Общая физика

УДК 537.533

Новые аналитические представления мультипольных электромагнитных структур

Ю. К. Голиков, К. В. Соловьев
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

Даны новые классы мультипольных электрических и магнитных полевых структур, на основе которых возможен эффективный синтез новых корпускулярно-оптических элементов.

Степенные ряды для мультипольных структур

В современной электронной оптике находят широкое применение так называемые мультипольные поля и системы на их основе [1]. Представителями этого класса систем являются квадрупольные линзы, корректоры аберраций и т. п. Их комплексные потенциалы имеют степенной вид:

$$\Omega = \omega^n, \ \ \omega = x + iy, \ \ n = 2, 3, \ldots$$

Более общий класс полей, обладающих дискретной симметрией по азимутальному углу, можно построить с помощью процедуры частичного разделения переменных в уравнении Лапласа в цилиндрических координатах r, z, γ:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} = 0. \qquad (1)$$

Пусть

$$\Phi(r, z, \gamma) = \varphi(r, z) F(\gamma). \qquad (2)$$

Подстановка (2) в (1) ведет к разделению переменных, т. е.

$$\frac{r^2(\varphi_{rr} + \varphi_{zz}) + r\varphi_r}{\varphi} = -\frac{F_{\gamma\gamma}}{F} = k^2,$$

где $k = \alpha + i\beta$ — постоянная разделения.

В зависимости от того, вещественна, чисто мнима или комплексна константа k, синтезируемые потенциалы будут обладать различными аналитическими и геометрическими свойствами. Угловая функция F вследствие (2) может быть записана в виде

$$F(\gamma) = A\cos k\gamma + B\sin k\gamma. \qquad (3)$$

При $k = 0$ имеем осесимметричные поля, при целом вещественном k получаем мультипольные поля. Уравнение для функции φ

$$r^2(\varphi_{rr} + \varphi_{zz}) + r\varphi_r - k^2\varphi = 0$$

напоминает уравнение Гельмгольца. С помощью подстановки

$$\varphi = r^k S(r, z) \qquad (4)$$

получаем уравнение, которое можно рассматривать как некое обобщение уравнения Лапласа для осесимметричных полей:

$$S_{rr} + S_{zz} + \frac{2k+1}{r} S_r = 0. \qquad (5)$$

Обращает на себя внимание случай $k = -1/2$, когда функция $S(r, z)$ становится двухмерно-гармонической, а потенциал при $A = 0$, $B = -1$ может быть записан в виде

$$\Phi = \frac{S(r, z)}{\sqrt{r}} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Для рассмотрения ситуации в общем случае (при $k \neq -1/2$, $k \neq 0$) введем оператор

$$\widehat{L_k} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2k+1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^{2k+1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{2k+1}\frac{\partial}{\partial r}.$$

С его помощью уравнение (5) может быть записано

$$\widehat{L_k} S + S_{zz} = 0. \qquad (6)$$

Добавив условия для S при $z = 0$

$$S\big|_{z=0} = 0, \ \ \frac{\partial S}{\partial z}\Big|_{z=0} = N(r), \qquad (7)$$

будем искать S в виде нечетного степенного ряда по z с неопределенными коэффициентами:

$$S = T_1(r)z + T_3(r)z^3 + T_5(r)z^5 + \ldots \qquad (8)$$

Подставив (8) в (6), получим рекуррентную цепочку, с помощью которой последовательно вычисляем все T_i через $N(r)$ (7). В результате получим решение в виде следующего ряда:

$$S = N(r)z - \frac{1}{3!}\hat{L}_k N z^3 + \frac{1}{5!}\hat{L}_k^{\,2} N z^5 - \ldots \\ \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\hat{L}_k^{\,n} N z^{2n+1} + \ldots \qquad (9)$$

Этот ряд позволяет конструировать множество мультипольных систем.

Само гармоническое поле определим вытекающей из (3) и (4) при $A = 0$ формулой для потенциала:

$$\Phi = r^k S(r,z)\sin k\gamma. \qquad (10)$$

На плоскости $z = 0$ положим

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = r^k \sin k\gamma \left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{z=0} = E(r,\gamma).$$

Но, согласно (7), $\left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{z=0} = N(r)$ и, следовательно, имеем

$$N(r) r^k \sin k\gamma = E(r,\gamma), \qquad (11)$$

тогда $E(r,\gamma)$ обязана иметь вид произведения

$$E = \sin k\gamma\, I(r). \qquad (12)$$

Из уравнений (11) и (12) возникает условие на $N(r)$

$$N(r) = I(r) r^{-k}.$$

Если в (10) положить $k = ip$ мнимым, то тригонометрический синус превращается в гиперболический, а степени r^{ip} дадут структуры, существенно отличающиеся от случая действительного k. В общем же случае комплексного k структуры еще более усложняются. Сходимость ряда (9) подлежит отдельному исследованию, выходящему за рамки настоящей работы. Нас же будет интересовать случай, когда бесконечный ряд для S обрывается и дает конечные полиномы по переменной z.

Дополнительно заметим, что дифференцирование по z превращает ряд (9) в четный и продифференцированный ряд

$$\tilde{S} = \frac{\partial S}{\partial z} = N(r) - \frac{1}{2!}\hat{L}_k z^2 + \frac{1}{4!}\hat{L}_k^{\,2} z^4 + \ldots$$

будет описывать поля с плоскостью симметрии $z = 0$. Физический смысл $N(r)$ изменится, так как теперь эта функция связана с ходом потенциала в плоскости симметрии. Отметим, что все антисимметричные по z структуры, которые мы будем получать, можно превратить в симметричные дифференцированием по координате z.

Итак, поставим задачу об обрыве ряда (9) за счет специального выбора функции N. Начнем со случая, когда N удовлетворяет условию

$$\hat{L}_k N(r) = \frac{1}{r^{2k+1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{2k+1}\frac{\partial}{\partial r} N(r) = 0. \qquad (13)$$

Общее решение для (13) можно записать в виде

$$N = ar^{-2k} + b. \qquad (14)$$

Все остальные члены ряда (9) автоматически исчезают, и для потенциала Φ_1 из (10) и (9) получаем очевидное представление:

$$\Phi_1 = (ar^{-k} + br^k) z \sin k\gamma.$$

Далее рассмотрим случай, когда выполнено условие

$$\hat{L}_k^{\,2} N(r) = \hat{L}_k(\hat{L}_k N) = 0. \qquad (15)$$

Сопоставляя данное уравнение с уравнением (13), видим, что содержимое скобки (15) должно иметь вид

$$\hat{L}_k N = ar^{-2k} + b$$

или

$$\frac{1}{r^{2k+1}}\frac{\partial}{\partial r} r^{2k+1}\frac{\partial}{\partial r} N(r) = \frac{a}{r^{2k}} + b.$$

Интегрируя это уравнение, получим для N выражение

$$N = \frac{a}{4(1-k)} r^{2(1-k)} + \frac{br^2}{4(k+1)} + \left(-\frac{c}{2k} r^{-2k} + d\right).$$

Поскольку мы пытаемся строить базисные функции, а в скобках стоит полученное в результате интегрирования уравнения (13) выражение (14), относящееся к потенциалу базисного элемента более низкого уровня и уже не представляющее здесь интерес, то мы его отбрасываем. Таким образом, $N = fr^{2(1-k)} + gr^2$.

Соответственно, с помощью (9) получим $S(r, z)$ в виде

$$S = (fr^{2(1-k)} + gr^2)z - \frac{2}{3}\Big((1-k)\, fr^{-2k} + (1+k) g\Big) z^3.$$

Процесс построения полиномов S можно продолжать аналогичным образом и далее, причем в составе N будут появляться целые степени r : r^2, r^4, ... и r^{2-2k}, r^{4-2k}, ...

Окончательное выражение для Φ_3 можно представить в виде

$$\Phi_3 = \Big((fr^{2-k} + gr^{2+k}) z - -\frac{2}{3}\Big((1-k)\, fr^{-k} + (1+k) gr^{k}\Big) z^3 \Big) \sin k\gamma.$$

Дифференцируя по z, получим симметричный потенциал

$$\Phi_2 = \Big(fr^{2-k} + gr^{2+k} - -2\Big((1-k)\, fr^{-k} + (1+k) gr^{k}\Big) z^2 \Big) \sin k\gamma.$$

Если варьировать $k = \alpha + i\beta$ таким образом, чтобы оно принимало любое комплексное значение, за исключением нуля, можно получить широкий класс симметричных и антисимметричных структур мультипольного типа. Если построить полный базис из гармонических функций мультипольного типа, то по нему можно разложить любую наперед заданную мультипольную функцию, симметричную либо антисимметричную по z.

Мультипольные системы с кольцевыми особенностями

В работе [2] был применен специальный прием комплексного разделения переменных в осесимметричном уравнении Лапласа, что привело к построению потенциалов с кольцевыми особенностями, в некотором смысле обобщающих потенциалы кулоновского центра и “электродинамических” мультиполей. Ниже распространим эти идеи на случай мультипольных систем, введенных ранее.

Преобразуем для начала уравнение (5) для S к комплексным переменным

$$\omega = r + iz, \quad \overline{\omega} = r - iz,$$

введя комплексные дифференциальные операторы Колосова [3]

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\overline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Получим из (5):

$$2(\omega + \overline{\omega}) S_{\omega\overline{\omega}} + (2k+1)(S_\omega + S_{\overline{\omega}}) = 0. \tag{16}$$

Далее ищем решение (16), разделяя переменные в комплексных координатах. Положим:

$$S(\omega, \overline{\omega}) = P(\omega) Q(\overline{\omega}), \tag{17}$$

где P, Q — аналитические функции комплексных аргументов.

Подстановка выражения (17) в (16) дает соотношение

$$Q_{\overline{\omega}}(2\omega P_\omega + (2k+1)P) + P_\omega(2\overline{\omega} Q_{\overline{\omega}} + +(2k+1)Q) = 0. \tag{18}$$

Разделяем в (18) переменные

$$\frac{2\omega P_\omega + (2k+1)P}{P_\omega} = -\frac{2\overline{\omega} Q_{\overline{\omega}} + (2k+1)Q}{Q_{\overline{\omega}}}. \tag{19}$$

Равенство (19), каждая из частей которого зависит от своей переменной, выполняется при любых ω, $\overline{\omega}$ в том и только в том случае, когда обе части его равны одному и тому же комплексному числу, которое для удобства обозначим как $2c$, где $c = a + ib$. В результате для P и Q получим простые уравнения:

$$2(\omega - c) P_\omega = -(2k+1)P; \quad 2(\overline{\omega} + c) Q_{\overline{\omega}} = -(2k+1) Q,$$

интегрируя которые, будем иметь:

$$P = \frac{p}{(\omega - c)^{k+\frac{1}{2}}}; \quad Q = \frac{q}{(\overline{\omega} + c)^{k+\frac{1}{2}}},$$

где p, q — произвольные комплексные числа.

Отсюда

$$S = \frac{pq}{[(\omega - c)(\overline{\omega} + c)]^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Теперь вычислим $\varphi = r^k S(r, z)$. Выражая $r = (\omega + \overline{\omega})/2$ и обозначая $\mu + i\nu = 2^{-k} pq$, получим

$$\varphi = (\mu + i\nu) \frac{(\omega + \overline{\omega})^k}{[(\omega - c)(\overline{\omega} + c)]^{k+1/2}}.$$

Это выражение можно представить и в более простой форме

$$\varphi = \frac{\mu + i\nu}{\sqrt{(\omega - c)(\overline{\omega} + c)}} \left(\frac{1}{\omega - c} + \frac{1}{\overline{\omega} + c} \right)^k.$$

Угловую функцию $F(\gamma)$ удобно выбрать в виде

$$F = \cos k\gamma.$$

Если несущественную постоянную $\mu + i\nu$ заменить единицей, то полный гармонический потенциал Φ искомого вида выразится соотношением:

$$\Phi = \frac{(\omega + \overline{\omega})^k \cos k\gamma}{\big((\omega - c)(\overline{\omega} + c)\big)^{k+\frac{1}{2}}}. \tag{20}$$

Выражение (20) дает два гармонических вещественных потенциала мультипольного типа:

$$\Phi = \Phi_1(r, z, \gamma) + i\Phi_2(r, z, \gamma).$$

При $k = 0$ оба они осесимметричны и имеют кольцевую особенность радиуса a, смещенную по оси z на расстояние b от начала координат. При любом целом положительном k функция (20) также имеет кольцевую особенность, только более высокого порядка и модулированную по интенсивности угловой азимутальной зависимостью от γ. В начале координат $\omega = \overline{\omega} = 0$, при этом обычно имеет место седло. При вещественном, но нецелом k, в начале координат появляется дополнительная особая точка ветвления, а при отрицательных целых k возникает полюс. Если k чисто мнимое, то тригонометрическая угловая функция трансформируется в гиперболическую, периодичность поля по азимуту нарушается, и реальная интерпретация поля затрудняется из-за многозначности. Еще более сложный характер приобретает полевая структура при комплексном $k = \alpha + i\beta$. Ее изучение остается за рамками настоящей работы. Отметим, что последовательное дифференцирование формулы (20) по вещественной переменной z дает новые потенциалы мультипольного типа с особенностями, обобщающие структуры из работы [2].

Полученные в данной работе полевые структуры позволяют строить базисы трехмерных гармонических функций, необходимые для синтеза новых корпускулярно-оптических элементов.

Выводы

1. Предложен способ восстановления антисимметричного либо симметричного поля мультиполя в пространстве, соответственно, по заданному распределению напряженности в плоскости антисимметрии либо потенциала в плоскости симметрии системы.
2. Представлена методика генерирования базисов гармонических трехмерных функций мультипольного типа, обладающих конечным представлением.
3. Приведена методика построения мультипольных структур с кольцевыми особенностями, обобщающими соответствующие осесимметричные потенциалы [2].

Литература

1. *Силадьи М.* Электронная и ионная оптика. — М.: Мир, 1990.
2. *Голиков Ю. К., Григорьев Д. В., Шорина Т. А.*// Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 9. С. 23—27.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. —М.: Наука, 1988.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2005 г.

New analytical representations of multipole electromagnetic structures

Yu. K. Golikov, K. V. Solovyev
St.-Petersburg State Polytechnic University, St.-Petersburg, Russia

New classes of electrical and magnetic structures which can be used for effective synthesis of new corpuscular optics elements are presented.