\hat{I}_V : \vec{K}(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0]) + \\ + \frac{1}{\nu^2}\hat{I}_V : (\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0])\nabla\nu\}\exp(i\psi) + \cdots + k.c.\end{aligned} \quad (10)$$

Здесь также опущены члены, содержащие фазу 2ψ. Две точки означают двойное скалярное произведение тензора $\hat{I}_V$ с соответствующими диадами.

Наряду с разложениями (6) удобно использовать представление вектора скорости частицы в виде

$$\vec{v} = \vec{V} + \mu\vec{G}_{1V} + \mu^2\vec{G}_{2V} + \cdots,$$

где

$$\vec{G}_{1V} = \frac{1}{m\Gamma}\hat{I}_V\,\vec{g}_{1p};$$

$$\vec{G}_{2V} = \frac{1}{m\Gamma}\hat{I}_V\,\vec{g}_{2p} - \frac{1}{(m\Gamma c)^2}\hat{I}_V\,\vec{g}_{1p}\vec{V}\,\vec{g}_{1p}.$$

Величина $\vec{G}_{2V}$ имеет постоянную составляющую, которая определяет добавку второго порядка к сглаженной скорости, имеющую чисто релятивистское происхождение:

$$<\vec{G}_{2V}> = -\frac{e^2}{(mc\Gamma\nu)^2}\{\hat{I}_V(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0])\vec{E}_0^*\vec{V} + k.c.\}.$$

Скобки <...> означают усреднение (сглаживание) по быстрой фазе.

Релятивистская пондеромоторная сила давления ВЧ-квазимонохроматической волны

В нулевом приближении усредненное воздействие ВЧ-поля на частицу отсутствует: $\vec{\varphi}_{0p} = 0$. В первом приближении усредненная сила описывается общей формулой

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}_{1p} = e\{i(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0]) < q_1\exp(i\psi) > + c^{-1} < \\ < [\vec{G}_{1V}\vec{B}_0]\exp(i\psi) > + k.c.\}.\end{aligned}$$

Учитывая формулы для периодических составляющих, можно убедиться, что в этом приближении усредненная сила также отсутствует.

Таким образом, усредненная (пондеромоторная) сила является эффектом второго приближения. В общем виде эта сила определяется формулой

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}_{2p} = e < \exp(i\psi)\{\vec{g}_{2r}\cdot\nabla\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{G}_{1V}\vec{B}_1] + \\ + iq_2(\vec{E}_0 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_0]) + c^{-1}[\vec{G}_{2V}\vec{B}_0] + \\ + c^{-1}[\vec{V}, \vec{g}_{2r}\cdot\nabla\vec{B}_0] + iq_1(\vec{E}_1 + c^{-1}[\vec{V}\vec{B}_1])\} + k.c. >.\end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда можно сделать общий вывод, что выражение для пондеромоторной силы, действующей на отдельную частицу, существенно зависит от поляризации волны и ее фазовой скорости. В частном случае бесконечно большой фазовой скорости волны ($k \to 0$) с использованием формул (4) из (11) следует известная формула (1). В явном виде выражение (11) является довольно сложным. Рассмотрим подробнее пондеромоторную силу в случае продольной волны, распространяющейся вдоль оси z.

Пондеромоторная сила давления продольной квазимонохроматической волны

В случае продольной квазимонохроматической волны, распространяющейся вдоль оси z ($\vec{B}=0,\ \vec{E}_1=0$), из общей формулы (11) следует, что в направлении распространения волны действует усредненная сила

$$F_z = e\{< g_{2z}\exp(i\psi) > \frac{\partial E}{\partial z} + iE < q_2 \exp(i\psi) > +k.c.\}.$$

Учитывая выражения (8), (10), получаем искомую формулу

$$F_z = -\frac{1}{\Gamma^3\Omega^2(1-\beta_p)^3}\Big\{(1-3\beta_p)\frac{\partial I}{\partial z} - \\ -\frac{2}{V_p}\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{6I}{K(1-\beta_p)}\left(\beta_p^2\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{1}{V_p^2}\frac{\partial \Omega}{\partial t} - 2\frac{\beta_p}{V_p}\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)\Big\}. \qquad (12)$$

Здесь $V_p = \Omega / K$ — фазовая скорость волны, $\beta_p = V/V_p$, $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, $I \equiv e^2|E|^2/m$.

При выводе формулы (12) использовано известное уравнение эйконального приближения $\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$ (см. соотношения (3)). Скорость частицы, перпендикулярной направлению распространения волны, остается постоянной. Она принята равной нулю. Видно, что при конечной фазовой скорости волны пондеромоторная сила в общем не является потенциальной. Если фазовая скорость волны постоянна, то из (12) следует, что при $1/3 < \beta_p < 1$ пондеромоторная сила меняет свой знак. Это отмечалось в работах [6, 7]. С учетом изменения фазовой скорости волны и модуляции во времени ее амплитуды однозначного вывода о знаке пондеромоторной силы сделать нельзя. Если скорость частиц достаточно мала по сравнению с фазовой скоростью волны, то третьим членом в формуле (12) можно пренебречь.

Используя формулу (12) и зная стационарную релятивистскую функцию распределения частиц $f_{0a}(\vec{p})$, можно вычислить пондеромоторную силу давления продольной волны, действующую на единицу объема плазмы:

$$n\bar{F} = \sum_a \int dp F_{za} f_{0a} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{\partial |E|^2}{\partial z} + \\ + \frac{K}{4\pi}\left\{\frac{\partial\varepsilon}{\partial\Omega}\frac{\partial|E|^2}{\partial t} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial K}\frac{\partial|E|^2}{\partial z}\right\}, \qquad (13)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость плазмы, выражение для которой в рассматриваемом случае следует из общей формулы [10]:

$$\varepsilon(\Omega, K) = 1 + \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{\Omega}\int dp V \frac{\partial f_{0a}}{\partial p}(\Omega - KV)^{-1} = \\ = 1 - \sum_a \frac{4\pi e_a^2}{m_a}\int dp f_{0a} / \Gamma^3(\Omega - KV)^2.$$

Формула (13) согласуется с результатами работ [11, 12], полученными на основе кинетического подхода в рамках нерелятивистского приближения. При этом согласно [11] опускается член, не содержащий пространственно-временных производных плотности энергии поля. Спектр продольных плазменных волн определяется дисперсионным уравнением $\varepsilon(\Omega, K) = 0$. Учитывая, что в этом случае выражение в скобках (13) также обращается в нуль, приходим к выводу, что и при релятивистском движении частиц плазмы усредненное воздействие продольных волн на плазму сводится к взятому с обратным знаком градиенту плотности энергии поля [11, 12].

Заключение

В работе получено общее выражение для усредненной силы, с которой мощная квазимонохроматическая волна воздействует на релятивистскую заряженную частицу. Используется метод усреднения Боголюбова. Волна рассматривается в приближении геометрической оптики. Параметром разложения является отношение амплитуды осцилляторной скорости частицы в поле волны к скорости света. Малость параметра разложения в случае мощного излучения обеспечивается достаточно большим значением релятивистского фактора, связанного со скоростью плавного (усредненного) движения частицы. Предполагается, что этот параметр сравним с малым параметром геометрической оптики. Наряду с выражением для усредненной силы получены общие уравнения эволюции сглаженных переменных — координат частицы, ее импульса, фазы (эйконала) волны, а также вычислены периодические добавки к сглаженным переменным с точностью до членов второго порядка. Показано, что выражение для усредненной силы зависит от поляризации волны и от соотношения между усредненной скоростью движения частицы и фазовой скоростью волны. В качестве примера рассмотрено выражение для релятивистской усредненной силы в случае продольной квазимонохроматической волны. Подтвержден известный результат, полученный другими авторами на основе лагранжева подхода, что при определенных условиях усредненная сила может изменить свой знак. С помощью полученных выражений рассмотрена также пондеромоторная сила давления продольной волны, действующая на единицу объема релятивистской плазмы. Показано, что и в релятивистском случае одночастичный и кинетический подходы приводят к одному и тому же результату.

Литература

1. *Миллер М. А.* // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1958. Т. 1. С. 110—123; *Гапонов А. В., Миллер М. А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 242.
2. *Литвак А. Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме// Сб. Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича, 1980. — М.: Атомиздат. Вып. 10. С. 164—242.
3. *Kentwell G. W., Jones D. A.* // Phys. Reports. 1987. V. 145. № 6. P. 319—403.
4. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.* Движение заряженных частиц в электромагнитных полях// Сб. Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича, 1963. — М.: Госатомиздат. Вып. 2. С. 177—261.
5. *Милантьев В. П.* Дрейфовая теория движения заряженных частиц в электромагнитных полях, 1987. — М.: Изд-во УДН. — 80 с.
6. *Weyssow B., Balescu R.* // J. Plasma Phys. 1987. V. 37. P. 467.
7. *Bauer D., Mulser P., Steeb W.—H.* // Phys. Rev. Letters. 1995. V. 75. P. 4622.
8. *Серов А. В.* // ЖЭТФ. 2001. Т. 119 (1). С. 27—34.
9. *Бернштейн А., Фридленд Л.* Геометрическая оптика нестационарной и неоднородной плазмы// В сб. Основы физики плазмы/ Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана. — М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 393.
10. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы, 1988. — М.: Высш. шк. С. 72.
11. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы// Сб. Вопросы теории плазмы/ Под ред. М. А. Леонтовича, 1964. — М.: Атомиздат. Вып. 4. С. 188—339.
12. *Милантьев В. П.* // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 159—169.

Работа выполнена по программе Минобразования РФ "Университеты России — фундаментальные исследования".

Статья поступила в редакцию 9 августа 2005 г.

Relativistic ponderomotive force of quasimonochromatic wave

V. P. Milantiev
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

The general expression for the averaged force, acting on the relativistic particle in the field of the strong quasimonochromatic wave, is obtained with the help of successive procedure of the averaging method. Geometrical optics approximation for the wave is accepted. Essential dependence of the averaged force on the wave polarization as well as on the relation between the particle velocity and the phase velocity of the wave is noted. In particular, the averaged force of the longitudinal quasimonochromatic wave can change its sign if the particle velocity exceeds 1/3 of the phase velocity. Ponderomotive force of the longitudinal quasimonochromatic wave, acting on the relativistic plasma, is also considered.

УДК 53.082.2+532.57

Об инерционном способе одновременного измерения массового расхода жидкости и ее плотности

Е. В. Майоров, В. А. Онищук
Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук, Москва, Россия

Представлено решение задачи течения идеальной несжимаемой жидкости по трубе с осевой симметрией и с сечением, переменным на протяжении некоторого ее участка и во времени. Показана возможность построения нового измерительного прибора с использованием полученных результатов и выбором значений некоторых его технических параметров. В частности, указывается, что общая длина участка трубы с изменяющимся определенным образом сечением должна быть не менее двух средних диаметров трубы.

Среди большого числа типов измерителей расходов протекающих жидкостей и газов существует сравнительно узкий класс приборов, измеряющих массовые расходы, в которых, как