

УДК 533.95

**О динамике нелинейных возмущений в потоках нейтральных частиц с собственными магнитными моментами**

Л. С. Кузьменков, Д. Э. Харабадзе  
 Московский государственный университет, Россия

*Получены уравнения баланса числа частиц, импульса и намагниченности квантовой гидродинамики с учетом спин-орбитального взаимодействия между частицами. На этой основе для системы нейтральных частиц с собственным магнитным моментом найдено точное решение в виде волны с круговой поляризацией.*

Изменение проекции магнитного момента частицы на направление внешнего магнитного поля  $B_0$  с помощью радиочастотного магнитного поля может сопровождаться резонансным поглощением поля при условии  $\hbar\omega = \hbar\gamma B_0$  (где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение). Взаимодействующие магнитные моменты создают локальное магнитное поле, переменная составляющая которого может оказаться в резонансе с прецессирующими моментами. В таких плотных системах магнитные моменты являются источниками коллективного магнитного поля и сами движутся в нем.

Пространственно-временная эволюция полевых динамических характеристик системы (плотности заряда, тока и магнитного момента), а также электромагнитного поля определяется уравнениями квантовой гидродинамики [1—3]. Для пучков частиц в уравнения квантовой гидродинамики необходимо явно включить спин-орбитальное взаимодействие. Решение этой задачи представлено в данной работе. Кроме того, исследуются возмущения в плотных пучках частиц (атомов или нейтронов) и показано, что уравнения квантовой гидродинамики для таких систем допускают точные решения в виде нелинейных волн, частота которых для каждого волнового вектора зависит от амплитуды. Такая физическая ситуация может быть реализована для плотных пучков нейтронов в нейтроноводах [4—6], а также в пучках электрически нейтральных атомов с собственными магнитными моментами. В физике плазмы задача о распространении волны с круговой поляризацией вдоль внешнего магнитного поля относится к числу точно решаемых [7].

**Описание метода**

Для упрощения выкладок будем в дальнейшем обозначать символом "+" эрмитово сопряжение матриц с одновременным изменением направления действия

© Кузьменков Л. С., Харабадзе Д. Э., 2006

ного оператора  $\hat{f}$  в квантовой механике [8] определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \psi^+ \hat{f} \psi \right) = \psi^+ \hat{f} \psi + \psi^+ \left( \frac{i}{2\hbar} \left[ \hat{H}^+ - \hat{H}, \hat{f} \right]_+ - \frac{i}{2\hbar} \left[ \hat{H}^+ + \hat{H}, \hat{f} \right]_+ \right) \psi, \quad (1)$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы.  
 Введем следующие обозначения:

$$\hat{D}_j = \partial_j^+ + \partial_j; \quad \hat{E} = \frac{1}{2} \left( \hat{H}^+ + \hat{H} \right). \quad (2)$$

Ниже рассматриваются гамильтонианы  $\hat{H}$  такие, что

$$\hat{H}^+ - \hat{H} = i\hbar \sum_{k=1}^N \hat{D}_k \hat{J}_k \quad \text{— используются}$$

для некоторого набора операторов тока  $\hat{J}_k$ . В этом случае уравнение (1) сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \psi^+ \hat{f} \psi \right) = \psi^+ \hat{f} \psi - \sum_{k=1}^N \nabla_k \left( \psi^+ \frac{1}{2} \left[ \hat{J}_k, \hat{f} \right]_+ \psi \right) + \frac{i}{\hbar} \psi^+ \left[ \hat{E}, \hat{f} \right] \psi. \quad (3)$$

В частности, если  $\hat{f}$  — единичный оператор, уравнение (3) переходит в уравнение непрерывности. Из (3) видно, что локальное изменение среднего значения оператора может происходить за счет изменения формы оператора во времени, конвективного переноса, а также сла-

Найдем явный вид слагаемого, отвечающего переносу, для гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^N \hat{p}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N b_k \hat{p}_k + c,$$

где

$$b_k = -\frac{e^2 \hbar}{4m^2 c^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{x_j^\beta - x_j^\alpha}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (2\hat{\sigma}_j^\gamma + 2\hat{\sigma}_j^\gamma);$$

$$c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \left( \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m^2 c^2} \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \frac{e^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \hat{\sigma}_i^\alpha \hat{\sigma}_j^\beta \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j^\beta} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - 4\pi \delta^{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \right),$$

и, следовательно, учитывающего кулоновские, спин-спиновые и спин-орбитальные взаимодействия [9]. Согласно (2) энергия  $\hat{E}$ , содержащаяся в (3), может быть представлена в виде

$$\hat{E} = \frac{1}{4m} \sum_{k=1}^N \left( \hat{\mathbf{p}}_k \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k^+ \hat{\mathbf{p}}_k^+ \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{b}}_k \left( \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k^+ \right) + c.$$

Ток  $\hat{J}_k$  в (3) может быть записан так, что

$$\hat{J}_k = \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k^+ + \hat{\mathbf{b}}_k \right).$$

Таким образом, остается найти коммутатор

$$\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{E}, \hat{J}_k \right] = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial b_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - \frac{\partial b_j^\beta}{\partial x_k^\alpha}, \hat{J}_j \right] - \frac{1}{m} \frac{\partial c}{\partial x_k^\alpha}. \quad (4)$$

Слагаемое, содержащее  $c$ , найдено в работах [1, 2]. Поэтому мы ограничимся членами, содержащими  $b$ , а именно:

$$\frac{\partial b_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - \frac{\partial b_j^\beta}{\partial x_k^\alpha} = \frac{e^2 \hbar}{4m^2 c^2} \times$$

$$\times \left( \sum_{l=1, l \neq k}^N \frac{\partial}{\partial x_j^\beta} \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} \frac{1}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \left( 2\hat{\sigma}_k^\nu + \hat{\sigma}_l^\nu \right) - \sum_{l=1, l \neq j}^N \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j^\beta} \frac{1}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l|} \varepsilon^{\beta\mu\nu} \left( 2\hat{\sigma}_j^\nu + \hat{\sigma}_l^\nu \right) \right). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial b_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - \frac{\partial b_j^\beta}{\partial x_k^\alpha}, \hat{J}_j \right] =$$

$$= \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{1}{2} \left[ \frac{e^2 \hbar}{4m^2 c^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} \left( 4\pi \delta^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - \frac{\partial}{\partial x_k^\mu} \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} \frac{1}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|} \right) \left( 2\hat{\sigma}_j^\nu - 2\hat{\sigma}_k^\nu \right), \hat{J}_k^\beta - \hat{J}_j^\beta \right]_+. \quad (6)$$

Для определения временной эволюции оператора  $\hat{M}$ :

$$\hat{M}^\alpha = \frac{e\hbar}{2mc} \hat{\sigma}^\alpha$$

в уравнении (3) следует положить  $\hat{j} = \hat{M}^\alpha$ . При вычислении коммутатора оператора  $\hat{M}^\alpha$  с оператором энергии  $\hat{E}$  получим

$$\left[ \hat{E}, \hat{M}_k^\mu \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ b_j^\alpha, \hat{M}_k^\mu \right] \left( \hat{p}_j^\alpha + \left( \hat{p}_j^\alpha \right)^+ \right) + \left[ c, \hat{M}_k^\mu \right].$$

Последнее слагаемое здесь отражает спин-спиновое взаимодействие и было вычислено в работах [1, 2], для чего достаточно было вычислить первое слагаемое

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[ b_j^\alpha, \hat{M}_k^\mu \right] \left( \hat{p}_j^\alpha + \left( \hat{p}_j^\alpha \right)^+ \right) =$$

$$= \frac{e}{mc} \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{e}{c} \frac{x_k^\beta - x_j^\beta}{|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|^3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \frac{1}{2} \left[ \hat{M}_k^\nu, \hat{J}_k^\alpha \right]_+ +$$

$$+ \frac{e}{mc} \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{1}{c} \frac{x_j^\beta - x_k^\beta}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\mu\nu} \frac{e}{2} \left[ \hat{M}_k^\nu, \hat{J}_j^\alpha \right]_+. \quad (7)$$

Интегрируя выражения (6), (7) с  $\delta$ -функцией  $\delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})$  и пренебрегая корреляциями, приходим к слагаемым в общих уравнениях баланса, учитывающим спин-орбитальное взаимодействие частиц

$$\left( \frac{d\mathbf{M}(\mathbf{x})}{dt} \right)_{MJ} = \frac{e}{mc} \left[ \mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^J(\mathbf{x}) \right] -$$

$$- \frac{e}{mc} \left[ \mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \left[ \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{c} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right] \right];$$

$$\left( \frac{d\mathbf{J}(\mathbf{x})}{dt} \right)_{MJ} = \frac{e}{mc} \left[ \mathbf{M}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}^S(\mathbf{x}) \right] + \frac{e}{m} n \mathbf{E}^S(\mathbf{x}) +$$

$$+ \frac{1}{m} \left( \mathbf{M}(\mathbf{x}) \nabla \right) \mathbf{B}^J - \frac{1}{mc} \left[ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \left( \mathbf{M}(\mathbf{x}) \nabla \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right],$$

где

$$\left[ \nabla \cdot \mathbf{B}^J(\mathbf{x}) \right] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{eJ}(\mathbf{x});$$

$$\left[ \nabla \cdot \left( \mathbf{B}^S(\mathbf{x}) + 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{x}) \right) \right] = 0;$$

$$\left( \nabla \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right) = 4\pi e n(\mathbf{x});$$

$$[\nabla \cdot \mathbf{E}^S(\mathbf{x})] = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{B}^S(\mathbf{x})}{\partial t} \right)_j.$$

Видим, что замкнутая система уравнений квантовой гидродинамики, в которой учтены спин-спиновые и спин-орбитальные взаимодействия электрически заряженных частиц, принимает вид системы уравнений для плотностей числа частиц, тока, намагниченности и уравнений для самосогласованного электрического поля:

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{E}) &= 4\pi en; \\ (\nabla \mathbf{B}) &= 0; \\ [\nabla \cdot \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ [\nabla \cdot (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} n)] &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} env, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) &= 0; \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \mathbf{v} &= e\mathbf{E} + \frac{1}{m} M^\alpha \nabla B^\alpha - \frac{1}{m} \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{E} \right]; \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \mathbf{M} &= \frac{e}{mc} [\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}] - \frac{e}{mc} \left[ \mathbf{M} \cdot \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right] \right]. \end{aligned}$$

**Решение уравнения**

Рассмотрим далее систему взаимодействующих нейтральных частиц, обладающих собственным магнитным моментом в постоянном внешнем магнитном поле  $B_0$ . Коллективные процессы в такой системе будут описываться системой уравнений (8), в которых следует

положить формально  $e = 0$ ;  $\frac{e}{mc} = \gamma$ :

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{E}) &= 0; \\ (\nabla \mathbf{B}) &= 0; \\ [\nabla \cdot \mathbf{E}] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ [\nabla \cdot (\mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} n)] &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) &= 0; \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \mathbf{v} &= \frac{1}{m} M^\alpha \nabla B^\alpha - \frac{1}{m} \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot (\mathbf{M} \nabla) \mathbf{E} \right]; \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla \right) \mathbf{M} &= \gamma [\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}] - \gamma \left[ \mathbf{M} \cdot \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E} \right] \right]. \end{aligned}$$

Найдем собственные волны, которые могут возбуждаться в такой системе частиц. Решение этой задачи ищем в виде поперечной электромагнитной волны с круговой поляризацией, так что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e}_x \frac{E_\perp e^{-i\omega t + ikz} + c.c.}{2} + \mathbf{e}_y \frac{E_\perp e^{-i\omega t + ikz} - c.c.}{2i}; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{e}_x \frac{B_\perp e^{-i\omega t + ikz} + c.c.}{2} + \mathbf{e}_y \frac{B_\perp e^{-i\omega t + ikz} - c.c.}{2i} + \mathbf{e}_z B_z; \\ \mathbf{M} &= \mathbf{e}_x \frac{M_\perp e^{-i\omega t + ikz} + c.c.}{2} + \mathbf{e}_y \frac{M_\perp e^{-i\omega t + ikz} - c.c.}{2i} + \mathbf{e}_z M_z; \\ \mathbf{v} &= \mathbf{e}_x \frac{v_\perp e^{-i\omega t + ikz} + c.c.}{2} + \mathbf{e}_y \frac{v_\perp e^{-i\omega t + ikz} - c.c.}{2i} + \mathbf{e}_z v_z; \end{aligned} \quad (10)$$

$n = \text{const.}$

Здесь для удобства введено обозначение  $\mathbf{Q}_\perp = \mathbf{Q}_x + i\mathbf{Q}_y$  для всех векторных величин  $\mathbf{Q}$ .

Подставляя (10) в (9), получаем соотношения, связывающие комплексные амплитуды полей в волне:

$$\begin{aligned} B_\perp &= \frac{4\pi k^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} M_\perp n; \\ E_\perp &= -\frac{i\omega 4\pi k c}{k^2 c^2 - \omega^2} M_\perp n; \\ v_\perp &= -i \frac{N \frac{v_z M_z}{mc^2} - N^2 \frac{M_z}{mc}}{\frac{v_z}{c} N - 1}, \end{aligned}$$

где  $N = \frac{kc}{\omega}$  — показатель преломления.

При этом дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega = \frac{-\gamma B_z + \gamma 4\pi M_z n \frac{N^2 - \beta N}{N^2 - 1} + \gamma \frac{M_z \beta N - N^2}{mc^2} \frac{\beta N - 1}{\beta N - 1} (E_\perp^* E_\perp)}{\beta N - 1}, \quad (11)$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ .

В случае  $\beta = 0$  дисперсионное уравнение упрощается и принимает вид

$$\omega = -\gamma B_z + \gamma 4\pi M_z n \left( \frac{N^2}{N^2 - 1} + N^2 \frac{E_\perp^* E_\perp / 4\pi}{nmc^2} \right).$$

**Выводы**

Одним из решений является однородная прецессия всех магнитных моментов на частоте  $\gamma B_z$ . При  $\beta \neq 0$  происходят сдвиг частоты  $\omega$  и изменение показателя преломления  $N$  в соответствии с формулой (11). Видим, что возмущения намагниченности, скорости частиц электрического и магнитного полей имеют характер волн с правой и левой круговой поляризацией, причем намагниченность в таких системах имеет в общем случае продольную компоненту  $M_z$ , а частота зависит от квадрата амплитуды.

**Л и т е р а т у р а**

1. Кузьменков Л. С., Максимов С. Г.//ТМФ. 2001. Т. 126. С. 136.
2. Кузьменков Л. С., Максимов С. Г.//Там же. С. 257.
3. Кузельев М. В., Рухадзе А. А.//УФН. 1999. Т. 169. С. 687.

4. Mildner D. F. R., Chen-Mayer H. H., Lamaze G. P., Sharov V. A. // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Research. A. 1998. V. 413. P. 341.
5. Roth S., Zirkel A., Neuhaus J., Schneider W., Petry W. // Physica B. 2000. V. 439. P. 439.
6. Klose F., Lee W.-T. // Appl. Phys. A. 2002. V. 74. P. S1486.
7. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 1989.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.

Статья поступила в редакцию 17 марта 2006 г.

## On the dynamics of nonlinear excitations in streams of neutral particles with intrinsic magnetic moments

*L. S. Kuzmenkov, D. E. Kharabadze*

Moscow State University, Physics Faculty, Department of theoretical physics,  
Russia

*Balance equations of particle density, momentum and magnetization in quantum hydrodynamics are derived subject to spin-orbital interaction between particles. Based on them exact solution for the system of neutral particles with intrinsic magnetic moment is found in the form of wave with circular polarization.*