

ным моментом, требуются также три типа подобных уравнений. Полевые уравнения сформулированы в настоящей статье. Работа, связанная с определенными нюансами в отношении уравнений движения для магнитных моментов, будет продолжена.

Л и т е р а т у р а

1. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. — М.: Мир, 1977. Т. 2. С. 525.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, ГР ФМЛ, 1973. С. 504.
3. Меллер К. Теория относительности. Изд. 2-е. — М.: Атомиздат, 1975. С. 400.

Статья поступила в редакцию 21 декабря 2004 г.

Conclusion of the equations of the electromagnetic field produced by the magnetic moments

V. E. Domrachev

Scientifically Research Institute "Helium", Vinnitsa, Ukraine

Applying a mathematical formalism of the general theory of relativity to electrodynamics in linear variant of the theory, at the account of rotation of separate charges two systems of the equations of a field turn out. The first system corresponds to the equations of the electromagnetic field produced by electric charges, and coincides with Maxwell's equations. The second system corresponds to the equations of the electromagnetic field produced by the magnetic moments. And these equations are independent of Maxwell's equations and equal in rights with them.

УДК 678.067:536.21

Теплопроводность гетерогенных материалов. Часть I. Модель структуры гетерогенных материалов с взаимопроникающими компонентами*

С. Г. Жиров, А. А. Коптелов, Ю. М. Милехин

Федеральный центр двойных технологий "Союз", г. Дзержинский, Московская обл., Россия

Предложена вероятностная модель структуры материала, отражающая хаотичность распределения в матрице частиц наполнителей, размеры которых распределены по произвольному закону. Рассмотренная модель является основой для создания принципиально нового подхода к расчету эффективной теплопроводности неоднородных материалов с взаимопроникающими компонентами.

Расчет эффективной теплопроводности λ гетерогенных материалов чаще всего проводят, заменяя их реальную структуру наиболее подходящими моделями упорядоченных структур, в которых можно выделить элементарную ячейку или период, т. е. обладающих дальним порядком [1—4]. Такие модели не отражают реальной хаотичности распределения наполнителей в матрице; полученные с их помощью формулы для расчета λ , как правило, применимы лишь в ограниченных диапазонах степеней наполнения и соотношениях теплопроводностей наполнителя и матрицы. В ряде случаев удовлетворительное описание эффективной проводимости систем матричного типа достигается при использовании

метода построения асимптотических формул, предложенного впервые Максвеллом [5], и метода возмущений [6]. Однако первый из них применим в приближении малой концентрации включений, а второй — при любой концентрации компонентов, но при малых изменениях проводимости. Имеющиеся более или менее узкие двухсторонние неравенства ("вилки") для эффективной теплопроводности [5, 7, 8], основанные на применении вариационных принципов и призванные избежать грубых погрешностей, в ряде практических случаев неприменимы. В частности, такие оценки некорректны для сильно неоднородных систем и не имеют смысла, если характерный размер изучаемой гетерогенной системы соизмерим с периодом структуры упорядоченной модели.

* Часть II будет опубликована в № 4 настоящего журнала.

Предложенная в настоящей работе вероятностная модель структуры относится к системам, в которых частицы наполнителя, распределенного в матрице, могут контактировать друг с другом, образуя непрерывную фазу. В этом случае компоненты системы можно назвать "взаимопроникающими" [1]. Анализ имеющихся экспериментальных данных дает основания полагать, что такая структура лучше отражает реальное строение полимера, содержащего дисперсные наполнители, по сравнению с системой хорошо смачиваемых материалом матрицы неконтактирующих частиц.

Допустим, что частицы наполнителя представляют собой кубики одного размера с параллельными гранями; центры кубиков хаотически распределены в объеме матрицы. Сначала предположим, что все кубики одинаковы и имеют длину ребра α . Если в такой системе провести линию в направлении теплового потока x , перпендикулярного граням кубиков, то длины δ и β отрезков, расположенных, соответственно, в первом (матрица) и втором (наполнитель) компонентах, могут принимать значения, соответственно, от 0 до ∞ и от α до ∞ . Отложим на оси x отрезок длиной L , на который укладывается целое число ячеек длиной α ($n = L/\alpha$). Если v — среднее число частиц, приходящихся на единицу длины, то $P = vL/n$ — вероятность попадания в такую ячейку одной частицы наполнителя, а $(1 - P)$ — вероятность того, что частица в ячейку не попадет. Очевидно, что в данном случае P — это объемная степень заполнения материала ($0 < P < 1$). Вероятность того, что на отрезок L попадет ровно m кубиков, выразится соотношением

$$F_m = C_n^m P^m (1 - P)^{n-m}.$$

Рассматриваемый участок будет весь занят наполнителем, если $n = m$, при этом $F_m = P^m$. Заменяя суммирование вероятностей получения непрерывных "цепочек" наполнителя с числом ячеек от $m = 1$ до ∞ приближенным интегрированием

$$\sum_{m=1}^{\infty} F_m \approx \int_1^{\infty} P^k dk = -\frac{P}{\ln P},$$

получим выражение для плотности вероятности нахождения любых непрерывных длин фазы наполнителя $\beta \geq \alpha$

$$f(\beta) = -\frac{1}{\alpha} \ln P \cdot P^{\beta/\alpha - 1}. \quad (1)$$

Легко убедиться, что $\int_{\alpha}^{\infty} f(\beta) d\beta = 1$. Среднее значение длины непрерывной фазы наполнителя при $\alpha = \text{const}$, т. е.

$$\bar{\beta} = \int_{\alpha}^{\infty} \beta f(\beta) d\beta = \alpha \frac{\ln P - 1}{\ln P}.$$

Выше рассматривались частицы наполнителя одного размера. Предположим, что эти частицы имеют разные размеры, распределенные, например, по нормальному закону

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sigma_{\alpha} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\sigma_{\alpha}^2} \right],$$

где α_0 — среднее значение α ;

σ_{α} — среднеквадратическое отклонение.

Для определения плотности распределения непрерывной фазы наполнителя в этом случае воспользуемся формулой

$$f(\beta, \alpha) = f(\alpha) \cdot f(\beta/\alpha), \quad (2)$$

где $f(\beta, \alpha)$ — совместная плотность распределения;

$f(\beta/\alpha)$ — условная плотность распределения β при постоянном значении α .

Значение $f(\beta/\alpha)$ определяется выражением (1), полученным при фиксированном α . Отсюда следует

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \int_0^{\infty} f(\beta, \alpha) d\alpha = \\ &= -\frac{\ln P}{P\sigma_{\alpha}\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\sigma_{\alpha}^2} + \frac{\beta}{\alpha} \ln P \right] d\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Интеграл (3) вычисляется при $\beta \geq \alpha$. Зависимости $f(\beta)$ для различных α_0 , σ_{α} и P приведены на рис. 1, а. Таким же образом могут быть найдены плотности распределения $f(\beta)$ при других видах функции $f(\alpha)$.

Для материала, содержащего M фракций наполнителя, плотность распределения $f(\beta)$ можно найти по формуле

$$f(\beta) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^M P_i f_i(\beta) \left(\sum_{i=1}^M P_i = P \right),$$

где P_i — объемная доля i -го наполнителя;

$f_i(\beta)$ — функция, определяемая по формуле (3) при параметрах распределения α_{0i} и $\sigma_{\alpha i}$.

По аналогии с формулой (1) получим следующее выражение для плотности распределения расстояния δ между частицами (кубиками с длиной ребра α):

$$f(\delta) = -\frac{1}{\alpha} (1 - P)^{\delta/\alpha} \ln(1 - P). \quad (4)$$

Среднее расстояние между частицами в направлении x , перпендикулярном граням кубиков, будет

$$\bar{\delta} = -\frac{\alpha}{\ln(1 - P)}.$$

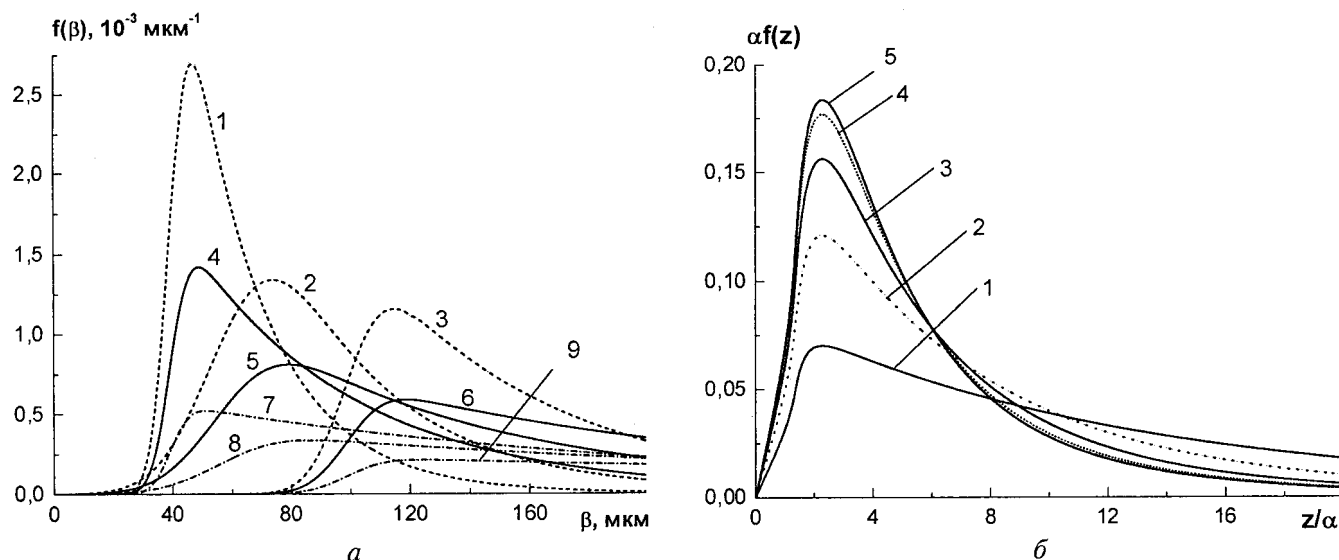


Рис. 1. Плотность распределения длин:

a — непрерывной фазы наполнителя, рассчитанной по формуле (3) при объемных степенях заполнения: $P = 0,2$ (кривые 1–3); $P = 0,5$ (кривые 4–6) и $P = 0,8$ (кривые 7–9);

1, 4, 7 — $\alpha_0 = 40 \text{ мкм}$, $\sigma_\alpha = 5 \text{ мкм}$; 2, 5, 8 — $\alpha_0 = 60 \text{ мкм}$, $\sigma_\alpha = 15 \text{ мкм}$; 3, 6, 9 — $\alpha_0 = 100 \text{ мкм}$, $\sigma_\alpha = 10 \text{ мкм}$;

b — элементов неоднородности при различных степенях заполнения, рассчитанных по формуле (8): $P = 0,1$ и $0,9$ (кривая 1); $P = 0,2$ и $0,8$ (кривая 2); $P = 0,3$ и $0,7$ (кривая 3); $P = 0,4$ и $0,6$ (кривая 4); $P = 0,5$ (кривая 5)

При нормальном распределении размеров частиц наполнителя плотность распределения $f(\delta)$ можно найти по формуле (3), где P надо заменить на $(1 - P)$, а β — на δ ($0 \leq \delta < \infty$).

При использовании любых экспериментальных методов определения теплопроводности λ явно или неявно подразумевается, что материал является однородным, т. е. его свойства не зависят от размеров образца. В то же время, если размеры частиц наполнителя сопоставимы с характерным размером образца, в параллельных испытаниях, проводимых на различных образцах, может быть получен более или менее значительный дополнительный разброс индивидуальных значений λ_i , природа которого не может быть выяснена в условиях опыта. В связи с этим возникает необходимость в определении четких количественных критериев однородности исследуемого материала.

Очевидно, что в качестве такого критерия не может быть принята длина непрерывной фазы матрицы или наполнителя, так как их роль неодинакова при малых и больших P . В качестве элемента неоднородности может, однако, выступать элемент длиной $z = \alpha + \beta$, составленный из смежных участков матрицы и наполнителя. Для получения плотности распределения z найдем сначала совместную плотность распределения $f(\beta, \delta)$. Ее общее выражение аналогично (2). Функцию $f(\delta/\beta)$ для случая взаимопроникающих компонентов можно записать, заменяя в формуле (4) α на β . При $\alpha = \text{const}$ получим

$$f(\beta, \delta) = \frac{\ln P \cdot \ln(1 - P)}{\alpha P} \cdot \frac{1}{\beta} P^{\beta/\alpha} (1 - P)^{\delta/\alpha}. \quad (5)$$

Функцию распределения z найдем в виде

$$F(z) = \int_0^z \left[\int_0^{z-\beta} f(\beta, \delta) d\delta \right] d\beta. \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражение (5) и интегрируя его, получим

$$F(z) = 1 - P^{z/\alpha-1} + \frac{\ln P}{P(1 - P)} \int_1^{z/\alpha} P^t (1 - P)^{z/(\alpha t)} dt. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по z , находим плотность распределения

$$f(z) = \frac{\ln P \ln(1 - P)}{\alpha P(1 - P)} \int_1^{z/\alpha} \frac{1}{t} P^t (1 - P)^{z/(\alpha t)} dt. \quad (8)$$

Плотность распределения длин элементов неоднородности инвариантна по отношению к компонентам материала; кривые $\alpha f(z)$ для одинаковых P и $1 - P$ совпадают (см. рис. 1, б). Полученное выражение (8) нетрудно обобщить на случай любого распределения частиц наполнителя по размерам. На рис. 2 приведены зависимости математического ожидания (m_z) и дисперсии (D_z) для элементов неоднородности в зависимости от P .

Элементы неоднородности различной длины образуют непрерывное распределение вдоль оси x . Рассматривая z как случайную функцию x , найдем ее корреляционную функцию k_z . С этой целью в координатах (x, z) отложим вдоль осей z и x последовательные отрезки, высота и длина которых соответствуют различным z , и выберем на оси x произвольные точки x и x' так, что $x' - x = y > 0$.

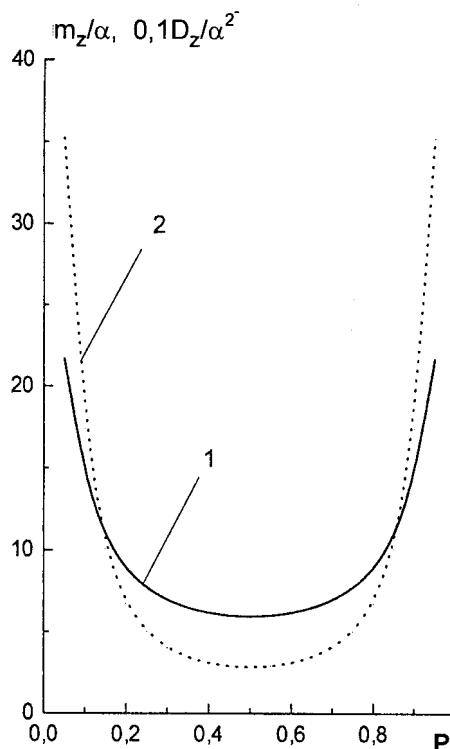


Рис. 2. Зависимость математического ожидания (1) и дисперсии (2) длин элементов неоднородности в зависимости от объемной степени заполнения

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в работе [9]. Пусть событие $A = 1$ состоит в том, что на отрезок y попадет хотя бы один "стык" между соседними z , а событие $A = 0$ — в том, что x и x' попадут на один и тот же отрезок z . В случае $A = 1$ корреляционный момент ординат функции z равен нулю, так как высоты ступенек z являются независимыми случайными величинами. Если реализуется событие $A = 0$, то корреляционная функция имеет вид $k_z(y) = \Psi(A = 0)D_z$ [9], где Ψ — вероятность события. При фиксированном z вероятность $\Psi(A = 0/z)$ равна $1 - \frac{y}{z}$ при $z \geq y$ и 0 — при $z \leq y$. Поэтому полная вероятность события $A = 0$ определится соотношениями

$$\Psi(y) = 1 - y \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{z} f(z) dz \quad (y \leq \alpha);$$

$$\Psi(y) = \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{z}\right) f(z) dz \quad (y \geq \alpha).$$

Так как $\max(\Psi(y)) = 1$ и $\Psi'(y) < 0$ при любых $y > 0$ для степеней заполнения $0 < P < 1$, то при $y \rightarrow \infty k_z(y) \rightarrow 0$. Отсюда следует, что стационарная случайная функция z является эргодической по отношению к математическому ожиданию и к корреляционной функции. Для такой функции оценка математического ожидания по некоторо-

му множеству ее реализаций при фиксированном y и по одной произвольной реализации при $y \rightarrow \infty$ эквивалентна. Исходя из этого мы можем, в частности, оценить толщину исследуемого образца H , при которой средняя квадратическая ошибка определения математического ожидания m_z не превысит, например, $D_z^{0.5}/\mu$, где $\mu > 1$ — произвольное число.

С ростом y $k_z(y) \rightarrow 0$ всегда можно найти такое y_0 , при котором $k_z(y) < \varepsilon$. Выбирая $\varepsilon = D_z/(2\mu^2)$, y_0 можно определить из условия

$$D_z \Psi(y_0) = \frac{D_z}{2\mu^2} \text{ или } \Psi(y_0) = \frac{1}{2\mu^2}.$$

При данном y_0 необходимая толщина образца H определится следующим соотношением [9]:

$$\frac{2D_z y_0}{H} = \varepsilon,$$

откуда $H = 4\mu^2 y_0$.

Введенное понятие неоднородности материала, состоящего из двух или более компонентов, в отрыве от их физических свойств является достаточно абстрактным. Однако, как будет показано в дальнейших публикациях, характеристики таких случайных функций, как эффективная теплопроводность гетерогенного материала, можно рассчитать, зная параметры распределения элементов неоднородности.

Таким образом, описанная математическая модель структуры наполненного материала с взаимопроницаемыми компонентами может быть использована при решении задач теплопроводности, электропроводности, диффузии и т. п.

Литература

1. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. — Л.: Энергия, 1974. — 264 с.
2. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
3. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. — М.: Физматгиз, 1962. — 380 с.
4. Васильев Л. Л., Танаева С. А. Теплофизические свойства пористых материалов. — Минск: Наука и техника, 1971. — 272 с.
5. Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред. — М.: Недра, 1985. — 288 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.
7. Дыхне А. М. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. Т. 52. Вып. 1. С. 264.
8. Hashin Z., Strikman S. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 10. Р. 3125.
9. Пугачев В. С. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968. — 368 с.

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2004 г.

Thermal conductivity of heterogeneous materials. Part I. The model of a structure of heterogeneous materials with interpenetrative components

S. G. Zhironov, A. A. Koptelov, Yu. M. Milekhin

SOYUZ Federal Center of Dual-use Technologies, Dzerzhinsky city, Moscow region, Russia

Proposed is the probabilistic model of a material structure, which reflects a chaotic character of allocation of particles of filling compounds in a matrix, with the sizes of particles distributing under an arbitrary law. The surveyed model is the basis for making the fundamentally new approach to calculation of an effective thermal conductivity of heterogeneous materials with interpenetrative components.

УДК 537.9

Магнитоэлектрический эффект в гомогенных и гетерогенных феррит-пьезоэлектрических композитах в области электромеханического резонанса

Д. А. Филиппов

Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия

Представлена теория магнитоэлектрического эффекта в гомогенных и гетерогенных композиционных материалах (КМ) на основе феррит-пьезоэлектриков. Используя материальные уравнения и уравнения движения, получено выражение для частотной зависимости магнитоэлектрического коэффициента. Показано, что величина магнитоэлектрического взаимодействия сильно возрастает на частоте электромеханического резонанса. Представлены результаты расчета магнитоэлектрического коэффициента для КМ на основе никелевой феррошпинели-цирконата титана-та свинца (ЦТС) и для КМ на основе D-терфенола — ЦТС.

Композиционные магнитоэлектрические (МЭ) материалы представляют собой механически взаимодействующие смеси магнитострикционной и пьезоэлектрической компонент. По технологии изготовления принято различать объемные и многослойные (multilayer) КМ. Объемные феррит-пьезоэлектрические КМ представляют собой внедрение одной фазы в объем другой, многослойные — поочередное чередование ферритовых и пьезоэлектрических слоев. Характерным геометрическим размером в объемных КМ является размер зерен, а в многослойных — толщина слоев. Если масштабы изменения внешних воздействий много больше характерных размеров КМ, то такие материалы можно рассматривать как гомогенные среды с некоторыми эффективными параметрами [1]. В противоположном случае процессы в магнитной и пьезоэлектрической фазах необходимо рассматривать отдельно с учетом граничных условий.

МЭ-эффект в КМ относится к эффектам второго порядка. По отдельности его нет ни в ферритовой, ни в пьезоэлектрической фазе. Наличие МЭ-эффекта в КМ обусловлено механи-

ческим взаимодействием ферритовой и пьезоэлектрической подсистем. В магнитном поле вследствие магнитострикции в ферритовой компоненте возникают механические напряжения, которые передаются в пьезоэлектрическую фазу и благодаря пьезоэффекту вызывают поляризацию. В области электромеханического резонанса величина МЭ-эффекта резко возрастает [2—6]. В работах [5, 6] представлены теория, основанная на методе эффективных параметров КМ, и экспериментальные результаты для образцов в форме диска и пластинки для планарных мод колебаний. Эта теория применима тогда, когда материал можно считать однородной средой, т. е. толщина слоев в многослойных или размер зерен в объемных КМ много меньше длины акустической волны. В работе [4] приведены результаты измерения частотной зависимости МЭ-коэффициента гибридных образцов, представляющих собой механическое соединение магнитострикционного композита на основе D-терфенола и пьезоэлектрического КМ на основе ЦТС. Размеры ферритовой и пьезоэлектрической пластинок были 6,8×6,2×0,7 мм и