

Физика плазмы и плазменные технологии

УДК 533.9

Нормальные колебания малого пылевого кластера. Куб и квадратная антипризма

Н. Г. Гусейн-заде, А. М. Игнатов

Институт общей физики им. А. М. Прохорова, РАН, Москва, Россия

Исследованы нормальные колебания равновесных трехмерных конфигураций макрочастиц в комплексной плазме, формирующихся в виде выпуклых многогранников в параболической сферически симметричной потенциальной яме. Для восьми макрочастиц ($N = 8$) одними из возможных конфигураций являются куб и квадратная антипризма. Взаимодействие между макрочастицами рассматривается в общем виде как функция, зависящая только от расстояния между частицами $U(r)$. Полученные результаты позволяют оценить потенциал взаимодействия между макрочастицами в реальных экспериментах.

Интерес к сильноскоррелированным структурам объясняется тем, что их образование наблюдается во многих актуальных в настоящее время экспериментах. Экспериментально скоррелированные трехмерные кластеры наблюдались для системы захваченных ультрахолодных атомных ионов в различных ловушках уже давно [1], однако в наземных условиях создать трехмерный пылевой кластер удалось недавно [2].

В данной работе теоретически исследуются свойства одной из простейших трехмерных структур. Объектом исследования является система одинаковых макрочастиц, для которых роль плазмы сводится к созданию определенного закона взаимодействия макрочастиц. В простейшем приближении подобную систему можно описать как систему однозарядных одномерных частиц, удерживаемую от расплывания внешним потенциалом $U_{joc} = f(r)$.

Из экспериментов [1, 2] и результатов численного моделирования систем с различными потенциалами взаимодействия [3, 4] известно, что малое число макрочастиц образует правильные трехмерные (3D) кластеры в виде выпуклых многогранников таких, как тетраэдр, треугольная бипирамида, октаэдр, пятиугольная бипирамида и т. д. Возможны также конфигурации в виде выпуклых многогранников с частицей в центре.

Простейшим типом трехмерной (3D) структуры является выпуклый многогранник, поэтому именно с него логично начать изучение пылевых кристаллов.

Цель работы — аналитическое исследование устойчивости простых 3D-структур, состоящих из восьми частиц — куба и квадратной антипризмы. Ниже рассматриваются колебания кластеров в виде этих выпуклых многогранников и изучается их устойчивость. Получены спектры колебаний таких кластеров. Спектр содержит информацию о потенциале взаимодействия, поэтому, измеряя спектр экспериментально, можно

уточнить, с каким именно потенциалом взаимодействуют пылинки в разряде.

Объект исследования

Простейшим типом трехмерной структуры является выпуклый многогранник. Самой симметричной трехмерной фигурой по праву считается куб — единственный из многогранников, которые относятся одновременно к семействам призм и Платоновых тел. Его можно рассматривать как призму с квадратным основанием. Тем не менее несмотря на высокую степень симметрии, которой обладает куб, и в экспериментах [1, 2], и при численном моделировании систем с различными потенциалами [3, 4] взаимодействия такая конфигурация не наблюдается. Однако соблазн принять правильные многогранники как системы, обладающие минимальной энергией был очень велик, и ему поддались авторы нескольких ошибочных работ [5, 6]. Тем не менее потенциальная энергия конфигурации в виде квадратной антипризмы почти всегда оказывается ниже энергии куба.

Посчитаем энергию конфигурации в виде куба и квадратной антипризмы для случая, когда потенциал взаимодействия частиц [7] друг с другом является потенциалом Юкавы (Дебая-Хюккеля).

Полная потенциальная энергия системы из N взаимодействующих частиц, удерживаемых от расплывания параболической ловушкой в безразмерных величинах, запишется в этом случае как

$$U(x_1, y_1, \dots, z_N) = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j<i}^N \frac{e^{-kr_{ij}}}{r_{ij}} + \frac{1}{2d^3} (x^2 + y^2 + z^2) \right\},$$

$$\ddot{r}_i = -\frac{\partial W}{\partial r_i}.$$

где r_{ij} — расстояние между i -й и j -й частицами;
 d — параметр ловушки.

В таблице показаны характерные параметры (энергия U , радиус структуры R , расстояния между частицами a) для куба и квадратной антипризмы в зависимости от коэффициента экранировки k .

Условия равновесия $\frac{\partial W}{\partial r_i} = 0$ (баланс сил) связывают геометрические характеристики кластера (равновесные размеры конфигурации), параметры ловушки и потенциал взаимодействия. В дальнейшем будем предполагать, что условие равновесия выполнено.

Коэффициент экранировки	Куб			Квадратная антипризма			
	U	R	a	U	R	a	b
0,0	21,912	1,351	1,560	21,864	1,349	1,581	1,738
0,125	18,813	1,340	1,547	18,764	1,338	1,567	1,723
0,25	16,378	1,313	1,516	16,329	1,312	1,536	1,689
0,5	12,866	1,243	1,435	12,816	1,241	1,455	1,597
1,0	8,802	1,102	1,273	8,752	1,100	1,291	1,413
2,0	5,177	0,898	1,037	5,131	0,895	1,053	1,147
4,0	2,649	0,673	0,778	2,612	0,670	0,790	0,854
8,0	1,207	0,471	0,544	1,181	0,467	0,553	0,592

Из таблицы видно, что энергия квадратной антипризмы всегда ниже энергии куба. Именно поэтому как в экспериментах, так и при численном моделировании для восьми частиц (при $N = 8$) наблюдается квадратная антипризма, но минимальность энергии — еще не есть доказательство устойчивости. Для этого необходимо полное исследование этих конфигураций на устойчивость.

Постановка задачи

Рассмотрим систему из N одноименно заряженных одномерных частиц, удерживаемых от распыливания внешним гармоническим потенциальным полем $U(r)$. Вблизи центра удерживающий потенциал можно аппроксимировать трехмерной параболой $U_{loc} \sim (x^2 + y^2 + z^2)$, что допустимо для большинства реальных экспериментов.

Потенциал взаимодействия частиц друг с другом в большинстве известных случаев является функцией вида $U_{int} = U(r)$, которая не предполагается заранее известной. Для удобства в дальнейшем запишем ее в виде функции $U_{int} = f(r \cdot r)$, где r — расстояние между частицами.

Полная потенциальная энергия системы в безразмерных координатах запишется в виде

$$W = \frac{1}{2d^3} \sum_i r_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(r_{ij}); \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

и, соответственно, уравнение движения как

Рассмотрим малые колебания системы вблизи положения равновесия $r_n + \delta r_n$.

Можно перейти к нормальным координатам $Q_{i\alpha}$ ($i, \alpha = 1, 2, 3, \dots, (3N - 6)$), в которых выражение для полной энергии E системы приобретает вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,\alpha} Q_{i,\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_i \omega_i^2 \sum_{\alpha=1}^{f_i} Q_{i,\alpha}^2,$$

где ω_i — частота нормального колебания;

i — индекс у нормальных координат $Q_{i\alpha}$ пробегает значения, соответствующие различным частотам ω_i ;

α — индекс пробегает f_i значений, соответствующих линейно независимым нормальным координатам, колеблющимся с данной частотой ω_i ;

f_i — кратность вырождения частоты ω_i ;
 $\sum_i f_i = 3N - 6$.

Учтено, что из общего числа $3N$ степеней свободы кластера три соответствуют его поступательному смещению как целому, три другие — вращательному движению кластера как целого (если все частицы расположены не на одной прямой). И, таким образом, собственно колебательных степеней свободы в кластере $3N - 6$.

Колебания кластера существенно связаны с типом его симметрии, которая определяется совокупностью перемещений, приводящих к совпадению его с самим собой; об этих перемещениях говорят как о преобразованиях симметрии. Для кластера (тела конечных размеров) такими перемещениями могут быть повороты на некоторые углы вокруг осей, имеющих общую точку пересечения, и отражения в плоскостях, содержащих эту же точку. Эти преобразо-

вания симметрии образуют так называемую точечную группу, т. е. структура кластера удовлетворяет некоторой группе точечной симметрии.

При преобразованиях группы симметрии кластера его динамические коэффициенты k_{ij} и m_{ij} не меняются, поэтому не меняются нормальные частоты колебаний ω_i .

Выражение для энергии кластера, записанное в нормальных координатах, должно быть инвариантным по отношению к преобразованиям симметрии. Это означает, что нормальные координаты, относящиеся к каждой собственной частоте колебаний кластера, осуществляют некоторое неприводимое представление ее группы симметрии; кратность частоты определяет размерность представления.

Таким образом, теория групп позволяет определить число собственных частот ω_i , кратность их вырождения и даже форму соответствующих им колебаний.

Применение теории групп основано на теории неприводимых представлений и теории характеров.

Задача определения нормальных координат значительно упрощается, если предварительно из смещений δr_n построить симметризованные смещения, т. е. линейные комбинации смещений, преобразующихся по неприводимым представлениям. Набор таких линейных комбинаций, соответствующих одному неприводимому представлению, определяет некоторое инвариантное подпространство в пространстве переменных δr_n .

Определения симметризованных смещений макрочастиц для симметричных кластеров

Куб

Одна из равновесных конфигураций, образованная восемью макрочастицами, представляет собой систему, в которой пылинки располагаются по вершинам правильного куба.

Пронумеруем макрочастицы, лежащие в вершинах куба, цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Тогда равновесные координаты макрочастиц будут равны:

$$\begin{aligned} r_1 &= (a, a, a); & r_2 &= (a, -a, a); & r_3 &= (-a, -a, a); \\ r_4 &= (-a, a, a); & r_5 &= (a, a, -a); & r_6 &= (a, -a, -a); \\ r_7 &= (-a, -a, -a); & r_8 &= (-a, a, -a). \end{aligned}$$

Введем константы:

$$\begin{aligned} f'(4a^2) &= K_1; & f'(8a^2) &= K_2; \\ f'(12a^2) &= K_3; & a^2 f''(4a^2) &= K_4; \\ a^2 f''(8a^2) &= K_5; & a^2 f''(12a^2) &= K_6. \end{aligned}$$

Условие равновесия имеет вид

$$K_1 = -2K_2 - K_3 - 1/2d^3.$$

Силы разлагаются по малым отклонениям координат от равновесия, с учетом условия равновесия получается система

$$Mx = M_{ij}x_j = \omega^2 x_i + F_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \dots, 24,$$

где $x_i = (\delta x_1, \delta y_1, \dots, \delta z_8)$.

Симметрия кубического кластера (рис. 1) описывается точечной группой O_h , которая содержит полную симметрию куба. Она состоит из 48 элементов, распределенных по 10 классам.

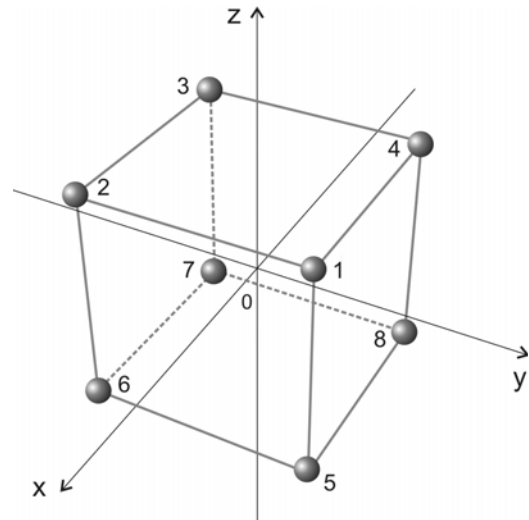


Рис. 1. Кубический кластер

Группа O_h имеет следующие элементы группы симметрии:

$$E; 8C_3; 3C_2; 6C_4; 6C'_2; i; 8S_6; 3\sigma_h; 6S_4; 3\sigma_d.$$

Представления же группы O_h можно получить из представлений группы O ($O_h = O \times I$). Существует пять представлений, симметричных по отношению к инверсии:

$$A_1^{(g)}, A_2^{(g)}, E^{(g)}, F_1^{(g)}, F_2^{(g)},$$

и пять представлений, антисимметричных по отношению к инверсии:

$$A_1^{(u)}, A_2^{(u)}, E^{(u)}, F_1^{(u)}, F_2^{(u)}.$$

Вычислив числа вхождения, получим, что полное пространство представления разлагается на сумму инвариантных подпространств:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma'_2 + \Gamma'_3 + \Gamma'_4 + 2\Gamma'_5.$$

Числа вхождений для представлений 4 и 5' больше 1, таким образом для этих представлений получаются не нормальные координаты (симметричные), а базисные элементы, линейная комбинация которых позволяет определить нормальные координаты.

В данном случае получаются 1+2+1+2+3+3 нормальные координаты; 3 трансляции и 3 набора (по 3 координаты) базисных элементов, из которых надо подбирать 3 линейные комбинации для получения нормальных координат.

Полная группа симметрии кубического кластера включает в себя трансляции вдоль трех координатных осей. Соответствующие симметрические координаты задаются трехмерным вектором

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^8 \delta \mathbf{r}_i .$$

Вычисляя вторую производную этого вектора, получаем $\ddot{\mathbf{T}}_i = -2\mathbf{T}_i$.

Соответствующие трехмерному представлению Γ_5 координаты отвечают за вращение системы как целого вокруг одной из трех координатных осей.

Из физических соображений очевидно, что соответствующие частоты колебаний должны обращаться в нуль. Действительно, вычисляя $\ddot{\omega}$, легко убедиться, что $\ddot{\omega} \equiv 0$.

Симметрические координаты, соответствующие одномерным представлениям (рис. 2), имеют вид:

$$Q_1 = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 + \delta x_5 + \delta x_6 - \delta x_7 - \delta x_8 + \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 + \delta y_5 - \delta y_6 - \delta y_7 + \delta y_8 + \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 + \delta z_4 - \delta z_5 - \delta z_6 - \delta z_7 - \delta z_8;$$

$$Q_2 = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 - \delta x_5 + \delta x_6 + \delta x_7 - \delta x_8 + \delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 - \delta y_4 - \delta y_5 - \delta y_6 + \delta y_7 + \delta y_8 + \delta z_1 - \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 + \delta z_5 - \delta z_6 + \delta z_7 - \delta z_8.$$

Симметрические координаты, соответствующие двумерным представлениям (рис. 3) и (рис. 4), имеют вид:

$$Q_{3a} = 2(\delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 - \delta x_5 + \delta x_6 + \delta x_7 - \delta x_8) - \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 + \delta y_5 + \delta y_6 - \delta y_7 - \delta y_8 - \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4 - \delta z_5 + \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{4a} = -\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_4 - \delta y_5 + \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8 + \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 + \delta z_4 - \delta z_5 - \delta z_6 - \delta z_7 - \delta z_8;$$

$$Q_{3b} = 2(\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 + \delta x_5 + \delta x_6 - \delta x_7 - \delta x_8) - \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_4 - \delta y_5 + \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8 - \delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4 + \delta z_5 + \delta z_6 + \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{4b} = \delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 - \delta y_4 - \delta y_5 - \delta y_6 + \delta y_7 + \delta y_8 - \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4 - \delta z_5 + \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8;$$

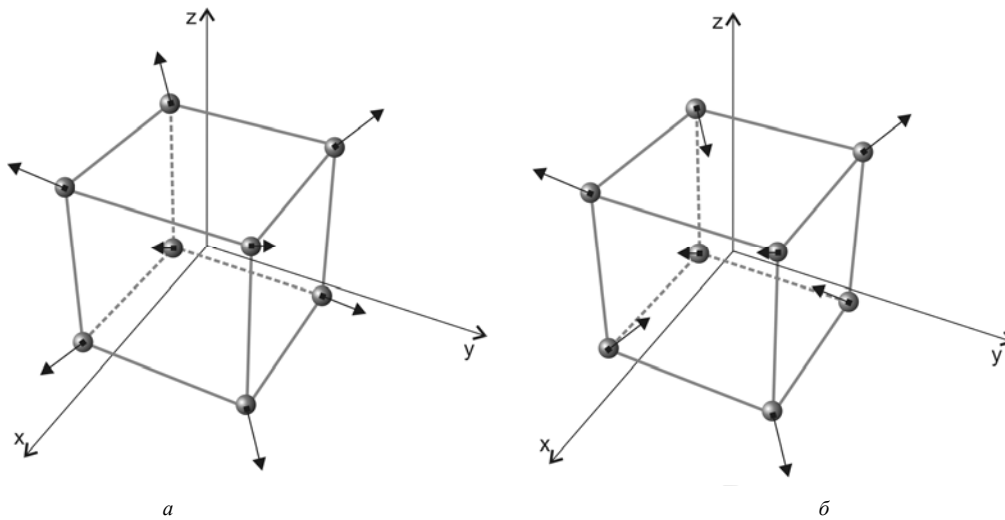


Рис. 2. Одномерные представления: а – полностью симметричные колебания (Q_1); б – антисимметричные колебания (Q_2)

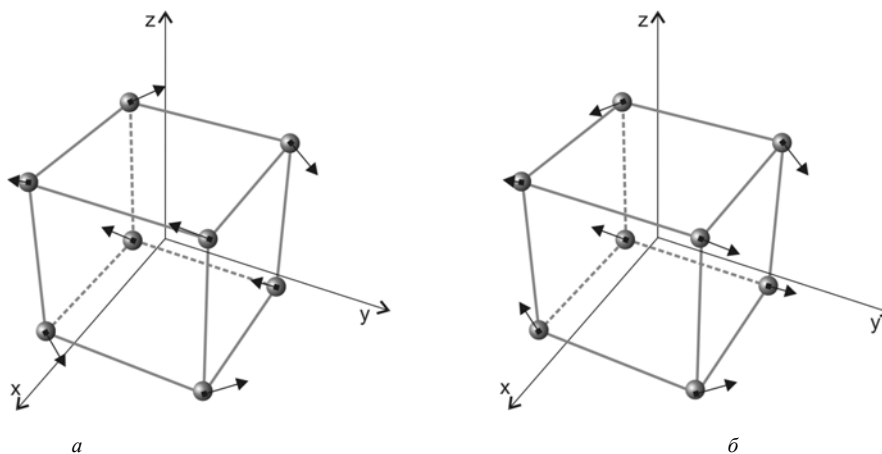


Рис. 3. Двухмерные представления (Q_3) (а, б)

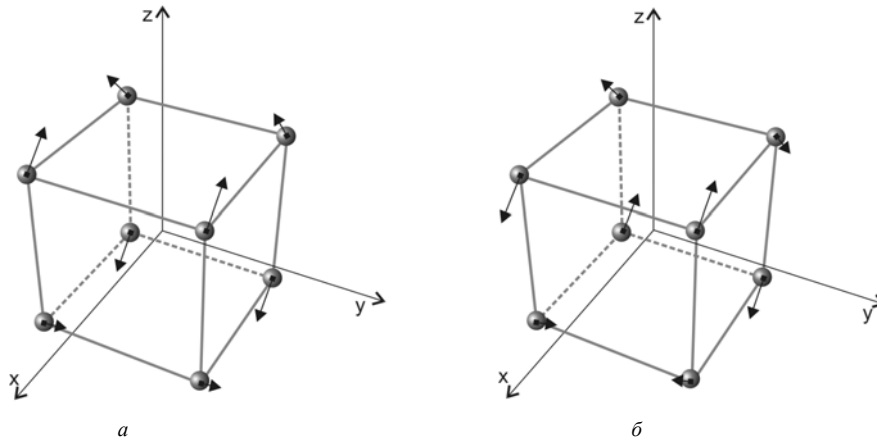


Рис. 4. Двухмерные представления (Q_4) (а, б)

Последние симметрические координаты, соответствующие трехмерному представлению (рис. 5 и 6), имеют вид:

$$Q_{5a} = -\delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \delta y_5 + \delta y_6 - \delta y_7 + \delta y_8 + \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4 - \delta z_5 - \delta z_6 + \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{5b} = \delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 + \delta x_5 - \delta x_6 + \delta x_7 - \delta x_8 - \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 + \delta z_5 - \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{5c} = -\delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 + \delta x_4 + \delta x_5 + \delta x_6 - \delta x_7 -$$

$$-\delta x_8 + \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \delta y_5 + \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8;$$

$$Q_{6a} = \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_4 + \delta y_5 - \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8 + \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4 - \delta z_5 - \delta z_6 + \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{6b} = -\delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 - \delta x_5 + \delta x_6 - \delta x_7 + \delta x_8 - \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 + \delta z_5 - \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{6c} = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 - \delta x_5 - \delta x_6 + \delta x_7 + \delta x_8 + \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \delta y_5 + \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8.$$

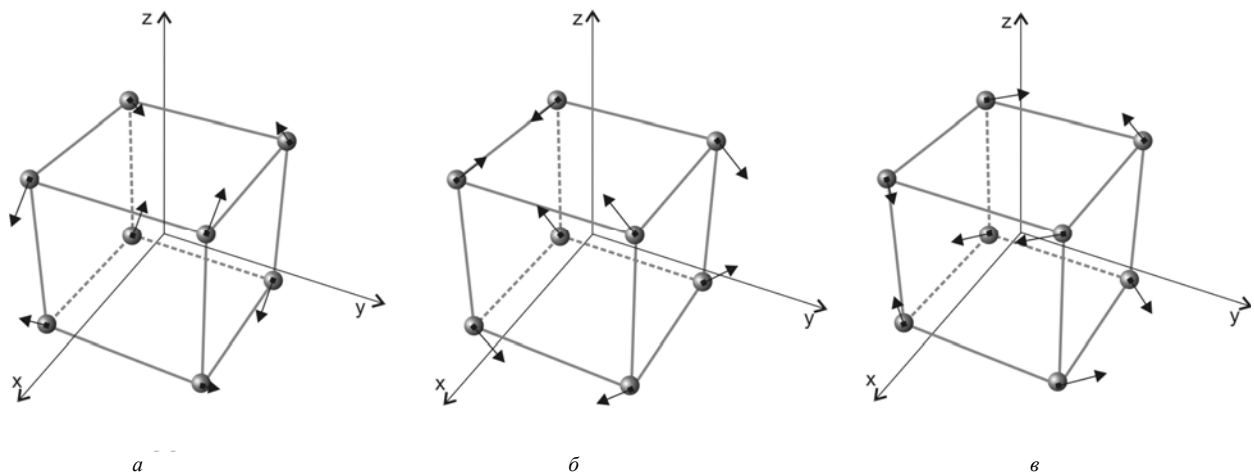


Рис. 5. Трехмерные представления (Q_5) (а, б, в)

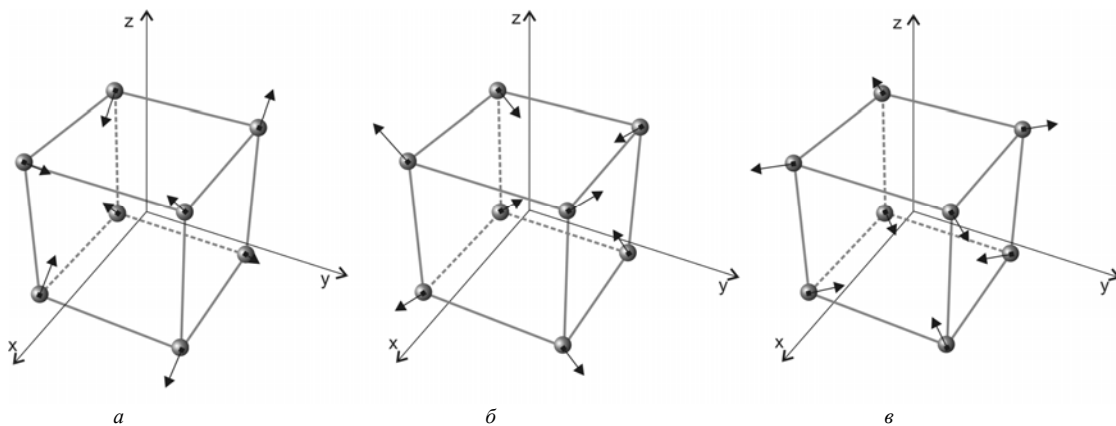


Рис. 6. Трехмерные представления (Q_6) (а, б, в)

Базисные элементы, линейная комбинация которых дает оставшиеся нормальные координаты (рис. 7), выглядят так:

$$q_{7a} = \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 - \delta y_5 - \delta y_6 - \delta y_7 - \delta y_8 + \delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4 + \delta z_5 - \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$q_{7b} = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \delta x_4 - \delta x_5 - \delta x_6 - \delta x_7 - \delta x_8 + \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4 + \delta z_5 + \delta z_6 - \delta z_7 - \delta z_8;$$

$$q_{7c} = -\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 - \delta x_5 + \delta x_6 + \delta x_7 - \delta x_8 - \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 - \delta y_5 - \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8$$

и

$$q_{8a} = \delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 - \delta x_5 + \delta x_6 - \delta x_7 + \delta x_8;$$

$$q_{8b} = \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_4 - \delta y_5 + \delta y_6 - \delta y_7 + \delta y_8;$$

$$q_{8c} = \delta z_1 - \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 - \delta z_5 + \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8.$$

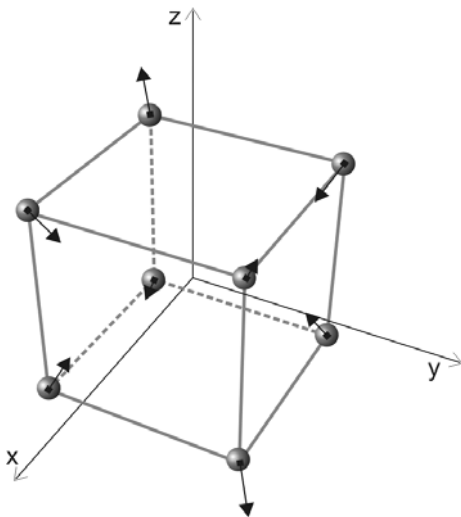
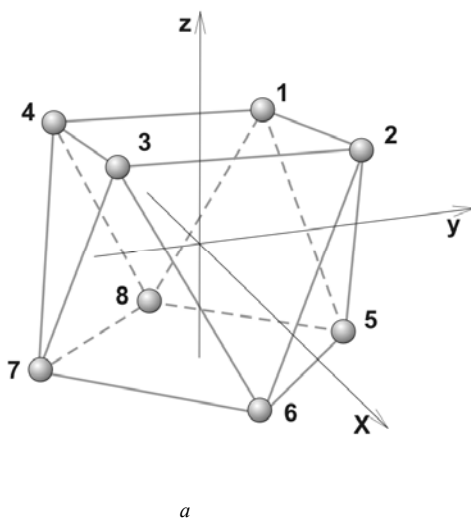


Рис. 7. Пример поляризации связанных мод (комбинация Q_7 и Q_8), которая зависит от соотношения между коэффициентами K_i



В новых координатах получаем матрицу преобразования $L_{ij} : y_i = L_{ij} x_j$. Затем вычисляется преобразованная матрица $M' = LML^{-1}$, которая является теперь блочно-диагональной. И, соответственно, частоты для двух одномерных представлений имеют следующий вид:

$$\omega^2 - 32(K_4 + 4K_5 + 3K_6) = 0, \quad \omega^2 + 8K_2 + 8K_3 - 128K_5 + 2 = 0;$$

для двух двумерных представлений:

$$\omega^2 - 32(K_4 + K_5) = 0, \quad \omega^2 + 8K_2 + 8K_3 - 32K_5 + 2 = 0;$$

для двух трехмерных представлений:

$$\omega^2 + 8K_2 + 8K_3 - 32K_4 + 2 = 0, \quad \omega^2 + 8K^2 + 8K^3 - 32K^4 - 64K^5 + 2 = 0.$$

Нижние три 2×2 блока M' одинаковы. Собственные частоты, соответствующие этим блокам, равны:

$$\omega^2 = 2(-1 - 6K_2 - 2K_3 + 8K_4 + 16K_5 + 24K_6) \pm \sqrt{(6K_2 + 2K_3 - 8K_4 + 16K_5 + 1)^2 + 16K_6(6K_2 + 2K_3 - 8K_4 + 16K_5 + 1) + 576K_6^2}$$

Квадратная антипризма

Одной из равновесных конфигураций для системы, состоящей из 8 макрочастиц, является квадратная антипризма.

Антипризма получается, если повернуть одно основание куба относительно другого и поочередно зигзагом соединить вершины. Если взять за основания правильные многоугольники и подобрать расстояние между ними так, чтобы боковые стороны стали правильными треугольниками, мы получим правильную антипризму.

В каждой вершине антипризмы встречаются четыре грани — основание и три боковых треугольника (рис. 8).

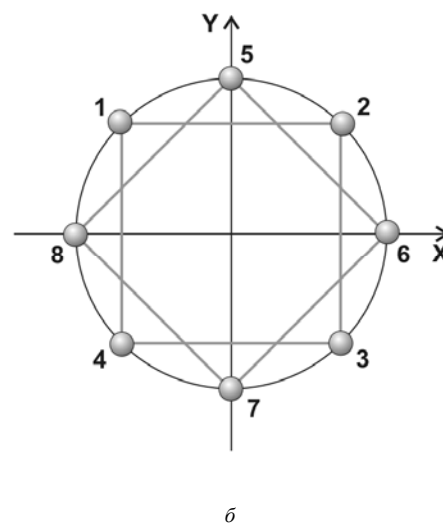


Рис. 8. Квадратная антипризма (а, б)

Будем считать, что при исходной конфигурации макрочастицы располагаются в вершинах квадратной антипризмы, пронумеруем их цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8, как показано на рис. 8.

Координатные оси направлены следующим образом: ось X проходит через частицы 8 и 6, ось Y — через 7 и 5, а ось Z — перпендикулярна плоскостям обоих квадратов. Пусть сторона квадрата равна $2a$, расстояние между квадратами составляет $2h$, тогда равновесные координаты макрочастиц будут:

$$\begin{aligned} r_1 &= (-a, a, h); & r_2 &= (a, a, h); \\ r_3 &= (a, -a, h); & r_4 &= (-a, -a, h); \\ r_5 &= (0, \sqrt{2}a, -h); & r_6 &= (\sqrt{2}a, 0, -h); \\ r_7 &= (0, -\sqrt{2}a, -h); & r_8 &= (-\sqrt{2}a, 0, -h). \end{aligned}$$

Уравнения движения

$$\ddot{r}_i = -\frac{\partial W}{\partial r_i}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} d_1 &= 4a^2; & d_2 &= 8a^2; & d_3 &= 2(2 + \sqrt{2})a^2 + 4h^2; \\ d_4 &= 2(2 - \sqrt{2})a^2 + 4h^2; \\ f_i &= f'(d_i); & g_i &= f''(d_i), \end{aligned}$$

тогда условие равновесия будет описываться двумя уравнениями

$$\begin{aligned} f_3 + f_4 &= -1/4d_3; \\ 2f_1 + 2f_2 + (2 + \sqrt{2})f_3 + (2 - \sqrt{2})f_4 &= -1/d_3. \end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют для заданного потенциала взаимодействия определить равновесный размер кластера.

Симметрия рассматриваемого кластера описывается точечной группой D_{4d} , состоящей из 16 элементов.

Группа D_{nd} — группа симметрии тела, состоящего из двух правильных n -угольных призм, поставленных друг на друга и повернутых одна относительно другой на угол π/n .

Группа преобразований симметрии квадратной антипризмы (D_{4d}) включает в себя: (E), ($2 S_8$), ($2 C_4$), ($2 S_8^3$), (C_2), ($4 \sigma_v$) и ($4 C_2$). Эта группа содержит 16 элементов в семи классах, поэтому существует семь неприводимых представлений и, следовательно, — только четыре одномерных представления A_1, A_2, B_1, B_2 и три двухмерных E_1, E_2 , и E_3 .

Порядок вырождения частот равен размерности соответствующего неприводимого представления. Без учета представлений, которые отвечают за вращение и сдвиг системы как целого, разложение выглядит следующим образом:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + 2\Gamma_5 + 3\Gamma_6 + 2\Gamma_7.$$

Зная характеры группы, можно получить совокупность симметричных координат, соответствующих каждому неприводимому представлению.

Приведем симметричные координаты, которые получены с помощью таблицы характеров. Нормальные частоты и нормальные колебания находятся с помощью симметричных координат.

Полная группа симметрии кластера включает в себя трансляции (сдвиг системы как целого) вдоль трех координатных осей x, y и z (двухмерное представление $E_1(2)$ и одномерное B_1). Соответствующие симметричные координаты задаются трехмерным вектором

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^8 \delta r_i$$

и, соответственно, $\ddot{T}_i = -2\Gamma_i$.

Следующие три координаты соответствуют вращению системы как целого вокруг одной из трех координатных осей (двухмерное представление $E_3(2)$ и относительно осей x, y):

$$\omega_x = h(-\delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 - \delta y_4 + \delta y_5 + \delta y_6 + \delta y_7 + \delta y_8) + a(\delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4 + \sqrt{2}(\delta z_5 - \delta z_7));$$

$$\omega_y = h(\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \delta x_4 - \delta x_5 - \delta x_6 - \delta x_7 - \delta x_8) + a(\delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4 + \sqrt{2}(\delta z_6 - \delta z_8))$$

и (одномерное B_1) относительно оси z

$$\omega_z = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 + \sqrt{2}(\delta x_5 - \delta x_7) + \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \sqrt{2}(\delta y_6 - \delta y_8).$$

Учитывая первые два условия равновесия, получим $\omega = \omega_z = 0$, а при учете всех трех условий получаем $\omega = \omega_x = \omega_y = 0$, поэтому эти колебания реализуются как одно- и двухмерное представления, а не одно трехмерное.

Два одномерных представления $2A_1$ (рис. 9) будут:

$$Q_1 = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 - \sqrt{2}(\delta x_6 - \delta x_8) - \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 - \sqrt{2}(\delta y_5 - \delta y_7);$$

$$Q_2 = \delta z_1 + \delta z_2 + \delta z_3 + \delta z_4 - \delta z_5 - \delta z_6 - \delta z_7 - \delta z_8.$$

Соответствующие частоты:

$$\omega^2 = 8(2a^2g_1 + 4a^2g_2 + (3 + 2\sqrt{2})a^2g_3 + (3 - 2\sqrt{2})a^2g_4 + 4(g_3 + g_4)h^2 \pm \sqrt{D}),$$

где

$$\begin{aligned} D &= -32a^2[g_1(g_3 + g_4) + 2(g_3g_4 + g_2(g_3 + g_4))]h^2 + \\ &+ [(a^2[2g_1 + 4g_2 + (3 + 2\sqrt{2})g_3 + (3 - 2\sqrt{2})g_4] + \\ &+ 4(g_3 + g_4)h^2]^2. \end{aligned}$$

Два одномерных представления B_1 и B_2 (рис. 10) выглядят так:

$$Q_3 = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 + \sqrt{2}(\delta x_6 - \delta x_8) - \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 + \sqrt{2}(\delta y_5 - \delta y_7);$$

$$Q_4 = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 - \sqrt{2}(\delta x_5 - \delta x_7) + \delta y_1 - \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 + \sqrt{2}(\delta y_6 - \delta y_8).$$

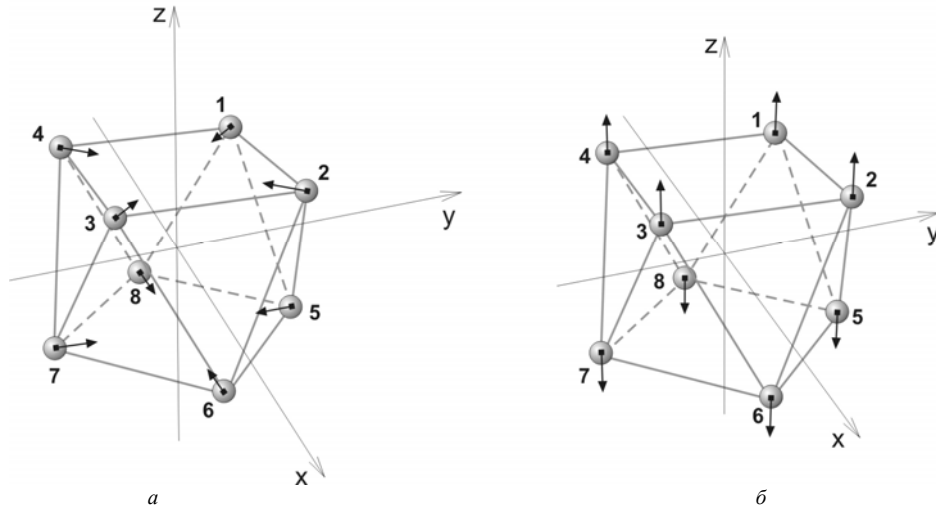


Рис. 9. Одномерные представления (Q_1) и (Q_2) (а, б)

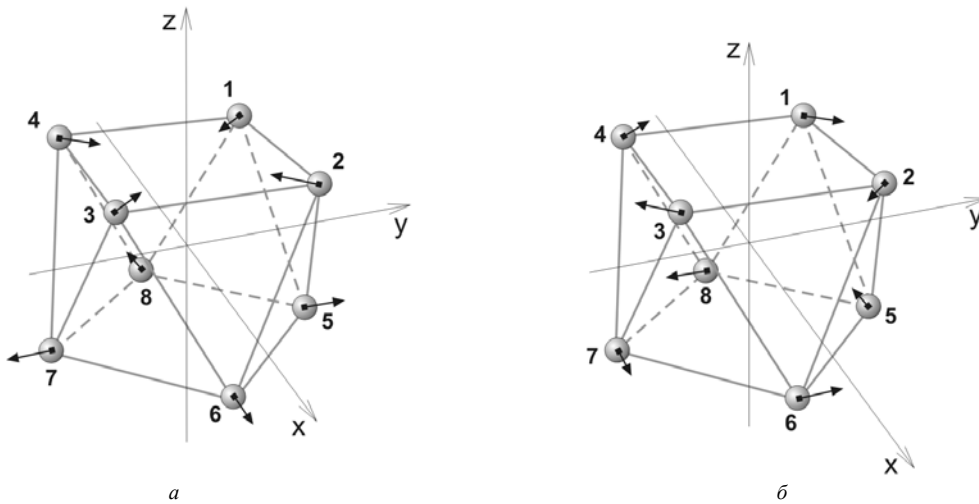


Рис. 10. Два одномерных представления (Q_3) и (Q_4) (а, б)

Уравнения движения для этих мод следующие:

$$[-\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \{f_4\} - 32a^2(g_1 + 2g_2)] Q_3 = -\omega^2 Q_3;$$

$$[-\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \{f_4\} - 16a^2(g_3 + g_4)] Q_4 = -\omega^2 Q_4.$$

Координаты, соответствующие двум двухмерным представлениям $2E_1(2)$ (рис. 11):

$$Q_{5a} = -\delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 - \delta x_5 + \delta x_6 - \delta x_7 + \delta x_8;$$

$$Q_{5b} = \delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 - \delta y_5 + \delta y_6 - \delta y_7 + \delta y_8$$

и (рис. 12):

$$Q_{6a} = \delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 + \delta z_4 + \sqrt{2} (\delta z_6 - \delta z_8);$$

$$Q_{6b} = \delta z_1 + \delta z_2 - \delta z_3 - \delta z_4 - \sqrt{2} (\delta z_5 - \delta z_7)$$

и, соответственно, частоты

$$\omega_{5,6}^2 = -1/2(A_{11} + A_{12}) \pm 1/2\sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2},$$

где

$$A_{11} = 1 - \sqrt{2} + 8f_2 - 8\sqrt{2} f_4 - 32a^2 g_1 - 16a^2 g_3 -$$

$$- 8\sqrt{2} a^2 g_3 - 16a^2 g_4 + 8\sqrt{2} a^2 g_4;$$

$$A_{12} = A_{21} = 16a (g_3 + g_4)h;$$

$$A_{22} = -\sqrt{2} - 8\sqrt{2} f_4 + 16(-2 + \sqrt{2})g_3 h^2 - 32g_4 h^2 -$$

$$- 16\sqrt{2} g_4 h^2.$$

Теперь запишем симметрические (нормальные) координаты, соответствующие трем двухмерным представлениям $3E_2(2)$ (рис. 13—15):

$$Q_{7a} = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 + \sqrt{2} (\delta x_6 - \delta x_8) - \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 -$$

$$- \delta y_4 - \sqrt{2} (\delta y_5 - \delta y_7);$$

$$Q_{7b} = \delta x_1 + \delta x_2 - \delta x_3 - \delta x_4 - \sqrt{2} (\delta x_6 - \delta x_8) - \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 -$$

$$- \delta y_4 + \sqrt{2} (\delta y_5 - \delta y_7);$$

$$Q_{8a} = -\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 + \sqrt{2} (\delta x_5 - \delta x_7) -$$

$$- \delta y_1 - \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 + \sqrt{2} (\delta y_6 - \delta y_8);$$

$$Q_{8b} = \delta x_1 - \delta x_2 - \delta x_3 + \delta x_4 + \sqrt{2} (\delta x_5 - \delta x_7) +$$

$$+ \delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 - \delta y_4 + \sqrt{2} (\delta y_6 - \delta y_8);$$

$$Q_{9a} = \delta z_1 - \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 - \delta z_5 + \delta z_6 - \delta z_7 + \delta z_8;$$

$$Q_{9b} = \delta z_1 - \delta z_2 + \delta z_3 - \delta z_4 + \delta z_5 - \delta z_6 + \delta z_7 - \delta z_8.$$

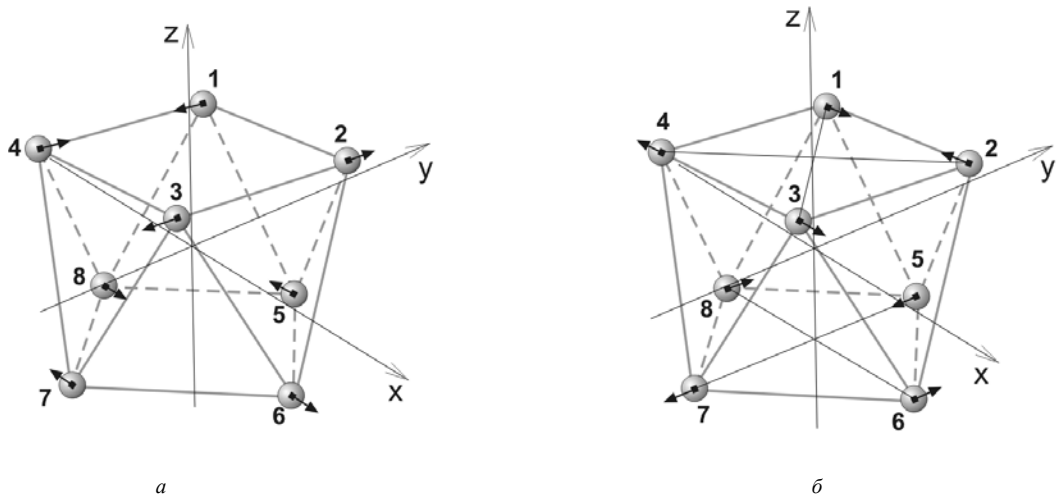


Рис. 11. Двухмерные представления (Q_5) (а, б)

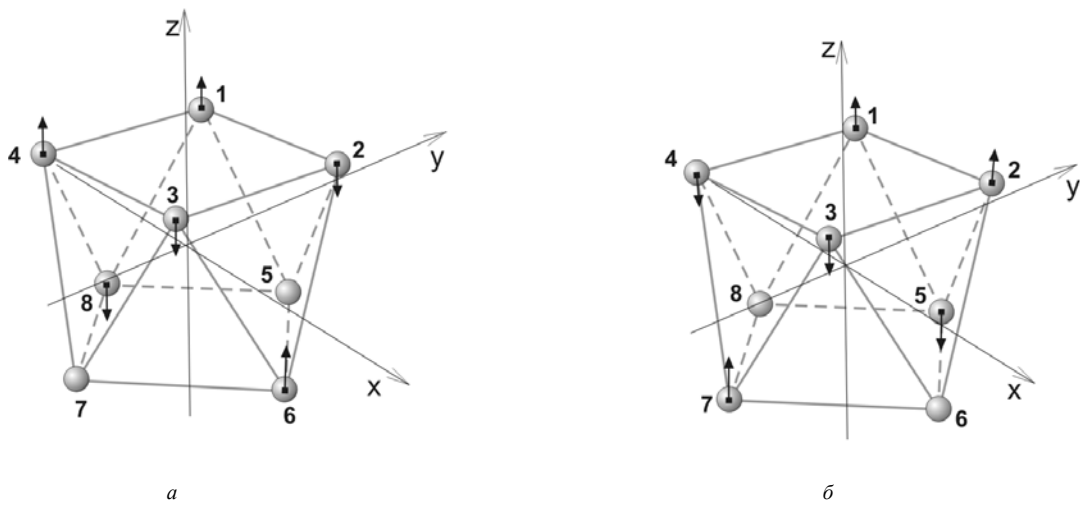


Рис. 12. Двухмерные представления (Q_6) (а, б)

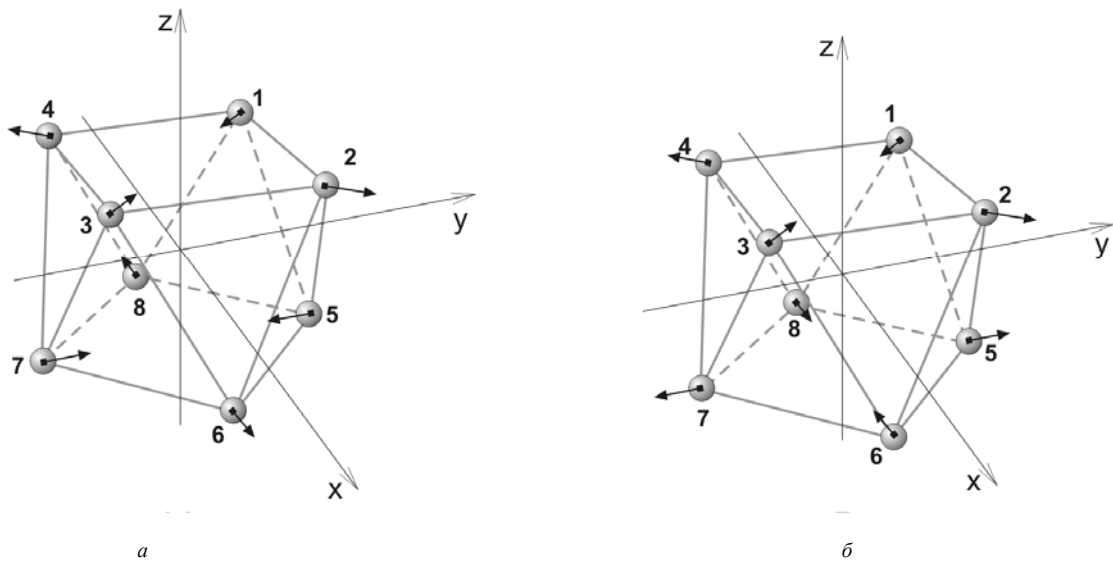


Рис. 13. Двухмерные представления (Q_7) (а, б)

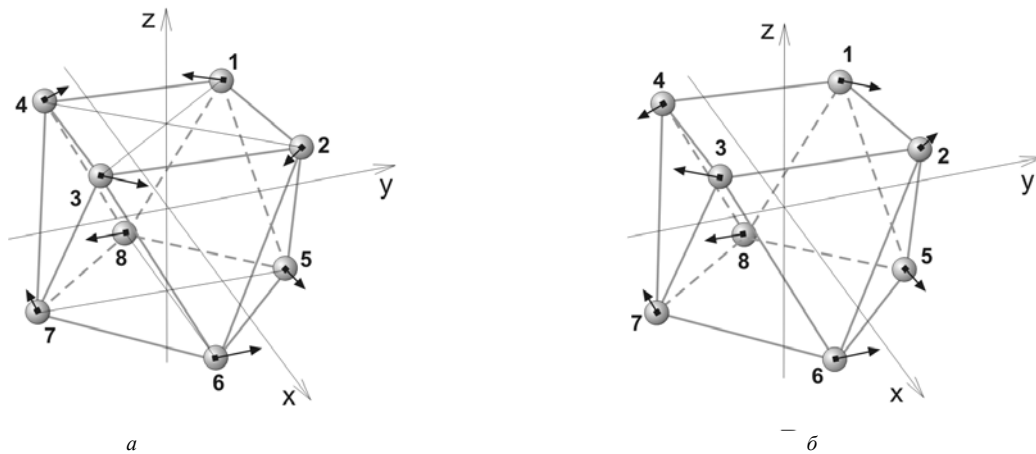


Рис. 14. Двухмерные представления (Q_8) (а, б)

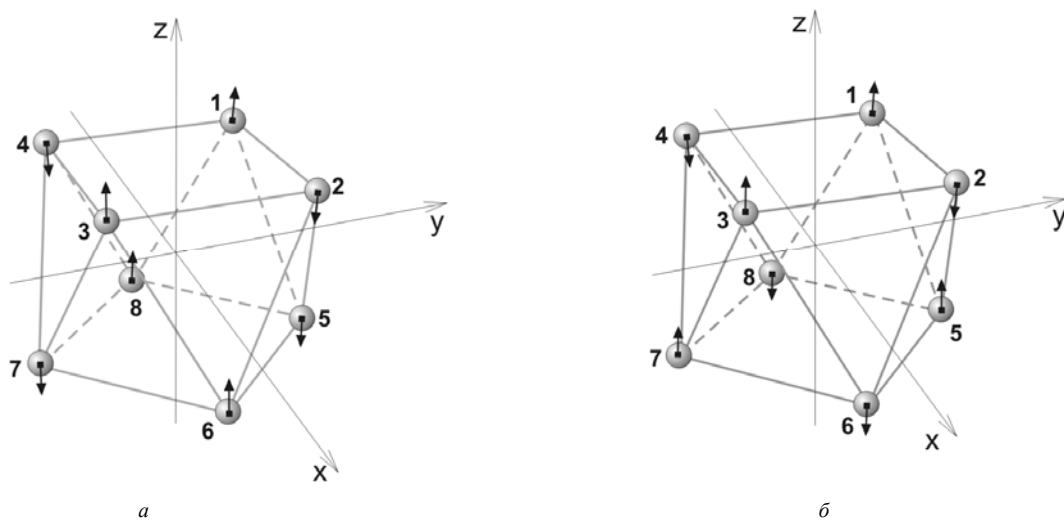


Рис. 15. Двухмерные представления (Q_9) (а, б)

Если

$$M_7 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$B_{11} = -1/\sqrt{2} - 4\sqrt{2}f_4 - 8a^2(8g_2 + 3g_3 + \sqrt{2}g_3 + 3g_4 - 2\sqrt{2}g_4);$$

$$B_{12} = 1/\sqrt{2} + 4\sqrt{2}f_4 - 8a^2(g_3 + \sqrt{2}g_3 + g_4 - \sqrt{2}g_4);$$

$$B_{13} = 16a((2 + \sqrt{2})g_3 + (2 - \sqrt{2})g_4)h;$$

$$B_{21} = 1/\sqrt{2} + 4\sqrt{2}f_4 - 8a^2(g_3 + \sqrt{2}g_3 + g_4 - \sqrt{2}g_4);$$

$$B_{22} = -1/\sqrt{2} - 4\sqrt{2}f_4 - 8a^2(4g_1 + g_3 + g_4);$$

$$B_{23} = 16\sqrt{2}a(g_3 - g_4)h;$$

$$B_{31} = 8a((2 + \sqrt{2})g_3 + (2 - \sqrt{2})g_4)h;$$

$$B_{32} = \sqrt{2}a(g_3 - g_4)h;$$

$$B_{33} = 1 - \sqrt{2} + 8f_2 - 8\sqrt{2}f_4 - 32(g_3 + g_4)h^2,$$

то
$$M_7 \begin{pmatrix} Q_{i7} \\ Q_{i8} \\ Q_{i9} \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} Q_{i7} \\ Q_{i8} \\ Q_{i9} \end{pmatrix},$$

где $i = a, b$.

Соответственно, бикубическое уравнение и частоты в обозримом виде получить не удастся.

Теперь запишем симметрические (нормальные) координаты, соответствующие двум двухмерным представлениям $2E_3(2)$ (рис. 16 и 17):

$$Q_{10a} = -\delta y_1 + \delta y_2 - \delta y_3 + \delta y_4 + \delta x_5 - \delta x_6 + \delta x_7 - \delta x_8;$$

$$Q_{10b} = \delta x_1 - \delta x_2 + \delta x_3 - \delta x_4 + \delta y_5 - \delta y_6 + \delta y_7 - \delta y_8;$$

последняя пара (см. рис. 17):

$$Q_{11a} = a(\delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \delta x_4 - \delta x_5 - \delta x_6 - \delta x_7 - \delta x_8) + h(-\delta z_1 + \delta z_3 + \delta z_2 - \delta z_4 + \sqrt{2}(\delta z_6 - \delta z_7));$$

$$Q_{11b} = a(\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 + \delta y_4 - \delta y_5 - \delta y_6 - \delta y_7 - \delta y_8) + h(\delta z_1 - \delta z_3 + \delta z_2 - \delta z_4 + \sqrt{2}(\delta z_5 - \delta z_7)).$$

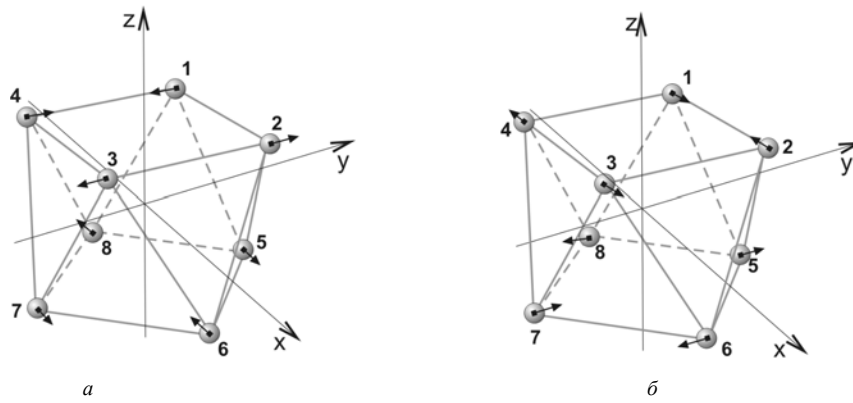


Рис. 16. Двухмерные представления (Q_{10}) (а, б)

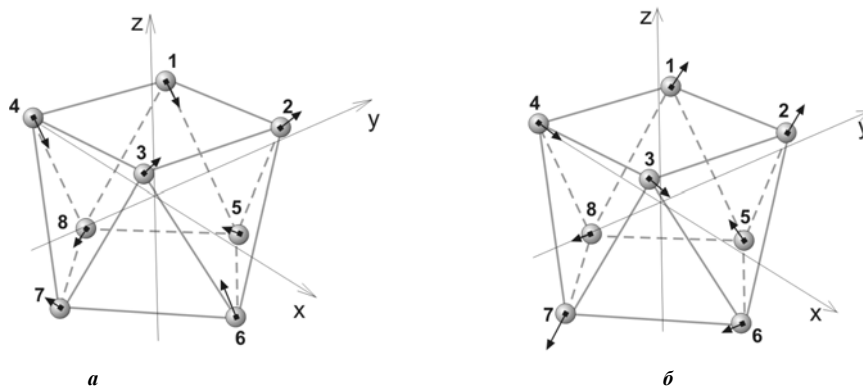


Рис. 17. Двухмерные представления (Q_{11}) (а, б)

Тогда соответствующие частоты двукратно вырожденных колебаний с учетом баланса сил имеют вид:

$$\omega_{10,11}^2 = -1/2(D_{11} + D_{22}) \pm 1/2\sqrt{(D_{11} + D_{22})^2 + 4D_{12}^2}$$

где

$$D_{11} = 1 - \sqrt{2} + 8f_2 - 8\sqrt{2}f_4 - 8a^2(4g_1 + (2 + \sqrt{2})g_3 + (2 - \sqrt{2})g_4);$$

$$D_{12} = -16a(g_3 + \sqrt{2}g_3 + g_4 - \sqrt{2}g_4);$$

$$D_{21} = -16a(g_3 + \sqrt{2}g_3 + g_4 - \sqrt{2}g_4)(a^2 + h^2);$$

$$D_{22} = -16((2 + \sqrt{2})g_3 + (2 - \sqrt{2})g_4)(a^2 + h^2).$$

Частные случаи

В качестве примера рассмотрим несколько типичных случаев взаимодействия, встречающихся в пылевой плазме, и вычислим частоты нормальных колебаний.

Потенциал взаимодействия в виде потенциала Юкавы

$$U_{int} = q^2/r e^{(-r/D)}$$

и, соответственно, $f(\xi) = 1/\sqrt{\xi} e^{(-\frac{\sqrt{\xi}}{D})}$.

В случае $k = 0$ реализуется кулоновское взаимодействие $U_{int} = q^2/r$, или $f(\xi) = 1/\sqrt{\xi}$.

На рис. 18 для куба показаны зависимости частот (ω^2) от $\ln k$ — коэффициента экранировки.

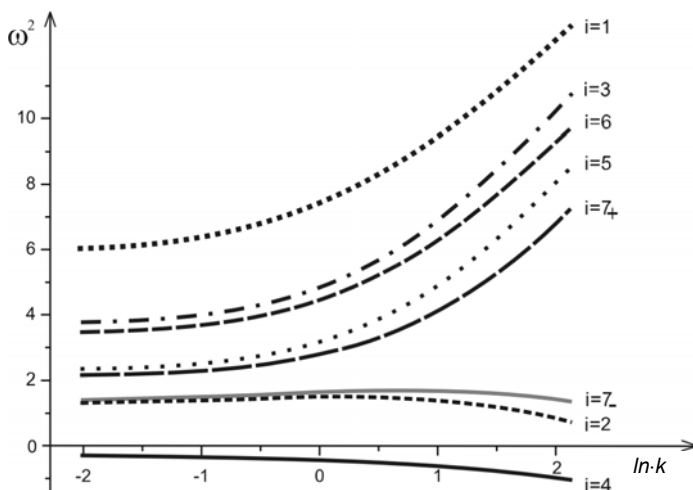


Рис. 18. Зависимость частоты ω^2 от коэффициента экранировки $\ln k$

Если макрочастицы, образующие куб, взаимодействуют либо с кулоновским потенциалом, либо с дебаевским, то куб не просто обладает большей энергией по сравнению с квадратной антипризмой, но и в отличие от нее является неустойчивым.

Колебания, показанные на рис. 4, приводят к тому, что у куба поворачивается одно основание относительно другого на $\pi/2$, и они сдвигаются друг к другу, в результате чего получается правильная квадратная антипризма.

Заключение

Проанализирована устойчивость малого кластера в форме куба и правильной квадратной антипризмы для самого общего случая взаимодействия путем иллюстрации наших выкладок типичными примерами взаимодействия, которые встречаются в пылевой плазме.

Так как потенциал взаимодействия был рассмотрен в общем виде, то при наличии каких-либо эффектов притяжения (например, эффекта затенения Лессажа) возможно возникновение случаев самоудержания.

Равновесные конфигурации могут реализовываться и при отталкивающем центре, если существует механизм притяжения между макрочастицами. Такая ситуация также полностью описывается нашими формулами.

Геометрические параметры равновесных конфигураций (a , h), а также частоты колебаний кластеров определяются из экспериментальных данных. Хотя обычно конкретная величина удерживающей силы точно неизвестна, ее в принципе можно изменять, что приводит к вариации размеров кластера.

Таким образом, можно восстановить зависимость потенциала межчастичного взаимодействия из измерений спектра колебаний кластера, что является актуальной задачей.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ-05-02-16796-а и NWO-047-016-020.

Л и т е р а т у р а

1. Daniel H. E. Dubin, O'Neil T. M. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. № 1. P. 87.
2. Arp O., Block D., Piel A., Melzer A. // Phys. Rev. Lett. 2004. № 16. P. 165004.
3. Rafac R., Schiffer J. P., Hangste J. S., Dubin D. H. E., Wales D. J. // Proc. Natl. Acad. Sci. 1991. № 88. P. 483.
4. Гусейн-заде Н. Г., Клочков Д. Н. // КСФ (в печати), 2005.
5. Casdorff R., Blatt R. // Appl. Phys. 1988. В. № 45. P. 175.
6. Baklanov E. V., Chebotarev V. P. // Ibid. 1986. В. № 39. P. 179.
7. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. — М.: Физ-мат. лит-ра. 1958.

Статья поступила в редакцию 25 января 2006 г.

Normal oscillations of a small dust cluster. Cube and skew-prism

N. G. Gusein-zade, A. M. Ignatov
Institute of General Physics, RAS, Moscow, Russia

We investigate normal oscillations of three-dimensional configurations in the shape of regular polyhedra composed of dust grains in complex plasmas in a spherically symmetric potential well. With the net number of grains equals eight, the possible configurations are a cube and a skew-prism. The interaction between grains is described by an arbitrary potential, $U(r)$, that depends on the distanced between grains only. Our results allow to estimate the interaction potential using experimental data.