Физика плазмы и плазменные технологии

УДК 533.95

Реакция плазмы на внесение отрицательно заряженного зонда

В. А. Федоров
ОАО "Радиотехнический институт им. академика А. Л. Минца", Москва, Россия

Определена реакция плазмы на внесение электрически изолированного, проводящего, отрицательно заряженного зонда. Получены точные самосогласованные аналитические решения нелинейной системы уравнений гидродинамики ионов плазмы, с нестационарными поглощающими граничными условиями на проводящей поверхности зонда. Найдены величины напряженности электрического поля, скорости и концентрации ионов в зависимости от начального положения частицы и расстояния. Исследована динамика ионов в окрестности зонда.

Внесение внешних электрических зарядов в нейтральную плазму делает ее заряженной и приводит к тому, что плазма стремится экранировать данные заряды, т. е. создать в объеме, содержащем нескомпенсированные заряды, квазинейтральную систему [1]. Таким образом в окрестности внешних электрических зарядов образуется область пространственного заряда размером R_c. При внесении в плазму электрического зонда, заряженного отрицательно относительно плазмы $Q_0(t) < 0$, электроны плазмы начнут покидать область в окрестности зонда, а ионы плазмы двигаться по направлению к его поверхности. Пренебрегая смещением ионов за время образования области R_c, ввиду их большой массы по сравнению с массой электронов, а также последующим процессом релаксации электронов [2], можно считать, что в области R_c остается слой ионов, из которого полностью “выметены” электроны. Причем заряд ионов в слое будет равен $|Q_0(0)|$. В этот момент времени, который обозначим $t = 0$, в системе зонд — слой ионов наступает равновесное состояние.

Основная система уравнений

Рассмотрим электрически изолированный зонд с характерным размером R_0 и проводящей поверхностью S_0, помещенный в плазму. Положим, что при $t = 0$ на S_0 мгновенно возникает заряд $Q_0(0) < 0$ с поверхностной плотностью $\sigma_0(0)$, а электроны без запаздывания покидают плазменный слой толщиной Δ, примыкающий к зонду. Пусть заряд ионов $Q_i(0)$ в слое таков, что справедливо равенство $Q_0(0) + Q_i(0) = 0$. Отсюда по теореме Гаусса следует, что электрическое поле дальше границы области $R_c = R_0 + \Delta$, где R_0 — точка контакта поверхности зонда и слоя ионов, не проникает. Считая движение ионов одномерным, данное равенство представим следующим образом:

$$\sigma_0(t)R_0^k + |e| \int_{R_0}^{R_c} n_i(R,t)R^k dR = 0, \qquad (1)$$

здесь R_0, R_c — расстояния границ слоя ионов от начала координат;

$k = 0, 1, 2$ в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрии, соответственно;

$n_i(R, t)$ — концентрация ионов;

e — заряд электрона;

$R_0 \le R \le R_c$, R — радиус точки пространства.

Отметим, что равенство (1) выполняется для $t \ge 0$ и представляет собой интеграл движения.

Для исследования динамики ионов, с учетом сделанных выше замечаний, воспользуемся системой уравнений одножидкостного гидродинамического приближения холодной плазмы [3], которую в одномерном случае запишем следующим образом:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial R} + \nu_i V_i = \frac{|e|}{m_i} E; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{R^k}\frac{\partial}{\partial R}(R^k E) = 4\pi |e| n_i; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi |e| n_i V_i, \qquad (4)$$

где $E(R, t) = E_0(R, t) + E_i(R, t)$ — напряженность электрического поля зарядов $Q_0(t)$, $Q_i(t)$;

$V_i(R, t)$, m_i — скорость и масса ионов;

$\nu_i = \text{const}$ — частота столкновений ионов с нейтральными частицами плазмы.

Заметим, что система (2)—(4), представленная в форме Эйлера, описывает нелинейную динамику ионов в самосогласованном поле.

Чтобы система уравнений (2)–(4) стала замкнутой, дополним ее начальными и граничными условиями. С учетом одномерности задачи зададим [4]:

$$V_i(R_*,0)=0,\ \ n_i(R_*,0)=n_i^0 f_i(R_*,0);$$

$$E(R_*,0)=\frac{4\pi}{R_*^k}[\sigma_0(0)R_0^k+|e|\int\limits_{R_0}^{R_*}n_i^0 f_i(R_*,0)R_*^k dR_*];$$

$$V_i(R_0,t)=0,\ \ n_i(R_0,t)=0;$$

$$-\frac{\partial\sigma_0(t)}{\partial t}=|e|\,n_i(R_0+0,t)V_i(R_0+0,t),\ \ E(R_0,t)=4\pi\sigma_0(t);$$

$$E(R_c,t)=0;\ V_i(R_c,t)=0;\ n_i(R_c,t)=n_i^0 f_i(R_c,t),\quad (5)$$

где $R_0 \le R_* \le R_c$, n_i^0 = const — невозмущенная концентрация ионов, $f_i(R, t) \ge 1$.

Решение основной системы уравнений

Интегрируя уравнение (3) по объему слоя ионов и используя теорему Гаусса, найдем

$$E(R,t)=\frac{4\pi}{R^k}[\sigma_0(t)R_0^k+|e|\int\limits_{R_0}^{R}n_i^0 f_i(R,t)R^k dR],\quad (6)$$

где R — конечное положение подвижной границы объема, имеющей при $t = 0$ координату R_*.

Равенство (1) можно представить следующим образом:

$$\sigma_0(t)R_0^k+|e|\int\limits_{R_0}^{R}n_i^0 f_i(R,t)R^k dR=$$

$$=-|e|\int\limits_{R}^{R_c}n_i^0 f_i(R,t)]R^k dR.\quad (7)$$

Принимая во внимание выражение (7), из (6) получим

$$E(R,t)=-\frac{4\pi|e|}{R^k}\int\limits_{R}^{R_c}n_i(R,t)R^k dR=$$

$$=-\frac{m_i}{|e|}\frac{\omega_{0i}^2}{4\pi}\frac{\Psi(R,t)}{R^k},\quad (8)$$

где $\omega_{0i}^2 = 4\pi e^2 n_i^0/m_i$, $\Psi(R,t)=4\pi\int\limits_{R}^{R_c}n_i(R,t)R^k dR$ — функция, соответствующая массовой переменной Лагранжа [5], которая в данном случае определяет число ионов в слое и их заряд $Q_i(t)$ = $=|e|\Psi(R, t)$.

Положим, что траектории различных элементов объемов ионов не пересекаются. Тогда число ионов в объеме, задаваемого координатами (R_c, R_*) и [R_c, $R(t)$], где R_*, $R(t)$ — начальное и конечное положения подвижной границы объема, не меняется с течением времени. Следовательно, имеем [5]

$$\int\limits_{R}^{R_c}n_i(R,t)R^k dR=\int\limits_{R_*}^{R_c}n_i(R_*,0)R_*^k dR_*.\quad (9)$$

Учитывая соотношение (9), выражение (8) запишем в виде

$$E(R_*,R)=-\frac{m_i}{|e|}\frac{C(R_*,k)}{R^k},\quad (10)$$

где $C(R_*,k)=\omega_{0i}^2\int\limits_{R_*}^{R_c}f(R_*,0)R_*^k dR_*$.

Подставляя (10) в уравнение (2), получим

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_i\frac{\partial V_i}{\partial R}+\nu_i V_i=-\frac{C(R_*,k)}{R^k}.\quad (11)$$

Переходя к субстанциональной производной в (11), имеем

$$\frac{d^2R}{dt^2}+\nu_i\frac{dR}{dt}=-\frac{C(R_*,k)}{R^k}.$$

Записывая (3) в переменных Лагранжа, получим уравнение для определения $n_i(R_*, t)$

$$n_i(R_*,R)=\frac{1}{4\pi|e|}\left(k\frac{E}{R}+\frac{\partial E}{\partial R}-\frac{\partial E}{\partial R_*}\frac{1}{\partial R/\partial R_*}\right).\quad (12)$$

Уравнение (11) можно привести к уравнению Абеля второго рода [6]

$$V_i\frac{\partial V_i}{\partial R}+\nu_i V_i=\frac{C(R_*,k)}{R^k}.\quad (13)$$

Если $V_i = 0$, то решение уравнения (13) представим следующим образом

$$V_i(R_*,R)=\sqrt{\frac{C(R_*,k)}{R^k}dR}.\quad (14)$$

Учитывая, что $V_i = dR/dt$, где R — зависящая от времени координата фиксированной частицы среды, и разделяя переменные, из (14) получим

$$t(R_*,R)=\pm\int\limits_{R_*}^{R}\frac{dR}{\sqrt{\frac{C(R_*,k)}{R^k}dR}}.\quad (15)$$

Записывая уравнение (3) в переменных Лагранжа с дальнейшим использованием выражений (10), (15), найдем формулу для определения $n_i(R_*, R)$

$$n_i(R_*,R)=\frac{1}{4\pi|e|}\left(k\frac{E}{R}+\frac{\partial E}{\partial R}-\frac{\partial E}{\partial R_*}\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}\right).\quad (16)$$

Таким образом, выражения (10), (12) и (14)—(16) представляют собой точные аналитические решения самосогласованной, нелинейной системы уравнений гидродинамики [7] ионов с поглощающими, нестационарными граничными условиями на проводящей поверхности зонда для различных случаев симметрии.

Решение основной системы уравнений в случае $\nu_i = 0$, $k = 2$

Полагая в формулах (10), (14), (15) $k = 2$ (сферическая симметрия) и проводя интегрирование, получим

$$E(R_*, R) = -\frac{m_i}{|e|}\frac{C(R_*, k=2)}{R^2}; \qquad (17)$$

$$V_i(R_*, R) = -\sqrt{2\frac{C(R_*, k=2)}{R_*}\left(\frac{R_*}{R}-1\right)}; \qquad (18)$$

$$t(R_*, R) = \pm\int_{R_*}^{R}\frac{dR}{\sqrt{2\frac{C(R_*, k=2)}{R_*}\left(\frac{R_*}{R}-1\right)}}. \qquad (19)$$

Выбор знака перед интегралом в выражении (19) определяется знаком $V_i(R_*, R)$, когда $t \cong 0$ [8]. Поэтому исходя из (18), в (19) оставляем знак минус. Проводя интегрирование в (19), найдем

$$t(R_*, R) = \frac{1}{\sqrt{2C(R_*, k=2)/R_*^3}}\times$$

$$\times\left(\frac{R}{R_*}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}\right). \qquad (20)$$

Записывая уравнение (3) в переменных Лагранжа, определим $n_i(R_*, R)$. Из (3) имеем

$$n_i(R_*, R) = \frac{1}{4\pi|e|R^2}\frac{\partial}{\partial R_*}\left(R^2E\right)\frac{1}{\partial R/\partial R_*}. \qquad (21)$$

Формулу (21) представим следующим образом:

$$n_i(R_*, R) = \frac{1}{4\pi|e|}\left(2\frac{E}{R}+\frac{\partial E}{\partial R}-\frac{\partial E}{\partial R_*}\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}\right). \qquad (22)$$

Принимая во внимание (17) и (20), из (22) получим

$$n_i(R_*, R) = n_i(R_*, 0)\frac{R_*^3}{R^3}1\Bigg/1+\frac{3}{2}\left[1+\frac{\omega_{0i}^2 f(R_*, 0)R_*^3}{3C(R_*, k=2)}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{R}{R_*}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}\right)\frac{R}{R_*}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}. \qquad (23)$$

Приведем теперь формулы, представляющие решение системы (2)—(4) в случае $\nu_i = 0$, $k = 2$ и равномерного распределения $n_i(R_*, 0)$ на отрезке величиной Δ при $f(R_*, 0) = 1$, чтобы сравнить их с формулами, в которых распределение $n_i(R_*, 0)$ не задано в явном виде, а именно с (17), (18), (23). Имеем

$$E(R_*, R) = -\frac{4}{3}\pi|e|n_i^0\left(R_c^3-R_*^3\right)\frac{1}{R^2} = -\frac{Q_i(R_*, R_c)}{R^2}; \qquad (24)$$

$$V_i(R_*, R) = -\omega_{0i}R_*\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{R_c^3}{R_*^3}-1\right)\left(\frac{R_*}{R}-1\right)}; \qquad (25)$$

$$t(R_*, R) = \frac{1}{\omega_{0i}}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1}{(R_c^3/R_*^3-1)}}\times$$

$$\times\left(\frac{R}{R_*}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}\right); \qquad (26)$$

$$n_i(R_*, R) = n_i^0\frac{R_*^3}{R^3}\times$$

$$\times\frac{1-R_*^3/R_c^3}{1-\frac{R_*^3}{R_c^3}+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{R_*}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}\right)\frac{R}{R_*}\sqrt{\frac{R_*}{R}-1}}. \qquad (27)$$

Если в (24)—(27) положить $R_* = R_c$, то из (24), (25), (27) получим граничные условия (5), а (26) дает $t \to \infty$, так как частица в точке R_c покоится.

Исследование динамики ионов в случае $\nu_i = 0$, $k = 2$

Для более подробного изучения динамики ионов в зоне пространственного заряда рассмотрим изменение функций $E(R_*, R)$, $V_i(R_*, R)$, $n_i(R_*, R)$, определяемых формулами (17), (18), (20), (23), соответственно, в зависимости от R_* и R. Из (17) видно, что $E(R_*, R) \sim 1/R^2$ в силу того, что имеет место сферическая симметрия потока ионов. При этом $E(R_*, R)$ является функцией начального положения точки R_* или величины заряда ионов, расположенных в сферическом слое толщиной $(R_c - R_*)$, и расстояния до точки наблюдения R

$$E(R_*, R) = -\frac{m_i}{|e|}\frac{\omega_{0i}^2}{R^2}\int_{R_*}^{R_c}n_i^0 f(R_*, 0)R_*^2dR_*. \qquad (28)$$

Важно отметить, что $Q_0(t)$ не входит в явном виде в выражение (28), определяющее $E(R_*, R)$, так как выполнено условие (1). Если в (28) положить $R_* = R_c$, то $E(R_* = R_c) = 0$, т. е. получим первое граничное условие (5), которое не зависит от времени.

Исследование выражения (18) на экстремум по R показывает, что

$$V_{i\,\max}(R_*, R_0+0) = \left|\sqrt{2\frac{C(R_*, k=2)}{R_*}\left(\frac{R_*}{R_0}-1\right)}\right|. \qquad (29)$$

Таким образом, любая частица, начиная движение из точки R_*, достигает $|V_{i\,\max}(R_*,\ R)|$, когда попадает в точку $R = R_0 + 0$. Если $R_*/R \approx 1$, то, проводя упрощения в (18), имеем

$$V_i(R_*, R) \approx -\frac{1}{R_*}\sqrt{2C(R_*, k=2)(R_* - R)}.$$

При $R_*/R >> 1$ из (18) получим

$$V_i(R_*, R) \approx -\sqrt{2C(R_*, k=2)/R},$$

а из (29) следует

$$V_{i\,\max}(R_*, R_0 + 0) \approx \left|\sqrt{2\frac{C(R_*, k=2)}{R_0}}\right|.$$

Чтобы найти начальную координату R_* частицы, которая достигает наибольшей скорости $|V_{i\,\sup}(R_*,\ R_0)|$ из числа всех частиц, исследуем выражение (18) на экстремум по R_*. Для этого необходимо задать конкретное начальное распределение $n_i\ (R_*,\ 0)$, так как оно входит в (18). Примем, что распределение n_i $(R_*,\ 0)$ равномерное, а $f(R_*,\ 0) = 1$ (25). Приравнивая частную производную по R_* от (25) нулю, получим уравнение, определяющее R_*

$$R_*^4 - \frac{2}{3}R_0R_*^3 - \frac{1}{3}R_0R_c^3 = 0. \qquad (30)$$

Пусть решение уравнения (30) имеет вид $R_* = R_c - \mu$, где $\mu = \mathrm{const} < \Delta$, а $\mu/R_0,\ R_c << 1$, что предполагает слой ионов “тонким”. Подставляя выражение $R_* = R_c - \mu$ в (30), в линейном приближении найдем $\mu \approx \Delta/2$.

Таким образом, решение уравнения (30) в данном приближении запишется как

$$R_* \approx R_c - \Delta/2. \qquad (31)$$

Отсюда следует, что R_* лежит близко к середине слоя ионов. Подставляя выражение (31) в формулу (25), получим

$$V_{i\,\sup}(R_* \approx R_c - \Delta/2, R_0 + 0) \approx$$

$$\approx \left|\omega_{0i}\frac{R_0}{2}\frac{(R_c^2/R_0^2 - 1)}{R_c/R_0}\sqrt{\frac{R_c}{R_0} - 1}\right|.$$

Если рассмотреть начальную стадию движения ионов, когда $R_*/R \approx 1$, то из (23) найдем

$$n_i(R_*, R) \approx n_i\ (R_*, 0)\frac{R_*^3}{R^3}, \qquad (32)$$

т. е. $n_i\ (R_*,\ R) \sim 1/R^3$. Заметим, что формула (32) для концентрации электронов $n_e(R_*,\ R)$ была получена в работе [9], в которой исследовалась динамика расширения сферического сгустка электронов, не скомпенсированного по объемному заряду в плазме и вакууме. Если $R_*/R >> 1$, то (23) можно представить следующим образом:

$$n_e(R_*, R) \approx n_i\ (R_*, 0)\frac{R_*^3}{R^3} \times$$

$$\times 1\Big/ 1 + \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{R_*}}\left[1 + \frac{\omega_{0i}^2 f(R_*, 0)R_*^3}{3C(R_*, k=2)}\right]. \qquad (33)$$

Величина знаменателя в выражении (33) порядка единицы, поэтому и в данном случае характер убывания $n_i\ (R_*,\ R)$ близок к $1/R^3$. Для большей наглядности настоящего положения положим в (33) $f(R_*,\ 0) = 1$. При этом выражение (33) запишем в виде

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0\frac{R_*^3}{R^3} 1\Big/ 1 + \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{R_*}}\left(1 + \frac{1}{R_c^3/R_*^3 - 1}\right).$$

Заключение

Исследована динамика ионов плазменного слоя, примыкающего к проводящей поверхности электрически изолированного, отрицательно заряженного зонда. Получены аналитические, самосогласованные решения нелинейной, одномерной системы уравнений гидродинамики плазмы для ионов с нестационарными поглощающими граничными условиями на поверхности зонда. Найдены величины напряженности электрического поля, скорости и концентрации ионов в зависимости от начального положения частицы и расстояния. Полученные решения дают возможность определить ток ионов на зонд в зависимости от времени или расстояния до поверхности зонда, а также изменение его электрического заряда самосогласованным образом. Данные зависимости позволяют построить переходную характеристику зонда с отрицательным самосогласованным нестационарным зарядом, аналогичной вольт-амперной характеристики зонда Ленгмюра [10], имеющего отрицательное смещение относительно плазмы.

Литература

1. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы. — М.: Высш. шк., 1988. — 424 с.
2. *Shih C. H., Levi E.*// AIAA Journal. 1972. V. 10. № 1. P. 104.
3. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1970. — 208 с.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1983.— 528 с.
5. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971. — 854 с.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
7. *Федоров В. А.*// Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 9. С. 58.
8. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука, 1970. — 448 с.
9. *Федоров В. А.*// РЭ. 2002. Т. 47. №. 1. С. 103.
10. *Алексеев Б. В., Котельников В. А., Новиков В. Н.*// ТВТ. 1980. Т. 18. № 5. С. 1062.

Статья поступила в редакцию 6 октября 2005 г.

The reaction of plasma on the potential probe with negative electric charge

V. A. Fedorov
Mints Radio Engineering Institute Joint Stock Company, Moscow, Russia

The reaction of plasma on the potential probe with negative electric charge is determined. Analytical self-consistent solutions to the system of plasma hydrodynamic equations are obtained. The solutions satisfy nonstationary absorbing boundary conditions imposed on the potential probe surface. The electric-field intensity and the ion velocity, concentration, and current density that depend on the initial position of a particle and distance are found. The dynamics of the ions in the vicinity of the potential probe has been investigated.

УДК 533.9

Исследование индуктивного ВЧ-разряда как самосогласованной системы

Часть IV.* Результаты исследования эквивалентного сопротивления индуктивного ВЧ-разряда низкого давления без магнитного поля

А. Ф. Александров, Г. Э. Бугров, К. В. Вавилин, И. Ф. Керимова, Е. А. Кралькина, В. Б. Павлов, В. Ю. Плаксин
Физический факультет МГУ, Москва, Россия

А. А. Рухадзе
Институт общей физики РАН, Москва, Россия

В четвертой части серии работ на основании измерений эквивалентного сопротивления экспериментально изучена эффективность ввода ВЧ-мощности в индуктивный ВЧ-разряд низкого давления без магнитного поля. Кроме того, проведено сравнение результатов экспериментов с результатами численных расчетов, основанных на теоретических расчетах, полученных ранее.

Настоящая серия статей посвящена анализу особенностей поведения индуктивного ВЧ-разряда как самосогласованной системы, в которой мощность ВЧ-генератора распределяется между двумя каналами: элементами внешней цепи, имеющими активное сопротивление, и плазмой, причем доля мощности, поглощаемая плазмой, зависит от параметров самой плазмы. Во второй части цикла [1] представлены результаты совместного экспериментального исследования параметров плазмы и эффективности поглощения ВЧ-мощности плазмой индуктивного ВЧ-разряда в аргоне при давлениях 1,6—5 мТорр без магнитного поля и при магнитных полях, соответствующих условиям ЭЦР и условиям возбуждения в плазме геликонов и волн Трайвелписа-Голда. Показано, что нелинейная зависимость плотности плазмы от величины магнитного поля является следствием нелинейного поглощения ВЧ-мощности плазмой. В работе [1] и ранее в работах [2—6] показано, что характеристикой способности плазмы поглощать ВЧ-мощность является эквивалентное сопротивление плазмы R_{pl}, которое зависит как от параметров плазмы, так и от геометрических размеров источника плазмы, величины внешнего магнитного поля, типа индуктора. Более того [2—6], закономерности изменения эквивалентного сопротивления с изменением условий эксперимента несут в себе информацию об основных физических механизмах поглощения ВЧ-мощ-ности плазмой. Однако в настоящее время в литературе практически отсутствуют данные по систематическому исследованию эквивалентного сопротивления.

В настоящей работе на основании измерений эквивалентного сопротивления экспериментально изучена эффективность ввода ВЧ-мощности в индуктивный ВЧ-разряд низкого давления без магнитного поля. Кроме

Части I, II и III опубликованы в журнале "Прикладная физика" № 4, 5, 2005 г. и № 1, 2006 г., соответственно.