Общая физика

УДК 535.14

Квантовое излучение классического тока в диэлектрических средах и размытие баллистического фронта электромагнитного сигнала в вакууме

Б. А. Векленко
Институт высоких температур РАН, Москва, Россия

Решена задача о квантовом излучении классического тока, помещенного в разреженную среду атомарного газа. Показано, что свойства точного решения в квантовой электродинамике качественно отличаются от свойств решения, найденного методом теории возмущений. Точное решение свидетельствует об отсутствии квантовых средних от операторов, отвечающих электрической и магнитной напряженностям электромагнитных полей, но о наличии квантовых средних от их квадратичных форм. При генерации классического тока в поле внешних фотонов возникает индуцированное излучение, а перед баллистическим фронтом излученного сигнала — сверхсветовой предвестник.

Задача о квантовом излучении классического тока в вакууме допускает точное решение [1], и в этом заключается ее привлекательность. Для квантовых средних от операторов электрической и магнитной напряженностей поля возникают формулы классической физики. Если же квантовое излучение классического тока происходит в диэлектрической среде сколь угодно малой плотности, то возможны ситуации, когда результат меняется качественно и не может быть полностью описан путем введения диэлектрической проницаемости, что и служит предметом настоящей работы.

Обозначим плотность излучающего классического тока в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t через $j^{\nu}(\mathbf{r}, t)$. Для оператора векторного потенциала используем стандартное выражение ($\hbar = c = 1$)

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\lambda}}{\sqrt{2kV}} \left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{kr}} + \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^{+} e^{-i\mathbf{kr}} \right),$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор;
$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{\lambda}$ — единичный вектор линейной поляризации;
V — объем квантования.

Через $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^{+}$ обозначены операторы уничтожения и рождения квантов в состоянии ($\mathbf{k}$, λ). Электромагнитное поле считаем поперечным ($\lambda = 1,2$). Воспользуемся калибровкой с нулевым скалярным потенциалом [2, 3]. Предположим, что среда заполнена атомарным газом, причем атомы в целях простоты обладают одним валентным электроном. При этих условиях полевой оператор атомарного газа в представлении Шредингера имеет вид

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{j\mathbf{p}} \psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \frac{e^{i\mathbf{pR}}}{\sqrt{V}} \hat{b}_{j\mathbf{p}},$$

где ψ_j — волновая функция электрона в атоме;
$\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ — координаты валентного электрона и атомного остатка, соответственно.

Через $\mathbf{p}$ обозначен импульс атома. Операторы $\hat{\beta}_{j\mathbf{p}}$ и $\hat{\beta}_{j\mathbf{p}}^{+}$ описывают рождение и уничтожение атомов в состояниях (j, $\mathbf{p}$). Для разреженных (температурно-невырожденных) газов можно считать, что эти операторы подчиняются перестановочным соотношениям полей Бозе-Эйнштейна. Уравнение Шредингера системы примем в виде

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_a + \hat{H}_{ph} \right) \Psi - $$
$$- \frac{e}{m} \int \hat{\psi}^{+}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \hat{p}^{\nu} \hat{A}^{\nu}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d\mathbf{r} d\mathbf{R} \Psi - \qquad (1)$$
$$- \int j^{\nu}(\mathbf{r}, t) \hat{A}^{\nu}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \Psi,$$

где e и m — заряд и масса электрона, соответственно, $\hat{p}^{\nu} = -i\nabla_{\mathbf{r}}^{\nu}$.

Под повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Будем предполагать, что взаимодействие электромагнитного поля с атомами носит квазирезонансный характер, и будем пренебрегать членом взаимодействия, пропорциональным $\hat{\mathbf{A}}^{2}(\mathbf{r}, t)$. Далее

$$\hat{H}_a = \sum_{j\mathbf{p}} \varepsilon_j(\mathbf{p}) \hat{b}^+_{j\mathbf{p}} \hat{b}_{j\mathbf{p}}; \quad \hat{H}_{ph} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} k \hat{\alpha}^+_{\mathbf{k}\lambda} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda},$$

где $\varepsilon_j(\mathbf{p}) = \varepsilon_j + p^2/2M$;

ε_j — внутренняя энергия атома;
M — масса атомного остатка.

Нас интересуют средние значения

$$<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})> = Sp\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\tilde{\rho};$$

$$<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}')> = Sp\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}')\tilde{\rho}$$

от операторов электромагнитного поля, возникающие вследствие излучения классического тока $j^{\nu}(\mathbf{r},t)$.

Здесь $\tilde{\rho}$ —матрица плотности системы в целом, угловые скобки означают усреднение как в квантовом, так и в статистическом смысле. Суммирование по аргументам атомов среды можно выполнить явно

$$\rho = Sp_a\tilde{\rho},$$

воспользовавшись методом, предложенным в работе [4]. Настоящие расчеты отличаются от расчетов, приведенных в работе [4], лишь наличием в среде плотности классического тока $j^{\nu}(\mathbf{r},t)$, поэтому вывод основных соотношений воспроизводим схематически.

Для вычисления матрицы плотности ρ вводятся функции

$$\Phi^0(\mathbf{N},|\zeta) = \prod_{\mathbf{k}\lambda} \varphi(N_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda}),$$

описывающие в представлении вторичного квантования свободное электромагнитное поле в конфигурации, определяемой вектором $\mathbf{N} = ..., N_{\mathbf{k}\lambda}, ...$, где $N_{\mathbf{k}\lambda}$ — числа заполнения моды $(\mathbf{k}, \lambda)$. Вектор ζ определяется компонентами $\zeta = ..., \zeta_{\mathbf{k}\lambda}, ...$, $\varphi(N|\zeta)$ — волновые функции квантового осциллятора.

Пусть операторы $\hat{J}^+(\mathbf{N})$ и $\hat{J}(\mathbf{N})$, действующие в некотором вспомогательном Г-пространстве, порождают и уничтожают состояние электромагнитного поля, описываемое вектором $\mathbf{N}$. С помощью оператора

$$\hat{O} = \hat{\Phi}^+(\zeta) >^0_{\Gamma}, \quad \hat{\Phi}(\zeta) = \sum_{\mathbf{N}} \hat{J}(\mathbf{N})\Phi^0(\mathbf{N}|\zeta),$$

где $>^0_{\Gamma}$ — вакуумный базисный вектор в Г-пространстве, весь формализм квантовой электродинамики из стандартного пространства вторичного квантования можно перевести в Г-пространство. В Г-пространстве уравнение (1) выглядит следующим образом [4]:

$$i\frac{\partial\Psi_{\Gamma}}{\partial t} = \hat{H}^0\Psi_{\Gamma} - \frac{e}{m}\int \hat{\Phi}^+ \hat{\psi}^+ \hat{p}^{\nu} \hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{\psi}\, \hat{\Phi} d\mathbf{R} d\mathbf{r} d\zeta \Psi_{\Gamma}.$$

Здесь

$$\hat{H}^0 = \hat{H}_a + \sum_{\mathbf{N}} \varepsilon(\mathbf{N})\hat{J}^+(\mathbf{N})\hat{J}(\mathbf{N}) -$$

$$-\int \hat{\Phi}^+ j^{\nu}(\mathbf{r},t)\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \hat{\Phi} d\zeta;$$

$$\varepsilon(\mathbf{N}) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} k N_{\mathbf{k}\lambda}; \quad d\zeta = \prod_{\mathbf{k}\lambda} d\zeta_{\mathbf{k}\lambda}.$$

Для операторов рождения и уничтожения фотонов удобно иметь в виду представление

$$\hat{\alpha}^+_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda} - \frac{\partial}{\partial\zeta_{\mathbf{k}\lambda}}); \quad \hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{\partial}{\partial\zeta_{\mathbf{k}\lambda}}),$$

позволяющее оператор $\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})$ писать в виде $\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r}|\zeta)$. Среднее значение произвольного оператора электромагнитного поля находится теперь так

$$<\hat{K}> = \int <\hat{\Phi}^+(\zeta')\hat{K}(\zeta',\zeta)\hat{\Phi}(\zeta)>_{\Gamma} d\zeta d\zeta', \tag{2}$$

где $>_{\Gamma} = \Psi_{\Gamma}$. В случае необходимости под усреднением в формуле (2) можно понимать также усреднение по статистическому ансамблю систем. Ниже будем иметь в виду усреднение как в квантовом, так и в статистическом смысле. В виду произвольности оператора $\hat{K}$ из (2) следует, что искомая матрица плотности ρ может быть представлена в форме

$$\rho(\zeta,\zeta', t|\mathbf{j}) = <\hat{\Phi}^+(\zeta)\hat{\Phi}(\zeta')>_{\Gamma}.$$

Оставаясь в Г-представлении, эту конструкцию удобно вычислять с помощью операторов $\check{\Phi}(\zeta,t)$ и $\check{\Phi}^+$, вычисленных в представлении Гейзенберга.

Преставление Гейзенберга и представление взаимодействия в Г-пространстве

Переход от представления Шредингера к представлению взаимодействия

$$\tilde{\Psi}(t) = \hat{U}^+(t)\Psi_{\Gamma}, \quad \tilde{\Phi}(\zeta,t) = \hat{U}^+(t)\hat{\Phi}(\zeta)\hat{U}(t)$$

осуществляет унитарный оператор $\widehat{U}(t)$, определяемый уравнением

$$i\frac{\partial\widehat{U}(t)}{\partial t}=\widehat{H}^{0}(t)\widehat{U}(t). \qquad (3)$$

В этом представлении

$$i\frac{\partial\tilde{\Psi}(t)}{\partial t}=\tilde{H}(t)\tilde{\Psi}(t),$$

$$\tilde{H}(t)=-\frac{e}{m}\int\tilde{\Phi}^{+}(\zeta,t)\widehat{\psi}^{+}\widehat{p}^{\nu}\widehat{A}^{\nu}(\mathbf{r},|\zeta)\widehat{\psi}\tilde{\Phi}(\zeta,t)d\mathbf{r}d\mathbf{R}d\zeta. \qquad (4)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\tilde{\Psi}(t)=\widehat{S}(t,-\infty)\Psi_{\Gamma}^{0},\quad \widehat{S}(t,-\infty)=\widehat{T}\exp\left(-i\int\limits_{-\infty}^{t'}\tilde{H}(t')dt'\right),$$

где $\tilde{\Psi}_{\Gamma}^{0}$ — волновая функция системы при $t\to-\infty$, т. е. до включения оператора $\tilde{H}'(t)$.

Представление Гейзенберга строится следующим образом:

$$\Psi_{\Gamma}^{0}=\widehat{S}^{+}(t,-\infty)\tilde{\Psi};\quad \overset{\vee}{\Phi}(t)=\widehat{S}^{+}(t,-\infty)\tilde{\Phi}(\zeta,t)\widehat{S}(t,-\infty).$$

Метод функций Грина в Г-пространстве

Нас интересует конструкция

$$D_{ll'}(\zeta,t,\zeta',t')=-i<\widehat{T}\overset{\vee}{\Phi}_{l}(\zeta,t)\overset{\vee}{\Phi}{}^{+}{}_{l'}(\zeta,t')>_{\Gamma}^{0}. \qquad (5)$$

Усреднение здесь подразумевается как в квантовом, так и в статистическом смысле. Индексы l и l' означают временные оси в технике Келдыша [5], $\widehat{T}$-хронологический оператор на временном контуре "с", начинающемся в точке $t\to-\infty$, простирающемся ($l=1$) до $t\to\infty$ и возвращающемся ($l=2$) вновь в точку $t\to-\infty$. Искомая матрица плотности может быть найдена следующим образом:

$$\rho(\zeta,\zeta',t)=\rho(\zeta,t,\zeta',t'|\mathbf{j})=iD_{12}(\zeta,t,\zeta',t')$$
$$\text{при } t'\to t. \qquad (6)$$

Выраженная через операторы в представлении взаимодействия конструкция (5) выглядит так

$$D_{ll'}(\zeta,t,\zeta',t')=-i<\widehat{T}\tilde{\Phi}_{l}(\zeta,t)\tilde{\Phi}_{l'}^{+}(\zeta',t')\widehat{S}_{c}>_{\Gamma}^{0},$$

$$\widehat{S}_{c}=\widehat{T}\exp\left(-i\sum_{l=1,2}(-1)^{l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{H}_{l}'(t')dt'\right). \qquad (7)$$

Индекс l у $\widehat{H}_{l}'(t)$ означает принадлежность той или иной ветви временного контура параметра t.

N-представление

Дальнейшие вычисления удобно производить в **N**-представлении, переход к которому осуществляется следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(\zeta,t)=\sum_{\mathbf{N}}\tilde{J}(\mathbf{N},t)\Phi^{0}(\mathbf{N}|\zeta),$$

$$\tilde{J}(\mathbf{N},t)=\int\Phi^{0}(\mathbf{N}|\zeta)\tilde{\Phi}(\zeta,t)d\zeta.$$

В этом представлении вместо (7) будем иметь

$$D_{ll'}(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t')=-i<\widehat{T}\tilde{J}_{l}(\mathbf{N},t)\tilde{J}_{l'}^{+}(\mathbf{N}',t')\widehat{S}_{c}>_{\Gamma}^{0}$$

и, согласно (4),

$$\tilde{H}'(t)=-\frac{e}{m}\cdot\sum_{\mathbf{NN}'}\int\tilde{J}^{+}(\mathbf{N},t)\widehat{\psi}^{+}\widehat{p}^{\nu}A_{\mathbf{NN}'}^{\nu}(\mathbf{r})\widehat{\psi}\tilde{J}(\mathbf{N}',t)d\mathbf{r}d\mathbf{R},$$

причем

$$A_{\mathbf{NN}'}^{\nu}(\mathbf{r})=\int\Phi^{0}(\mathbf{N}|\zeta)\widehat{A}^{\nu}(\mathbf{r}|\zeta)\Phi^{0}(\mathbf{N}'|\zeta)d\zeta.$$

Явный вид операторов $\tilde{J}(\mathbf{N},t)$ удобно находить из равенства

$$\tilde{J}(\mathbf{N},t)=\widehat{U}^{+}(t)\widehat{J}(\mathbf{N})\widehat{U}(t).$$

Из этого соотношения и из (3) следует, что

$$i\frac{d\tilde{J}(\mathbf{N},t)}{dt}=\left[\tilde{J}(\mathbf{N},t),\tilde{H}^{0}(t)\right]=$$
$$=\varepsilon(\mathbf{N})\tilde{J}(\mathbf{N},t)-\sum_{\mathbf{N}'}\int j^{\nu}(\mathbf{r},t)A_{\mathbf{NN}'}^{\nu\nu}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\tilde{J}(\mathbf{N}',t). \qquad (8)$$

Уравнению (8) можно придать вид интегрального уравнения

$$\tilde{J}(\mathbf{N},t)=\widehat{J}(\mathbf{N},t)-\sum_{\mathbf{N}'}\int\Delta_{r}^{0}(\mathbf{N},t-t_{1})j^{\nu}(\mathbf{r},t_{1})\times$$
$$\times A_{\mathbf{NN}'}^{\nu}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\tilde{J}(\mathbf{N}',t_{1})dt_{1}. \qquad (9)$$

Здесь $\widehat{J}(\mathbf{N},t)$ — оператор уничтожения конгломерата фотонов в представлении взаимодействия при $j^{\nu}=0$

$$\tilde{J}(\mathbf{N},t)=\widehat{J}(\mathbf{N})\exp(-i\varepsilon(\mathbf{N})t)\ \text{и}$$

$$\Delta_{r}^{0}(\mathbf{N},t-t')=-i\vartheta(t-t')\exp(-i\varepsilon(\mathbf{N})(t-t')).$$

Методом итераций уравнение (9) может быть явно разрешено

$$\tilde{J}(\mathbf{N},t)=\hat{J}(\mathbf{N},t)-\sum_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}\int\Delta_r^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}_1,t_1|\mathbf{j})j^{\nu}\times$$
$$\times(\mathbf{r},t_1)A^{\nu}_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\hat{J}(\mathbf{N}_2,t_1)dt_1,$$

при этом пропагатор $\Delta_r^0(\mathbf{j})$ находится из следующего интегрального уравнения:

$$\Delta_r^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})=\Delta_r^0(\mathbf{N},t)\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}')-$$
$$-\sum_{\mathbf{N}_1}\int\Delta_r^0(\mathbf{N},t-t_1)j^{\nu}(\mathbf{r},t_1)\times \qquad (10)$$
$$\times A^{\nu}_{\mathbf{N}\mathbf{N}_1}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\Delta_r^0(\mathbf{N}_1,t_1,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})dt_1.$$

Аналогичным образом для оператора $\tilde{J}^+(\mathbf{N},t)$ может быть получено следующее выражение:

$$\tilde{J}^+(\mathbf{N},t)=\hat{J}^+(\mathbf{N},t)-$$
$$-\sum_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}\int\hat{J}^+(\mathbf{N}_1,t_1)j^{\nu}(\mathbf{r},t_1)A^{\nu}_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\Delta_a^0(\mathbf{N}_2,t_1,\mathbf{N},t)dt_1;$$
$$\Delta_a^0(\mathbf{j})=\left(\Delta_r^0(\mathbf{j})\right)^+.$$

Явный вид операторов $\tilde{J}(\mathbf{N},t)$ и $\tilde{J}^+(\mathbf{N},t)$ позволяет вычислить их свертку

$$\left(\hat{T}-\hat{N}\right)\tilde{J}(\mathbf{N},t)\tilde{J}^+(\mathbf{N}',t')=\tilde{J}(\mathbf{N},t)\tilde{J}^+(\mathbf{N}',t'). \qquad (11)$$

Дифференцирование (11) по времени с учетом (9) позволяет для этой конструкции получить дифференциальное уравнение

$$i\frac{d}{dt}\tilde{J}(t,\mathbf{N})\tilde{J}^+(t',\mathbf{N}')=i\delta(t-t')\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}')+$$
$$+\varepsilon(\mathbf{N})\tilde{J}(\mathbf{N},t)\tilde{J}^+(\mathbf{N}',t')-$$
$$-\sum_{\mathbf{N}_1}\int j^{\nu}(\mathbf{r},t)A^{\nu}_{\mathbf{N}\mathbf{N}_1}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\tilde{J}(\mathbf{N}_1,t)\tilde{J}^+(\mathbf{N}',t').$$

Сопоставление этого уравнения с уравнением (10) показывает, что

$$\tilde{J}(\mathbf{N},t)\tilde{J}^+(\mathbf{N}',t')=i\Delta_r^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j}).$$

Система уравнений для матрицы плотности электромагнитного поля в среде

Согласно (6) в $\mathbf{N}$-представлении нас интересует матрица плотности

$$\rho(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})=iD_{12}(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t') \text{ при } t'\to t. \qquad (12)$$

При расчете конструкции (12) возникает стандартный ряд фейнмановских диаграмм. Поскольку повторное действие операторов уничтожения конгломератов обращает любое состояние в ноль [4], т. е. $\tilde{J}(\mathbf{N},t)\tilde{J}(\mathbf{N}',t')\equiv 0$, а свертка операторов $\Delta_r^0(\mathbf{j})$ представляет собой неоператорную функцию, то результат суммирования диаграмм внешне не отличается от выражений, полученных в [4] при $j^{\nu}=0$. Если распределение атомов по степеням свободы в отсутствие тока j^{ν} считать гауссовым, т. е.

$$<\hat{\psi}_1^+\hat{\psi}_2^+\hat{\psi}_3\hat{\psi}_4>=<\hat{\psi}_1^+\hat{\psi}_3><\hat{\psi}_2^+\hat{\psi}_4>+$$
$$+<\hat{\psi}_1^+\hat{\psi}_4><\hat{\psi}_2^+\hat{\psi}_3>,$$

то искомая матрица ρ распадается на сумму

$$\rho(\mathbf{j})=\rho^{(c)}(\mathbf{j})+\rho^{(n)}(\mathbf{j}),$$

причем когерентная компонента $\rho^{(c)}$ описывает процессы взаимодействия электромагнитного поля со средой, в результате которых атомы среды остаются в исходных (в том числе трансляционных) квантовых состояниях. Некогерентная компонента $\rho^{(n)}$ описывает процессы рассеяния, сопровождающиеся изменением атомных квантовых состояний. Для определения компонент $\rho^{(c)}$ и $\rho^{(n)}$ возникает следующая система уравнений:

$$\rho^{(c)}=\left(1+\Delta_r(\mathbf{j})\hat{\mathcal{P}}_r\right)\rho^0(\mathbf{j})\left(\hat{\mathcal{P}}_a\Delta_a(\mathbf{j})+1\right); \qquad (13)$$

$$\rho^{(n)}=-\Delta_r(\mathbf{j})\hat{\mathcal{P}}_{12}^{(n)}\Delta_a(\mathbf{j}),\ \hat{\mathcal{P}}_r^+=\hat{\mathcal{P}}_a. \qquad (14)$$

Обращает на себя внимание факт, что матрица плотности квантованного электромагнитного поля в среде управляется не одним, а двумя поляризационными операторами. В низшем приближении по константе взаимодействия электромагнитного поля со средой оказывается, что

$$\hat{\mathcal{P}}_r^{(c)}=-\left(\frac{e}{m}\right)^2\int\hat{p}^{\nu}\hat{A}^{\nu}G_r(X_1,X_2)\Delta_r^0(\mathbf{j})\times$$
$$\times\hat{p}^{\nu'}\hat{A}^{\nu'}G_{12}(X_2,X_1)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2d\mathbf{R}_1d\mathbf{R}_2;$$

$$\hat{\mathcal{P}}^{(n)}=\left(\frac{e}{m}\right)^2\int\hat{p}^{\nu}\hat{A}^{\nu}G_r(X_1,X_2)\rho^0(\mathbf{j})\times$$
$$\times\hat{p}^{\nu'}\hat{A}^{\nu'}G_{12}(X_2,X_1)d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2d\mathbf{R}_1d\mathbf{R}_2.$$

Через G_r, G_{12} и G_{21} обозначены функции Грина атомного газа, развернутые выражения для которых приведены в [4]. Что касается фотонных пропагаторов $\Delta_{r,a}$, то они находятся из

$$\Delta_r(\mathbf{j}) = \Delta_r^0(\mathbf{j}) + \Delta_r^0(\mathbf{j})\hat{\mathcal{P}}_r\Delta_r(\mathbf{j});$$

$$\Delta_a(\mathbf{j}) = \Delta_r^+(\mathbf{j}). \tag{15}$$

В уравнении (13) неопределенной осталась матрица $\rho^0(\mathbf{j})$, которая определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\rho^0(\mathbf{j}) &= \rho^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j}) = <\tilde{J}^+(\mathbf{N}',t')\tilde{J}(\mathbf{N},t)>_\Gamma^0 = \\
&= \rho^0(\mathbf{N},t-t')\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}') - \\
&-\sum_{\mathrm{N}_1}\int\Delta_r^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}_1,t_1|\mathbf{j})j^\nu(\mathbf{r},t_1)A^\nu_{\mathrm{N_1N'}}\times \\
&\times(\mathbf{r})d\mathbf{r}\rho^0(\mathbf{N}',t_1-t')dt_1d\zeta_1 + \\
&+\sum_{\mathrm{N}_2}\int\rho^0(\mathbf{N},t-t_2)j^\nu(\mathbf{r},t_2)A^\nu_{\mathrm{NN_2}}(\mathbf{r},)d\mathbf{r}\Delta_a^0\times \\
&\times(\mathbf{N}_2,t_2,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})dt_2 + \\
&+\sum_{\mathrm{N_1N_2N_3}}\int\Delta_r^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}_1,t_1|\mathbf{j})j^\nu(\mathbf{r}_1,t_1)A^\nu_{\mathrm{N_1N_2}}(\mathbf{r}_1)\times \\
&\times d\mathbf{r}_1\rho^0(\mathbf{N}_2,t_1-t_2)j^{\nu'}(\mathbf{r}_2,t_2)A^{\nu'}_{\mathrm{N_2N_3}}(\mathbf{r}_2)\times \\
&\times d\mathbf{r}_2\Delta_a^0(\mathbf{N}_3,t_2,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})dt_1dt_2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Наконец, матрица плотности $\rho^0(\mathbf{N},t-t')$ описывает свободное электромагнитное поле в вакууме при $t \to -\infty$, т. е. до включения взаимодействия его с током j^ν и атомами среды. Если, например, при $t \to -\infty$ была занята только одна мода $(\mathbf{k}_0, \lambda_0)$ и число фотонов в ней равнялось $N_{\mathbf{k}_0\lambda_0}$, то

$$\rho^0(\mathbf{N},t-t') = \delta(\mathbf{N},\mathbf{N}^0)\exp\left(-ik_0N_{\mathbf{k}_0\lambda_0}(t-t')\right),$$

$$\mathbf{N}^0 = 0,\ldots 0, N_{\mathbf{k}_0\lambda_0}, 0,\ldots$$

Если же электромагнитное поле описывается распределением Гиббса, то

$$\rho^0(\mathbf{N},t-t') = \rho^0(\mathbf{N})e^{-i\varepsilon(\mathbf{N})(t-t')},$$

$$\rho^0(\mathbf{N}) = Z^{-1}\exp\left(-\frac{\varepsilon(\mathbf{N})}{T}\right),$$

где Z — нормировочная константа.

Если в приведенной выше системе уравнений плотность внешнего тока j^ν окажется равной нулю, то мы вернемся к системе уравнений для матрицы ρ, приведенной в [4].

Важно отметить, что для вывода системы уравнений (13)—(15) не приходится рвать корреляторы фотон—фотон [4].

Решение уравнений для матрицы плотности

Для предварительного ознакомления со свойствами системы предположим, что мы имеем дело со стационарным во времени состоянием пространственно однородной системы, и $j^\nu(\mathbf{r},t) = 0$. В уравнении (13) следует положить $\rho^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t'|0) = \rho^0(\mathbf{N},t-t')\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}')$. В рассматриваемых условиях в $\mathbf{N}$-представлении как пропагаторы $\Delta_{r,a}$, так и поляризационные операторы $\hat{\mathcal{P}}_{r,a}$ оказываются диагональными* функциями по $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$ и зависящими лишь от разности времен. По этой причине после преобразования Фурье по $t - t'$ уравнение (15) решается явно

$$\Delta_r(\mathbf{N},\mathbf{N}',E|0) = \frac{\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}')}{E-\varepsilon(\mathbf{N})-\hat{\mathcal{P}}_r(E,\mathbf{N})}.$$

Подстановка этого выражения в (13) показывает, что

$$\rho^{(c)}(\mathbf{N},\mathbf{N}',E|0) = \left(1-\frac{\hat{\mathcal{P}}_r(\mathbf{N},E)}{E-\varepsilon(\mathbf{N})-\hat{\mathcal{P}}_r(\mathbf{N},E)}\right)\times$$

$$\times\rho^0(\mathbf{N},E)\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}')\left(1-\frac{\hat{\mathcal{P}}_a(\mathbf{N}',E)}{E-\varepsilon(\mathbf{N}')-\hat{\mathcal{P}}_a(\mathbf{N}',E)}\right). \tag{17}$$

Выражение (17) равно нулю, поскольку как левая скобка, так и правая оказываются пропорциональными разности $E - \varepsilon(\mathbf{N})$, а матрица плотности электромагнитного поля, не взаимодействующего со средой $\rho^0(\mathbf{N},E)$, в свою очередь пропорциональна $2\pi\delta(E-\varepsilon(\mathbf{N}))$. Обращение в ноль матрицы $\rho^{(c)}$ означает, что исходное состояние электромагнитного поля при переходе системы в стационарное состояние не играет роли. Стационарные состояния системы определяются однородным относительно матрицы $\rho^{(n)}$ уравнением (14).

Иначе обстоит дело в отсутствие среды. Здесь $\hat{\mathcal{P}}_r(\mathbf{N},E) = 0$ и, согласно (13), оказывается, что $\rho^{(c)}(\mathbf{N},\mathbf{N}',E|0) = \rho^0(\mathbf{N},E)\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}')$. Как и следовало ожидать, теперь исходное распределение $\rho^0(\mathbf{N}, \mathrm{E})$ оказывается стационарным и сохраняется в те-

---

* Если отказаться от предположения о квазирезонансности и учесть недиагональные элементы поляризационных операторов $\hat{\mathcal{P}}_{r,a}$, то выводы работы не изменятся.

чение времени. Вместе с тем наличие сколь угодно малого $\hat{\mathcal{P}}_r(\mathbf{N},E)\neq 0$ кардинально меняет картину и обращает матрицу $\rho^{(c)}(\mathbf{N}, E)$ в ноль. Такая неаналитичность по $\hat{\mathcal{P}}_r$ не может быть исследована методами теории возмущений. Ниже будем считать $\hat{\mathcal{P}}_{r,a}$ малыми величинами, что отвечает малой концентрации атомарного фона.

Пусть теперь в среде присутствует внешний ток $j^\nu(\mathbf{r}, t)$. Вновь рассмотрим когерентный канал рассеяния и матрицу плотности $\rho^{(c)}$. Как и выше, будет удобнее воспользоваться $\mathbf{N}$-представлением. При этом формулу (16) запишем в виде

$$\rho^0(\mathbf{j})=\rho^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})=$$
$$=\sum_{\mathbf{N}_1}\left(\delta(\mathbf{N},\mathbf{N}_1)e^{-i\varepsilon(\mathbf{N})t}+Z(\mathbf{N},\mathbf{N}_1,t)\right)\rho^0(\mathbf{N}_1)\times$$
$$\times\left(\delta(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}')e^{i\varepsilon(\mathbf{N}')t'}+Z^*(\mathbf{N}',\mathbf{N}_1,t')\right), \tag{18}$$

где

$$Z(\mathbf{N},\mathbf{N}_1,t)=-\sum_{\mathbf{N}_2}\int\Delta_r^0(\mathbf{N},t,\mathbf{N}_2,t_2|\mathbf{j})j^\nu(\mathbf{r},t_2)\times$$
$$\times A^\nu_{\mathbf{N}_2\mathbf{N}_1}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\exp\left(-i\varepsilon(\mathbf{N}_1)t_2\right)dt_2,$$
$$Z^*(\mathbf{N}',\mathbf{N}_1,t')=-\sum_{\mathbf{N}_2}\int j^\nu(\mathbf{r},t_2)A^\nu_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}(\mathbf{r})d\mathbf{r}\Delta_a^0\times$$
$$\times(\mathbf{N}_2,t_2,\mathbf{N}',t'|\mathbf{j})\exp(i\varepsilon(\mathbf{N}_1)t_2)dt_2.$$

Пусть концентрация атомов среды отсутствует и $\hat{\mathcal{P}}_r=0$. Из уравнений (13)—(14) следует, что $\rho=\rho^{(c)}=\rho^0(\mathbf{j})$. Для расчета $\rho^0(\mathbf{j})$ надо знать пропагатор $\Delta_r^0(\mathbf{j})$, определяемый уравнением (10). Уравнение (10) допускает точное решение в аналитической форме [6]. Это решение удобно представить в ζ-представлении

$$\Delta_r^0(\zeta,t,\zeta',t'|\mathbf{j})=-i\vartheta(t-t')\sum_{\mathbf{N}}\Phi^*(\mathbf{N},\alpha|\zeta,t)\Phi(\mathbf{N},\alpha|\zeta',t');$$

$$\Phi(\mathbf{N},\alpha|\zeta,t)=\exp\left(-i\hat{H}_{ph}t\right)\prod_{\mathbf{k}\lambda}\varphi(N_{\mathbf{k}\lambda},\alpha_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda}).$$

Здесь вектор α определяется компонентами $\alpha=\ldots,\alpha_{\mathbf{k}\lambda},\ldots$, функции $\varphi(N,\alpha|\zeta)$ удовлетворяют уравнению

$$i\frac{\partial\varphi(N_{\mathbf{k}\lambda},\alpha_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda})}{\partial t}=$$
$$=-\int j^\nu(\mathbf{r},t)\hat{A}^\nu_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}\varphi(N_{\mathbf{k}\lambda},\alpha_{\mathbf{k}\lambda}|\zeta_{\mathbf{k}\lambda}),$$

где

$$\hat{A}^\nu_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{k}\lambda}\frac{e^\lambda_{\mathbf{k}\nu}}{\sqrt{2kV}}\left(\hat{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-ikt}+\hat{\alpha}^+_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}+ikt}\right). \tag{19}$$

Из работы [6] видим, что

$$\varphi(N,\alpha|\zeta)=(-1)^N(2^NN!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left(\frac{|\alpha|^2+\alpha^{*2}+\zeta^2}{2}-\sqrt{2}\alpha^*\zeta\right)\frac{d^N}{d\zeta^N}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(\alpha+\alpha^*-\sqrt{2}\zeta)^2}{2}\right).$$

Эти функции обладают свойствами

$$\left(\hat{\alpha}-\alpha\right)\varphi(N,\alpha|\zeta)=\sqrt{N}\varphi(N-1,\alpha|\zeta);$$
$$\left(\hat{\alpha}^+-\alpha^*\right)\varphi(N,\alpha|\zeta)=\sqrt{N+1}\;\varphi(N+1,\alpha|\zeta);$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*(N,\alpha|\zeta)\varphi(M,\beta|\zeta)d\zeta=$$
$$=\sqrt{N!M!}\exp\left[\alpha\beta^*-\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{2}\right]\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\min N,M}\frac{(\beta-\alpha)^{N-j}\left(\alpha^*-\beta^*\right)^{M-j}}{(N-j)!j!(M-j)!}.$$

Что касается параметра $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}$, то он определяется как

$$\alpha_{\mathbf{k}\lambda}=\frac{i}{\hbar c}\int_{-\infty}^{t}j^\nu(\mathbf{r},t')\,e^\lambda_{\mathbf{k}\nu}\sqrt{\frac{\hbar c}{2kV}}\exp\left(-i\mathbf{k}\mathbf{r}+ikt'\right)d\mathbf{r}dt'. \tag{20}$$

В этом выражении восстановлены опущенные выше постоянные $\hbar$ и c. Из (20) следует, что при любом $\hbar$, если только $V\to\infty$, параметры $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}\sim j^\nu/\sqrt{V\hbar}$ оказываются сколь угодно малыми.

Таким образом, при исследовании процессов излучения в неограниченном пространстве достаточно учесть в приведенных выше функциях лишь низшие члены разложения по току j^ν. В низшем (линейном) приближении по току функция $Z(\mathbf{N}, \mathbf{N}_1, t)$ равна

$$Z(\mathbf{N},\mathbf{N}_1,t)=i\int\vartheta(t-t_2)e^{-i\varepsilon(\mathbf{N})(t-t_2)}j^\nu(\mathbf{r},t_2)\times$$
$$\times A^\nu_{\mathbf{N}\mathbf{N}_1}(\mathbf{r})d\mathbf{r}e^{-i\varepsilon(\mathbf{N}_1)t_2}dt_2.$$

Теперь для среднего значения оператора $\hat{A}^\nu(\mathbf{r})$ будем иметь

$$<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})>=A^{\nu}(\mathbf{r},t)+A^{\nu *}(\mathbf{r},t), \qquad (21)$$

где при $t'\to t$

$$\begin{aligned} A^{\nu}(\mathbf{r},t) &= Sp\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\rho^{0}(\mathbf{j}) = i\sum_{\mathrm{NN_1}} e^{i\varepsilon(\mathrm{N_1})t}A^{\nu}_{\mathrm{N_1N}}(\mathbf{r})\times \\ &\times\int e^{-i\varepsilon(\mathrm{N})(t-t_1)}\vartheta(t-t_1)j^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\times \\ &\times\hat{A}^{\nu_1}_{\mathrm{NN_1}}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 e^{-i\varepsilon(\mathrm{N_1})t_1}dt_1\rho^{0}(\mathbf{N}_1) = \end{aligned} \qquad (22)$$

$$= i\int<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r},t)\vartheta(t-t_1)j^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{A}^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)>_0 d\mathbf{r}_1dt_1 =$$
$$= -\int D^{\nu\nu_1}_{21}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t-t_1)j^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\vartheta(t-t_1)d\mathbf{r}_1dt_1.$$

Через $\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r},t)$ здесь обозначен зависящий от времени оператор электромагнитного поля, определенный в стандартном представлении вторичного квантования и записанный в представлении взаимодействия (19). Индекс $>_0$ означает усреднение по полю идеальных фотонов. Обозначение $D^{\nu\nu_1}_{21}$ заимствовано из техники гриновских функций Келдыша [4, 5], причем индексы 2 и 1 обозначают положительную и отрицательную ветви временного контура, фигурирующие в этой технике. Пропагатор $D^{\nu\nu_1}_{21}$ легко вычисляется

$$\begin{aligned} D^{\nu\nu_1}_{21}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t-t_1) &= -i<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r},t)\hat{A}^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)>_0= \\ &= -i\sum_{\mathbf{k}\lambda}\frac{e^{\lambda}_{\mathbf{k}\nu}e^{\lambda}_{\mathbf{k}\nu_1}}{2kV}\Big(<1+N_{\mathbf{k}\lambda}>e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)-ik(t-t_1)}+ \\ &+<N_{\mathbf{k}\lambda}>e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)+ik(t-t_1)}\Big). \end{aligned} \qquad (23)$$

Если считать, что в отсутствие j^{ν} система находилась в состоянии термодинамического равновесия, то

$$<N_{\mathbf{k}\lambda}>=\sum_{N_{\mathbf{k}\lambda}}N_{\mathbf{k}\lambda}\left(1-e^{-\frac{k}{T}}\right)\exp\left(-\frac{kN_{\mathbf{k}\lambda}}{T}\right).$$

Суммирование в (23) по $(\mathbf{k},\lambda)$ может быть выполнено явно. Для $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\to\infty$ возникает асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} \vartheta(t-t_1)D^{\nu\nu_1}_{21}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,t-t_1) &= \\ = -\frac{i}{8\pi^2}\frac{\delta_{\nu\nu_1}-n^{\nu}n^{\nu_1}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}\Bigg[&\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-(t-t_1)+i0}+ \\ &+2\sum_{N=0}^{\infty}\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-(t-t_1)}{\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-(t-t_1)\right)^2+\frac{(N+1)^2}{T^2}}\Bigg]\vartheta(t-t_1), \end{aligned} \qquad (24)$$

причем $\mathbf{n}=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|$. Согласно (21), (22) и (24) находим, что

$$<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})>=\sum_{\nu_1}\frac{\delta_{\nu\nu_1}-n^{\nu}n^{\nu_1}}{4\pi r}\times$$
$$\times\int j^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\delta\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|-(t-t_1)\right)\vartheta(t-t_1)d\mathbf{r}_1dt_1$$

при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|\to\infty$.

Последнее выражение повторяет хорошо известную связь векторного потенциала и генерирующего его тока в классической физике. Если $j^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\sim\delta(\mathbf{r}_1)\delta(t_1)$, то $<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})>\sim\delta(|\mathbf{r}|-t)$, при этом точка $|\mathbf{r}|=t$ определяет собой баллистический фронт сигнала, распространяющийся со скоростью света.

Ситуация кардинально меняется, если ток j^{ν} генерирует электромагнитное поле в среде и $\hat{\mathcal{T}}_r\neq 0$. Теперь следует воспользоваться полным выражением (13) для определения матрицы $\rho^{(c)}$. В линейном приближении по току плотность тока j^{ν} может содержаться лишь в одном из сомножителей $\hat{\mathcal{T}}_r$, $\rho^{0}(\mathbf{j})$ или $\hat{\mathcal{T}}_a$. Имея в виду малость $\hat{\mathcal{T}}_{r,a}$, зависимость от тока следует оставить только в $\rho^{0}(\mathbf{j})$. Подстановка (18) в (13) легко дает $\rho^{(c)}=0$. Эта матрица обращается в ноль из-за действия на $\rho^{0}(\mathbf{j})$ либо левой, либо правой скобки в выражении (13) по той же причине, по которой мы получили нулевой результат в формуле (17).

Из сказанного выше приходим к выводу, что при наличии сколь угодно малой концентрации атомов среды согласно последовательной квантовой теории классический ток генерирует электромагнитное поле с нулевыми средними значениями напряженностей электрической и магнитной компонент. По теории возмущений такой результат получен быть не может.

Обратимся к расчету билинейной комбинации $<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}')>$. Пусть сперва $\hat{\mathcal{T}}_r=0$ и атомарный фон среды отсутствует. Здесь $\rho^{(c)}=\rho^{0}(\mathbf{j})$. Нас интересует низшее приближение по току, пропорциональное произведению $j^{\nu_1}j^{\nu_2}$. Согласно (18) имеем три слагаемых $<\hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}')>=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}$, которые рассмотрим порознь. Начнем с первого из них

$$\mathrm{I}=\sum_{\mathrm{N'N_2N}}\hat{A}^{\nu}_{\mathrm{N'N_2}}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}_{\mathrm{N_2N}}(\mathbf{r}')\times$$
$$\times\sum_{\mathrm{N_1}}Z(\mathbf{N},\mathbf{N}_1,t)\rho^{0}(\mathbf{N}_1)Z^{*}(\mathbf{N}',\mathbf{N}_1,t)=$$
$$=A^{\nu}(\mathbf{r},t)A^{\nu'*}(\mathbf{r}',t)+A^{\nu *}(\mathbf{r},t)A^{\nu'}(\mathbf{r}',t).$$

Здесь каждая из функций Z и Z^* вычисляется в линейном приближении по току.

$$\mathrm{II} = \sum_{N'N_2N} \hat{A}^{\nu}_{N'N_2}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}_{N_2N}(\mathbf{r}')\times$$

$$\times\sum_{N_1} Z(\mathbf{N},\mathbf{N}_1,t)\rho^0(\mathbf{N}_1)\delta(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}')e^{i\varepsilon(\mathbf{N}')t} =$$

$$= -\frac{1}{2} < \hat{A}^{\nu}(\mathbf{r},t)\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}',t)\hat{T}\int_{-\infty}^{t} j^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)\hat{A}^{\nu_1}(\mathbf{r}_1,t_1)d\mathbf{r}_1dt_1\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{t} j^{\nu_2}(\mathbf{r}_2,t_2)\hat{A}^{\nu_2}(\mathbf{r}_2,t_2)d\mathbf{r}_2dt_2 >_0=$$

$$= A^{\nu}(\mathbf{r},t)A^{\nu'}(\mathbf{r}',t).$$

Здесь функция Z вычисляется в квадратичном приближении по току.

$$\mathrm{III} = \sum_{N'N_2N} \hat{A}^{\nu}_{N'N_2}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}_{N_2N}(\mathbf{r}')\times$$

$$\times\sum_{N_1} \delta(\mathbf{N},\mathbf{N}_1)e^{-i\varepsilon(\mathbf{N})t}\rho^0(\mathbf{N}_1)Z^*(\mathbf{N}',\mathbf{N}_1,t) =$$

$$= A^{\nu*}(\mathbf{r},t)A^{\nu'*}(\mathbf{r}',t).$$

Теперь очевидно, что

$$< \hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}') >= \left(A^{\nu}(\mathbf{r},t)+A^{\nu*}(\mathbf{r},t)\right)\times \left(A^{\nu'}(\mathbf{r}',t)+A^{\nu'*}(\mathbf{r}',t)\right) \quad (25)$$

представляет собой хорошо известное выражение классической физики.

Пусть $\hat{\mathcal{P}}_r \neq 0$, и излучение классического тока происходит в пространстве, заполненном газом малой плотности $(\hat{\mathcal{P}}_r \to 0)$. Результаты расчетов существенно меняются, поскольку, согласно (13), теперь исчезают слагаемые II и III. Они исчезают по тем же причинам, которые в (17) обратили в ноль матрицу $\rho^{(c)}$. При $\hat{\mathcal{P}}_r \neq 0$ и сколь угодно малой концентрации газового фона на смену выражению классической физики (25) приходит следующее:

$$< \hat{A}^{\nu}(\mathbf{r})\hat{A}^{\nu'}(\mathbf{r}') >= = \mathrm{I} = A^{\nu}(\mathbf{r},t)A^{\nu'*}(\mathbf{r}',t)+A^{\nu*}(\mathbf{r},t)A^{\nu'}(\mathbf{r}',t). \quad (26)$$

Подчеркнем, что это выражение по теории возмущений получено быть не может. Оказывается, что среду достаточно заполнить атомами сколь угодно малой концентрации, чтобы кардинально изменить результаты классической физики. В этих условиях классический ток j^{ν} генерирует квантованное поле с равными нулю электрической и магнитной напряженностями его компонент. Вместе с тем билинейные комбинации (26) от полевых операторов оказываются отличными от нуля и точно факторизуются в виде произведения функций $A^{\nu}(\mathbf{r}, t)$. Эти функции теперь самостоятельного значения не имеют. Их можно назвать псевдоамплитудами. С их помощью вычисляются средние от билинейных комбинаций полевых операторов. Если температура равна нулю ($T = 0$), то

$$A^{\nu}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{8\pi^2}\int\frac{\delta_{\nu\nu'}-n^{\nu}n^{\nu'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\frac{j^{\nu'}(\mathbf{r}',t')\vartheta(t-t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-(t-t')+i0}d\mathbf{r}'dt'$$

представляет собой положительно частотную часть классического векторного потенциала.

Полученный результат отличается от результата классической электродинамики тем, что теперь билинейные комбинации $< \hat{A}^{\nu}\hat{A}^{\nu'} >$ определяются не квадратичной формой классических электромагнитных потенциалов, а лишь их положительно частотной частью.

Возникшая ситуация с факторизацией корреляторов аналогична ситуации в теории сверхпроводимости [7], в которой коррелятор четвертого порядка

$$< \hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi}^{+}\hat{\psi}^{+} >=< \hat{\psi}\hat{\psi} >< \hat{\psi}^{+}\hat{\psi}^{+} >$$

аппроксимируется аномальными корреляторами второго порядка, самостоятельного физического смысла не представляющими. Более того, если корреляторам $< \hat{\psi}\hat{\psi} >$ и $< \hat{\psi}^{+}\hat{\psi}^{+} >$ пытаться приписать физический смысл, то они, очевидным образом, обратятся в ноль.

Нам представляется, что ситуация, возникшая при исследовании излучения тока j^{ν} в атомарной среде отчасти проясняет вопрос о том, почему квантовая теория лазеров [8], описывающая генерацию излучения с равными нулю $< \hat{E}^{\nu} >$ и $< \hat{B}^{\nu} >$, и квазиклассическая теория лазеров [9], принципиально требующая наличия $< \hat{E}^{\nu} >\neq 0$ и $< \hat{B}^{\nu} >\neq 0$, приводят к практически совпадающим результатам для усредненных билинейных комбинаций операторов электромагнитного поля.

Наконец, обратим внимание на прикладное значение полученных результатов. Если считать в электромагнитной волне $< \hat{E}^{\nu} >$ и $< \hat{B}^{\nu} >$ измеримыми величинами, что квантовая теория принципиально допускает, то наличие фонового газа принципиально меняет условия генерации классического тока j^{ν}. Прагматический аспект измеримости $< \hat{E}^{\nu} >$ и $< \hat{B}^{\nu} >$ обсуждался в [10].

При этом были сформулированы условия такого эксперимента. Вместе с тем не видно практической возможности реализации эксперимента подобного рода, но обращается внимание на расчеты по торможению классических заряженных частиц в средах [11], принципиально описываемых квантовой теорией (твердые тела, жидкости, молекулярные газы). Сила торможения в таких расчетах определяется как $F^{\nu} = q < \widehat{E}^{\nu} >$, где q — заряд классической частицы; генерируемое самой классической частицей поле $< \widehat{E}^{\nu} >$ трансформируется средой. Задачи подобного рода, как и задачи нелинейной оптики, анализ которых часто опирается на отличные от нуля значения $< \widehat{E}^{\nu} > \neq 0$, должны быть теперь должным образом переосмыслены.

Пусть $T \neq 0$ и $\hat{\mathcal{P}}_r \neq 0$. Средние значения операторов напряженностей $< \widehat{E}^{\nu} >$ и $< \widehat{B}^{\nu} >$, как было сказано, обращаются в ноль. Билинейные комбинации полей находятся из формулы (26). Согласно (22) и (24) имеем

$$A^{\nu}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{8\pi^2 c}\int \frac{\delta_{\nu\nu'} - n^{\nu}n^{\nu'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\frac{j^{\nu'}(\mathbf{r}',t')\vartheta(t-t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - c(t-t') + i0}\,d\mathbf{r}'dt' +$$
$$+\frac{i}{4\pi^2 c}\int \frac{\delta_{\nu\nu'} - n^{\nu}n^{\nu'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,j^{\nu'}(\mathbf{r}',t')\vartheta(t-t')\times$$
$$\times\sum_{N=0}^{\infty}\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - c(t-t')}{\left(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - c(t-t')\right)^2 + c^2\,\dfrac{\hbar^2(N+1)^2}{T^2}}\,d\mathbf{r}'dt'. \qquad (27)$$

Здесь вновь восстановлены постоянные $\hbar$ и c. Эта формула примечательна следующим. При отличной от нуля температуре классический ток генерирует псевдоамплитуду $A^{\nu}(\mathbf{r},t)$ с некоторой температурной добавкой. Эта добавка возникает как результат взаимодействия тока j^{ν} с термодинамическим фоном фотонов, подчиняющихся распределению Планка. Добавочное слагаемое обращается в бесконечность при $\hbar \to 0$ по той же причине, по которой в этих условиях обращается в бесконечность постоянная Стефана—Больцмана.

Наиболее важным следствием формулы (27) оказывается предсказание сверхсветовых сигналов. Если $j^{\nu}(\mathbf{r}',t') \sim \delta(t')\delta(\mathbf{r}')$, то псевдоамплитуда $A^{\nu}(\mathbf{r},t)$ вследствие размытия фронта (27) оказывается отличной от нуля в точках, опережающих баллистический фронт классического сигнала $|\mathbf{r}| = t$. При этом размытие баллистического фронта тем существеннее, чем большее число фотонов N электромагнитного фона вовлечено в процесс излучения классического тока.

Мы утверждаем, что это — точный результат квантовой электродинамики, полученный без использования теории возмущений. При выводе этого результата никаких приближений использовано не было.

Заключение

Задача генерации излучения классическим током может служить моделью для исследования свойств точных решений квантовой электродинамики при анализе реакции системы на другие внешние воздействия.

Автор признателен А. А. Рухадзе и участникам руководимого им семинара за плодотворное и благожелательное обсуждение работы.

Литература

1. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов.// В сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика. — М: Мир, 1986.
2. *Дзялошинский И. Е., Питаевский Л. П.*// ЖЭТФ, 1959. Т. 36. Вып. 6. С. 1797.
3. *Ткачук Г. Б.*// Труды/ Моск. энерг. ин-т, 1978. Вып. 350. С. 26.
4. *Векленко Б. А.*// ЖЭТФ. 1989. Т. 96. Вып 2. С. 457.
5. *Келдыш Л. В.*// Там же. 1964. Т. 47. Вып. 4 (10). С. 1515.
6. *Векленко Б. А.*// Труды/ Моск. энерг. ин-т, 1978. Вып. 350. С. 8.
7. *Горьков Л. П.*// ЖЭТФ. 1958. Т. 34. Вып. 3. С. 735.
8. *Scally M. O., Lamb W. E.*// Phys. Rev., 1967. V. 159. № 2. P. 208.
9. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах./ Под ред. Ю. Л. Климонтовича. — М: Наука, 1974.
10. *Гейтлер В.* Квантовая теория излучения. — М.: ИЛ., 1956. С. 100.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

Статья поступила в редакцию 9 августа 2005 г.

Quantum radiation of classical current in dielectric media and diffusion of electromagnetic wave front in vacuum

B. A. Veklenko
Institute for High Temperature, Moscow, Russia

The problem of quantum radiation of a classical current in dilute atomic gas is solved. It is shown that the properties of exact solution in quantum electrodynamics are in qualitative disagreement with the ones obtained in the framework of perturbation theory. In accordance with the exact solution, quantum mean values of operators corresponding to electric and magnetic field intensities are equal to zero. But the mean values of squares of these operators are not equal to zero. It is shown that a classical current in external electromagnetic field background creates induces radiation. The superluminous radiation occurs preceding the ballistic front of the signal.

УДК 533.9

Релятивистская пондеромоторная сила квазимонохроматической волны

В. П. Милантьев
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

С помощью последовательной процедуры метода усреднения получено общее выражение для пондеромоторной силы, с которой мощная квазимонохроматическая волна действует на релятивистскую заряженную частицу. Поле волны рассматривается в приближении геометрической оптики. Отмечена существенная зависимость пондеромоторной силы от поляризации волны и от соотношения между скоростью частицы и фазовой скоростью волны. В частности, в случае продольной волны пондеромоторная сила меняет знак, когда скорость частицы превышает 1/3 фазовой скорости волны. Рассмотрена пондеромоторная сила давления продольной квазимонохроматической волны, действующая на релятивистскую плазму.

С пондеромоторными силами связаны разнообразные явления, происходящие при нелинейном взаимодействии высокочастотных волн с частицами плазмы (самофокусировка и филаментация лазерных пучков, образование кавитонов, параметрические неустойчивости, генерация магнитного поля в лазерной плазме и т. п.). В работе [1] было впервые показано, что в монохроматическом электромагнитном поле с произвольной пространственной зависимостью амплитуды

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{r})\exp(-i\omega t)$$

на частицу с зарядом e и массой m действует усредненная (пондеромоторная) сила

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4m\omega^2}\nabla\left|\vec{E}\right|^2. \quad (1)$$

Эту силу, имеющую потенциальный характер, называют силой Миллера. В дальнейшем проводился анализ применимости формулы Миллера и были получены ее различные обобщения [2—8]. В частности, в связи с созданием мощных источников электромагнитного излучения разных диапазонов встал вопрос о релятивистском обобщении пондеромоторной силы. Этот вопрос обсуждался во многих работах. В работе [8] на примере релятивистского движения частицы в поле электромагнитной волны в прямоугольном волноводе методом последовательных приближений было показано, что пондеромоторная сила не является потенциальной. Рассмотрение пондеромоторной силы при произвольной интенсивности поля излучения проводилось в работах [6, 7] на основе лагранжева подхода. В настоящей работе дается последовательный вывод релятивистской пондеромоторной силы на основе метода усреднения Боголюбова [4, 5]. Предполагается, что малый параметр, равный отно-