The experimental examination of radiation heat exchange between bodies is made with the purpose of checkout of a series of the gueses used at the theoretical calculations for the similar processes.

УДК 621

Дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами в электродинамике СВЧ

И. Н. Антонов, А. В. Пивоваров
Саратовский государственный технический университет, г. Саратов, Россия

Г. А. Овчинникова
Московский авиационный институт (Технический университет), Москва, Россия

Рассмотрена методика применения уравнений Матье к типовым задачам СВЧ-электродинамики.

Периодические решения однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

К уравнениям Матье сводятся многие физические и электродинамические задачи. Эти уравнения позволяют определить области устойчивости, неустойчивости и квазипериодических колебаний. Физический смысл неустойчивого
решения заключается в том, что при определенных соотношениях между коэффициентом вариации параметра и относительной частотой этой вариации в контуре могут возникнуть колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Источником энергии возникновения этих колебаний является источник, осуществляющий вариацию параметра.

В случае распространения волны любой природы через периодическую структуру мы приходим к решениям, которые получаем в результате анализа дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим уравнение

$$P_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + P_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + P_n(t)x = 0, \quad (1)$$

где $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$ $\in(-\infty, +\infty)$ — непрерывны и имеют период $\omega > 0$.

Положим для $P_0(t) > 0$, $P_k(t+\omega)=P_k(t)$, $t \in(-\infty, +\infty)$ и $k = 0,1, ..., n$.

Причем, если $X_1(t)$, $X_2(t)$,….., $X_n(t)$ образует фундаментальную систему решения уравнения (1), то функции

$$X_1(t+\infty), X_2(t+\infty), \ldots, X_n(t+\infty)$$

также образуют систему решений этого уравнения, так как при замене переменных t на $(t + \infty)$ уравнение не меняется.

Будем искать решение $X(t)$ уравнения (1) такое, что

$$X(t+\infty) = \rho X(t), t \in (-\infty, +\infty),$$

где ρ — постоянный коэффициент, который можно представить также как такие постоянные C_1, C_2, C_3, ..., C_n, что хотя бы одна из них была отлична от нуля, и решение уравнения (1)

$$X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + \ldots + C_nX_n(t)$$

удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t+\infty) = \rho \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)$$

при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i a_{i,k} - \rho c_k\right) x_k(t) = 0. \quad (2)$$

Поскольку функции $X_1(t)$, $X_2(t)$, ….., $X_n(t)$ линейно независимы, равенство (2) приводит к системе уравнений

$$a_{i,k}c_i + \ldots + a_{k-1,k}c_{k-1} + (a_{k,k} - \rho)c_k +$$
$$+a_{k+1,k}c_{k+1} + \ldots + a_{n,k}c_n = 0$$
$$k \in (1, 2, \ldots, n).$$

Можно считать очевидным, что эта система относительно неизвестных C_1, C_2, ..., C_n имеет нулевое решение тогда и только тогда, когда ρ равно корню уравнения, получаемого путем приравнивания нулю определителя так называемой характеристической матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}-\rho & a_{2,1} & K & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\rho & K & a_{n,2} \\ K & K & K & K \\ a_{1,n} & a_{2,n} & K & a_{n,n}-\rho \end{Vmatrix},$$

т. е. корню так называемого характеристического уравнения

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\rho & a_{2,1} & K & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\rho & K & a_{n,2} \\ K & K & K & K \\ a_{1,n} & a_{2,n} & K & a_{n,n}-\rho \end{vmatrix}=0, \qquad (3)$$

$D(0)=H\neq 0$, все корни отличны от нуля.

Назовем матрицу $D(\rho)$ характеристической матрицей дифференциального уравнения (1) и воспользуемся доказанным в теории дифференциальных уравнений утверждением, что корни и элементарные делители этой матрицы не зависят от выбора фундаментальной системы решений.

Характер решения уравнения (1) связан с корнями характеристического уравнения (3), и можно показать, что есть связь с элементарными делителями характеристической матрицы $D(\rho)$.

1. Если показатели всех элементарных делителей характеристической матрицы $D(\rho)$ равны единице, то каждому корню ρ_i характеристического уравнения $D(\rho) = 0$, имеющему кратность v_i, соответствуют v_i линейно независимых решений

$$X_{1,i}(t),\ X_{2,i}(t),\ \ldots,\ X_{v_i,i}(t)$$

таких, что

$$X_{\lambda,i}(t+\infty)=\rho_i X_{\lambda,i}(t)$$

для $\lambda = 1, 2, \ldots, v_i$; $i = 1, 2, \ldots, m$ совокупность всех решений, соответствующих различным корням характеристического уравнения, образует фундаментальную систему решений.

2. Если для любого корня ρ_i характеристического уравнения, имеющего кратность v_i, ранг матрицы $D(\rho)$ равен $h-v_i$ при $\rho = \rho_i$, то существует фундаментальная система решений вида

$$e^{\alpha_1 t}\varphi_1(t), e^{\alpha_2 t}\varphi_2(t), \ldots, e^{\alpha_n t}\varphi_n(t),$$

где

$$\alpha_k=\frac{1}{\omega}\left[\ln|\rho_k|+i\Theta_k\right]=\frac{\ln\rho_k}{\omega},$$

$$\varphi_k(t)=X_k(t)e^{-\alpha_k t}.$$

Функции $\varphi_k(t)$ имеют период ω.

3. Если корень ρ_k — комплексный, то характеристическое уравнение имеет сопряженные с ним корни. Этим корням соответствуют сопряженные решения $X_k(t), \bar{X}_k(t)$, а поэтому имеем

$$X_k(t)=e^{t\omega^{-1}\ln|\rho_k|}\left[\cos\frac{\Theta_k t}{\omega}+i\sin\frac{\Theta_k t}{\omega}\right]\times$$
$$\times\left[\Psi_1(t)+i\Psi_2(t)\right];$$

$$X_k(t)=e^{t\omega^{-1}\ln|\rho_k|}\left[\cos\frac{\Theta_k t}{\omega}-i\sin\frac{\Theta_k t}{\omega}\right]\times$$
$$\times\left[\Psi_1(t)-i\Psi_2(t)\right],$$

где $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ — действительны и имеют период ω.

В случае, когда не все показатели элементарных делителей равны единице, имеет место утверждение, дающее возможность построить общее решение: если ρ_0 – корень характеристического уравнения $D(\rho) = 0$ кратности l_0 и если этому корню соответствуют элементарные делители

$$(\rho-\rho_0)^{l_0}, (\rho-\rho_0)^{l_1}, \ldots, (\rho-\rho_0)^{l_n},$$

то ρ_0 соответствуют l_0 линейно независимых решений, разбитых на подгруппы Гамбургера, что соответствует $\nu+1$ подгруппе, причем решения

$$X_1^{(S)}, X_2^{(S)}, \ldots, X_{l_S}^{(S)},$$

принадлежащие подгруппе, соответствующей элементарному делителю

$$(\rho-\rho_0)^{l_S} \quad (S=0,1,\ldots,\nu),$$

характеризуются тем, что

$$X_1^{(S)}(t+\omega)=\rho_0 X_1^{(S)}(t),$$
$$X_2^{(S)}(t+\omega)=\rho_0 X_2^{(S)}(t)+\rho_0 X_1^{(S)}(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{l_S}^{(S)}(t+\omega)=\rho_0 X_{l_S}^{(S)}(t)+\rho_0 X_{l_S-1}^{(S)}(t),$$
$$S=0,1,\ldots,\nu.$$

Необходимым и достаточным условием существования периодического решения уравнения (1) будет равенство единице хотя бы одного из корней характеристического уравнения $D(\rho) = 0$.

Периодические решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$P_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+P_n(t)x=f(x), \quad (4)$$

где функции $P_0(t)$, $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$, $f(t)$ определены в области $(-\infty, +\infty)$, непрерывны и имеют период $\omega\left[\dot{\omega}>0\right]$,

$$P_0 > 0;$$
$$P_k(t+\omega) = P_k(t), \quad k = 0, 1, ..., n;$$
$$f(t+\omega) = f(t).$$

Найдем решение уравнения (4). Пусть $\varphi_0(t)$ – частное решение этого уравнения, а $X_1(t)$, $X_2(t)$,….., $X_n(t)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (1). Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + ... + C_nX_n(t) + \varphi_0(t),$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Поскольку $\varphi_0(t+\omega)$ – решение (4), то существуют β_1, β_2, β_3, ..., β_n, такие, что

$$\varphi_0(t+\omega) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k(t) + \varphi_0(t).$$

Если все $\beta_k = 0$ при всех k, то $\varphi_0(t)$ — периодическое решение уравнения (4).

В общем случае, выражая $X_1(t+\omega)$, $X_2(t+\omega)$, ….., $X_n(t+\omega)$ через $X_1(t)$, $X_2(t)$,….., $X_n(t)$, получим

$$\varphi(t+\omega) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t+\omega) + \varphi_0(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i a_{i,k} + \beta_k \right] X_k(t) + \varphi_0(t),$$

а потому решение $\varphi(t)$ периодично тогда, когда существует соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i + \beta_k = c_k \quad (k = 1, 2, ..., n), \tag{5}$$

т. е. C_n должны быть решениями системы (5), и определитель этой системы отличен от нуля, если ни один из корней характеристического однородного уравнения (1) не равен единице, т. е. однородное уравнение не имеет решений с периодом ω.

Следовательно, если однородное уравнение (1) не имеет решений с периодом ω, то уравнение (4) имеет одно и только одно решение с периодом ω.

Если же уравнение (1) имеет решение с периодом ω, то либо уравнение (4) не имеет периодических решений, либо оно имеет бесконечное множество таких решений в зависимости от того, является ли система (5) несовместимой или же она имеет бесконечное множество решений. В этом случае говорят о явлении резонанса.

Уравнение Матье в задачах волнового движения с эллиптическими граничными условиями

К уравнениям Матье можно свести трехмерные задачи, в которых граница представляет собой цилиндр эллиптического сечения, то же уравнение возникает и в ряде других задач.

Эти задачи имеют одно свойство общего характера: линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. В качестве стандартного вида дифференциального уравнения Матье возьмем

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha + \beta\cos 2x)y = 0. \tag{6}$$

Это уравнение можно привести к более привычной форме с алгебраическими коэффициентами, если сделать замену

$$Z = \cos^2 x,$$

то уравнение (6) преобразуется в уравнение

$$4z(1-z)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(1-2z)\frac{dy}{dx} + [\alpha + \beta(2z-1)]y = 0.$$

Поскольку x в (6), как правило, имеет угловую меру, то в этом случае необходимо, чтобы решение $y(x)$ было периодическим с периодом 2π. Для произвольных α и β это невозможно.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два независимых решения то, следовательно, их можно представить в виде линейной комбинации $y_1(x)$ и $y_2(x)$

$$y_1(x+2\pi) = A_{11}y_1(x) + A_{12}y_2(x);$$
$$y_2(x+2\pi) = A_{12}y_1(x) + A_{22}y_2(x).$$

Теорема Флоке утверждает, что существует такое решение $y(x)$, что

$$y(x+2\pi) = ky(x), \tag{7}$$

где k — константа.

Пусть $y(x) = C_1 + y_1(x) + C_2y_2(x)$, тогда

$$y(x+2\pi) = (C_1A_{11} + C_2A_{12})y_1(x) +$$
$$+ (C_1A_{21} + C_2A_{22})y_2(x).$$

Следуя (7), получим

$$C_1A_{11} + C_2A_{12} = kC_1,$$
$$C_1A_{21} + C_2A_{22} = kC_2.$$

Поскольку $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, а k — собственное значение матрицы $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, то $AC = kC$.

Такие собственные векторы и собственные значения всегда можно найти.

Пусть

$$k = \exp(2\pi\mu); \quad \mu = \frac{1}{2\pi}\ln k,$$

определим

$$\varphi(x) = \exp(-\mu\pi)y(x).$$

Тогда

$$\varphi(x+2\pi) = \exp(-\mu x)\exp(-2\mu\pi)\, y(x+2\pi) = \\ = \exp(-\mu x)\, y(x) = \varphi(x).$$

Теорема Флоке утверждает, что можно всегда найти решение уравнения Матье в виде

$$y(x) = \exp(\mu x)\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ имеет период 2π.

Причем, если $\mu = 0$ или кратно i, то $y(x)$ также имеет период 2π; если μ мнимо, то $y(x)$ колеблется апериодически, если μ имеет вещественную часть, то $y(x)$ неустойчиво, т. е. обращается в бесконечность при $x \to +\infty$ или
$x \to -\infty$.

Отметим, что дифференциальное уравнение (6) четно по x, так что наряду с $y(x)$ решением является и $y(-x)$. Общее решение имеет вид

$$y = A\exp(\mu x)\,\varphi(x) + B\exp(-\mu x)\,\varphi(-x); \\ \varphi(x+2\pi) = \varphi(x).$$

Статья поступила в редакцию 12 июня 2004 г.

The differential equations with periodic coefficients in the microwave electrodynamics

I. N. Antonov, A. V. Pivovarov
Saratov State Technical University, Saratov, Russia

G. A. Ovchinnikova
Moscow Air Institute (Technical University), Moscow, Russia

The procedure of application of the Mathieu equations to standartd problems of the microwave electrodynamics is surveyed in the article.

* * *