2. *Cherkassky V. S., Knyazev B. A., Kubarev V. V., Kulipanov G. N., Kuryshev G. L.,Matveenko A. N., Petrov A. K., Popik V. M., Scheglov M. A., Shevchenko O. A., Vinokurov N. A.*// Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2005. V. A 543. P. 102.

3. *Белогорохов А. И., Иванчик И. И., Пономарев С. В., Слынько Е. И., Хохлов Д. Р.*// Письма ЖЭТФ. 1996. Т. 63. № 5. С. 342.

4. *Khokhlov D. R., Ivanchik I. I., Rains S. N., Watson D. M., Piphe J. L.*// Appl. Phys. Lett. 2000. V. 76. №. 20. P. 2835.

5. *Климов А. Э., Шумский В. Н.*// В кн. "Матричные фотоприемные устройства инфракрасного диапазона". — Новосибирск: Наука, 2001.

6. *Кубарев В. В.*//Квантовая электроника. 1996. Т. 23. № 3. С. 197.

7. *Акимов А. Н., Ерков В. Г., Климов А. Э., Молодцова Е. Л., Супрун С. П., Шумский В. Н.*// ФТП. 2005. Т. 39. № 5. С. 563.

8. *Насыббулин Р. А., Калимуллин Р. Х., Шапкин В. В., Харионовский Ю. С., Джумиго А. М., Бурсиан Э. В.*// ФТТ. 1981. Т. 23. № 1. С. 300.

9. *Burfoot J. C., Taylor G. W.* Polar Dielectrics and Their Applications// The Macmillan Press LTD, 1979 (Барфут Дж., Тейлор Дж. Полярные диэлектрики и их применения. — М.: Мир, 1981).

10. *Белогорохов А. И., Белов А. Г., Неизвестный И. Г., Пусеп Ю. А., Синюков М. П.*// ЖЭТФ. 1987. Т. 92. № 3. С. 869.

11. *Маделунг О.* Теория твердого тела. — М.: Наука, 1980. [Пер. с нем. *Madelung O.* Festkorpertheorie I, II. (Berlin, Springer-Verlag, N.Y., Heidelberg, 1972)].

12. *Takaoka S., Hamaguchi T., Shimomura S., Murase K.*// Solid State Communications. 1985. V. 54. № 1. P. 99.

13. *Klimov A. E., Shumsky V. N.*// Proc. SPIE. 2003. V. 5126. P. 341.

Статья поступила в редакцию 15 июля 2006 г.

Sensitivity of $Pb_{1-x}Sn_xTe$ films in submillimeter spectral range

A. N. Akimov, A. E. Klimov, I. G. Neizvestny, V. N. Shumsky
Institute of Physics of Semiconductors, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

V. V. Kubarev
Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

O. V. Smolin
FSU “Alfa”, Moscow, Russia

E. V. Susov
FSU “Sapfir”, Moscow, Russia

At T = 4.2 K the sensitivity of $Pb_{1-x}Sn_xTe$:In films was investigated in submillimeter (THz) spectral range. It was found that the current increased under illumination by the laser (λ = 336.8 μm) as well as by the low temperature blackbody with $T_{BB} \geq 20$ K. The nature of photocurrent appearance and the prospects of the THz image visualization using $Pb_{1-x}Sn_xTe$:In based photodetectors are considered.

УДК 621.383

Новый метод численного моделирования стационарных флуктуационных явлений в полупроводниковых структурах и приборах

А. Ю. Селяков
ФГУП «НПО "Орион"» — Государственный научный центр РФ, Москва, Россия

На основе модификации метода Ланжевена предложен новый метод численного моделирования стационарных флуктуационных явлений в полупроводниковых структурах и приборах. Основная система уравнений предложенного метода представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для расчета корреляторов флуктуаций концентраций подвижных носителей и токов, обусловленных как случайным характером процессов генерации—рекомбинации, так и случайным характером процессов рассеяния, а не

систему стохастических дифференциальных уравнений. Результаты численного расчета спектральной плотности шума тестового n^+-p-перехода хорошо совпадают с аналитическим решением.

Наиболее последовательным среди существующих математических методов анализа флуктуационных явлений в полупроводниковых структурах и приборах [1] является метод Ланжевена [2—9]. В рамках данного метода флуктуации концентраций подвижных носителей и плотностей токов, даже в одномерном случае представляющие собой анизотропные случайные поля, анализируются на основе линеаризованных уравнений выбранной для описания рассматриваемой полупроводниковой структуры модели явлений переноса [10], в которые введены так называемые случайные источники, соответствующие случайному характеру процессов генерации, рекомбинации и рассеяния. При этом метод Ланжевена позволяет строго учитывать граничные условия различного вида, в том числе и стохастические. Однако даже для одномерных стационарных уравнений диффузионно-дрейфового приближения аналитическое решение можно найти только при выполнении условий, допускающих серьезные упрощения исходной системы уравнений (малое отклонение от термодинамического равновесия, кусочно-однородное распределение легирующей примеси и т. д.) [11]. В большинстве практически важных случаев рассчитать электрофизические и фотоэлектрические характеристики полупроводниковых приборов и получить связь этих характеристик с параметрами технологического процесса изготовления прибора можно только методами численного моделирования [12]. Аналитическое решение системы стохастических дифференциальных уравнений, возникающих при анализе шумов в полупроводниковых приборах, методом Ланжевена также возможно в ограниченном числе случаев [7—9].

Получить решение (реализацию случайного поля) системы стохастических дифференциальных уравнений можно методом Монте-Карло. Однако для расчета имеющих физический смысл и представляющих практический интерес моментов случайных полей необходимо иметь достаточное количество их реализаций (проводить усреднение по достаточно большому ансамблю), что обусловливает большой объем расчетов при моделировании флуктуационных явлений по данному методу. Кроме того, для решения системы ланжевеновских стохастических дифференциальных уравнений методом Монте-Карло необходим значительный объем априорной информации, в частности, необходимо задать законы распределения случайных источников, в то время как обычно известны только их корреляторы [3, 7—9].

Таким образом, разработка новых численных методов моделирования флуктуационных явлений является актуальной проблемой. В данной работе предложен новый метод численного моделирования стационарных флуктуационных явлений в полупроводниковых структурах и приборах, являющийся по существу модификацией метода Ланжевена, основная система уравнений которого представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для расчета пространственных и временных корреляторов флуктуаций концентраций подвижных носителей и токов, обусловленных случайным характером процессов генерации, рекомбинации и рассеяния, а не систему стохастических дифференциальных уравнений.

Аппроксимация случайного поля

Для простоты и наглядности изложим основную идею предложенного метода моделирования флуктуационных явлений на примере расчета спектральной плотности флуктуаций генерационно-рекомбинационного шума в рамках одномерной модели обратносмещенного $(q|V| \geq 3kT)$ *n*+-*p*-перехода с короткой (меньшей диффузионной длины неосновных носителей) базой и блокирующим контактом. Рассмотрим хорошо изученный случай, когда темновой ток определяется процессами генерации—рекомбинации носителей в квазинейтральных областях (диффузионный механизм темнового тока [13]) и справедлива линейная модель рекомбинации, что даст возможность проверить точность предложенного метода. Диффузионный механизм темнового тока *n*+-*p*-перехода с короткой базой и блокирующим контактом для неосновных носителей проанализирован в монографии [14], а спектральная плотность генерационно-рекомбинационного шума обратносмещенного *p*-*n*-перехода, темновой ток которого определяется диффузионным механизмом, рассчитана методом Ланжевена в работе [7].

Диффузионный ток n^+-*p*-перехода определяется процессами генерации—рекомбинации в квазинейтральной области *p*-типа. Поэтому перенос носителей заряда в данной области можно описать в рамках диффузионно-дрейфовой модели, не включая в нее уравнение перезарядки рекомбинационного уровня

$$\begin{aligned} &\partial p/\partial t = G - R - (1/q)\partial J_p/\partial x;\\ &\partial n/\partial t = G - R + (1/q)\partial J_n/\partial x;\\ &J_p = q\mu_p pE - qD_p\partial p/\partial x;\\ &J_n = q\mu_n nE + qD_n\partial n/\partial x;\\ &\varepsilon\varepsilon_0\partial E/\partial x = \rho, \end{aligned} \qquad (1)$$

где n и p — концентрации электронов и дырок, соответственно;

J_n, J_p — плотности электронного и дырочного тока, соответственно;

G — скорость генерации электронно-дырочных пар, обусловленная внешним воздействием;

$R = r - g_h = \Delta n/\tau = \Delta p/\tau$ — эффективная скорость рекомбинации;

r — скорость рекомбинации;

g_h — скорость тепловой генерации;

$\Delta n = n - n_0$, $\Delta p = p - p_0$ — концентрации неравновесных электронов и дырок, соответственно;

n_0 и p_0 — концентрации равновесных электронов и дырок, соответственно;

τ — время жизни неравновесных носителей в p-области;

μ_n, μ_p — подвижности электронов и дырок, соответственно;

D_n, D_p — коэффициенты диффузии электронов и дырок, соответственно;

E — напряженность электрического поля;

ε_0 и ε — абсолютная и относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника, соответственно;

ρ — плотность объемного заряда.

Идея аппроксимации непрерывных функций сеточными, а дифференциальных операторов конечно-разностными при анализе флуктуационных явлений, по видимому, впервые была использована при расчете флуктуаций электромагнитного поля [15]. Применим этот подход для анализа флуктуаций в полупроводниковых приборах и введем в рассматриваемой квазинейтральной области p-типа равномерную сетку с шагом h, а также аппроксимируем неслучайные непрерывные функции $n(x)$ и $p(x)$ сеточными функциями $n(i)$ и $p(i)$, где $i = 1, ..., N$ — номер точки.

Дифференциальные операторы в детерминированных уравнениях непрерывности (1) аппроксимируем конечно-разностными, причем, для того чтобы получить аппроксимацию вторых производных концентраций подвижных носителей центральной разностью, производные в уравнениях непрерывности для электронов и дырок аппроксимируем правым разностным оператором $\partial y/\partial x \simeq \Delta_h y = (y(i+1) - y(i))/h$, а производные в выражениях для плотностей токов — левым разностным оператором $\partial y/\partial x \simeq \nabla_h y = (y(i) - y(i-1))/h$ [16]. В результате уравнения в частных производных (1) трансформируются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\partial p(i)/\partial t = G(i) - (p(i) - p_0)/\tau - (1/q)\Delta_h J_p(i);\\ &\partial n(i)/\partial t = G(i) - (n(i) - n_0)/\tau + (1/q)\Delta_h J_n(i);\\ &J_p(i) = q\mu_p p(i)E(i) - qD_p\nabla_h p(i);\\ &J_n(i) = q\mu_n n(i)E(i) + qD_n\nabla_h n(i);\\ &\varepsilon\varepsilon_0\Delta_h E(i) = \rho(i). \end{aligned} \qquad (2)$$

При записи уравнений (2) мы в явном виде использовали допущение о линейной модели рекомбинации.

Введем в уравнения (2) случайные источники, соответствующие случайному характеру процессов генерации, рекомбинации и рассеяния [7—9], а величины $E(i)$, $n(i)$, $p(i)$, $\rho(i)$, $J_n(i)$ и $J_p(i)$ будем рассматривать как состоящие из детерминированной (стационарной) и случайной частей, соответственно $E(i) = E_s(i) + \delta E(i)$, $n(i) = n_s(i) + \delta n(i)$, $p(i) = p_s(i) + \delta p(i)$, $\rho(i) = \rho_s(i) + \delta\rho(i)$, $J_n(i) = J_{ns}(i) + \delta J_n(i)$ и $J_p(i) = J_{ps}(i) + \delta J_p(i)$. Тогда после исключения детерминированных членов (с учетом выполнения условия квазинейтральности $\rho_s = 0$), получим систему уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned} &\partial\delta p(i)/\partial t = -\delta p(i)/\tau - (1/q)\Delta_h\delta J_p(i) - \gamma_p(i) + \gamma_g(i);\\ &\partial\delta n(i)/\partial t = -\delta n(i)/\tau + (1/q)\Delta_h\delta J_n(i) + \gamma_n(i) + \gamma_g(i);\\ &\delta J_p(i) = q\mu_p p_s(i)\delta E(i) + q\mu_p\delta p(i)E_s(i) -\\ &\quad -qD_p\nabla_h\delta p(i) - qj_p(i);\\ &\delta J_n(i) = q\mu_n n_s(i)\delta E(i) + q\mu_n\delta n(i)E_s(i) +\\ &\quad +qD_n\nabla_h\delta n(i) + qj_n(i);\\ &\varepsilon\varepsilon_0\Delta_h\delta E(i) = \delta\rho(i), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\gamma_n(i)$, $\gamma_p(i)$, $\gamma_g(i)$, $j_n(i)$ и $j_p(i)$ — случайные источники, соответствующие случайному характеру процессов генерации—рекомбинации электронов и дырок, внешней генерации, а также случайному характеру процессов рассеяния электронов и дырок, соответственно, в точке с номером i.

Система обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений (3) полностью эквивалентна системе уравнений Ланжевена в частных производных, полученных на основе уравнений диффузионно-дрейфовой модели [7—9], причем при выводе уравнений (3) мы аппроксимировали дифференциальные операторы конечно-разностными только в детерминированных уравнениях.

Отметим важное обстоятельство. Аппроксимация дифференциальных операторов конечно-разностными в детерминированных уравнениях означает аппроксимацию непрерывных функций сеточными. Соответственно, преобразование системы уравнений Ланжевена в частных производных [7—9] в систему обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений (3) означает переход от описания флуктуаций концентраций подвижных носителей в полупроводниковых структурах посредством анизотропных стационарных случайных полей к описанию посредством конечного множества стационарных случайных процессов, представляющих собой флуктуации концентраций подвижных носителей в точках введенной сетки. Поскольку корреляторы стационарного в широком смысле (в силу конечности имеющих физический смысл моментов) случайного поля для двух произвольных пространственно-временных точек (x_1, t_1) и (x_2, t_2) зависят от t_1 и t_2 только через разность $t_2 - t_1$, стационарные случайные процессы, аппроксимирующие стационарное случайное поле, стационарно связаны друг с другом [17].

В квазинейтральных областях условие электронейтральности $\rho = 0$ ($\Delta n = \Delta p$) справедливо как для средних значений концентраций подвижных носителей, так и для их флуктуаций, т. е. выполняется условие $\delta\rho(i) = 0$ и, следовательно, равенство $\delta n(i) = \delta p(i)$. Из последнего соотношения следует, что в квазинейтральной области флуктуации электрического поля имеют соленоидальный характер, т. е. выполняется условие $\partial\delta E/\partial x \simeq 0$ $(\Delta_h \delta E(i) \simeq 0)$. С другой стороны, из условия электронейтральности для флуктуаций и теоремы Гаусса следует, что напряженность флуктуаций электрического поля на границах рассматриваемой области равна нулю. Тогда из теорем о свойствах гармонических функций [18] следует, что в квазинейтральных областях *p*-*n*-перехода справедливо соотношение $\delta E(i) = 0$. Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае детерминированное электрическое поле и его флуктуации равны нулю, подставим выражения для флуктуаций плотностей токов $\delta J_n(i)$ и $\delta J_p(i)$ в соответствующие уравнения непрерывности для флуктуаций электронов и дырок (3) и применим формулы "разностного дифференцирования" произведения [16]. Затем выполним преобразования, проводимые обычно при выводе уравнения непрерывности в амбиполярной форме [9, 19, 20]. В результате, учитывая, что в рамках принятой линейной модели рекомбинации выполняется равенство $\gamma_n(i) = -\gamma_p(i) = \gamma(i)$, получим систему уравнений Ланжевена в амбиполярной форме

$$\partial\delta n(i)/\partial t = -\delta n(i)/\tau + D_a \Delta_h \nabla_h \delta n(i) + \\ + \gamma(i) + \gamma_g(i) + M_p(i)\Delta_h j_n(i) + M_n(i)\Delta_h j_p(i), \quad (4)$$

где $M_p(i) = \mu_p p_s(i)/(\mu_n n_s(i) + \mu_p p_s(i))$, $M_n(i) = \mu_n n_s(i)/(\mu_n n_s(i) + \mu_p p_s(i))$, $D_a = (n_s + p_s)/(n_s/D_p + p_s/D_n)$ — амбиполярный коэффициент диффузии (в полупроводнике *p*-типа $D_a = D_n$).

Основная система уравнений

Применим к уравнениям системы (4) преобразование Фурье и сгруппируем в левых частях полученных уравнений члены, пропорциональные Фурье-трансформантам флуктуаций концентрации электронов в различных точках, а в правой — Фурье-трансформантам случайных источников

$$(1 + j\omega\tau)\delta n_\omega(i) - L_{Dn}^2 \Delta_h \nabla_h \delta n_\omega(i) = \\ = \tau\left\{\gamma_\omega(i) + \gamma_{g\omega}(i) + M_p(i)\Delta_h j_{n\omega}(i) + M_n(i)\Delta_h j_{p\omega}(i)\right\}, \quad (5)$$

где ω — круговая частота;

$\delta n_\omega(i)$ — Фурье-трансформанта флуктуации концентрации электронов для точки с номером i;

$L_{Dn}^2 = D_n\tau$, $j = \sqrt{-1}$, $\gamma_\omega(i)$, $\gamma_{g\omega}(i)$, $j_{n\omega}(i)$ и $j_{p\omega}(i)$ — Фурье-трансформанты случайных источников, соответствующих случайному характеру тепловой генерации и рекомбинации, внешней генерации, а также случайному характеру рассеяния электронов и дырок, соответственно.

Выше было отмечено, что флуктуации концентрации электронов в различных точках введенной сетки представляют собой стационарные случайные процессы, стационарно связанные друг с другом. Это означает существование для каждой точки сетки с номером i спектральной плотности флуктуаций (СПФ) концентрации электронов $\hat{S}_\omega(i)$, а также существование для каждой пары точек сетки с номерами i и j взаимной спектральной плотности флуктуаций (ВСПФ) концентрации электронов $\hat{S}_\omega(i, j)$. При этом Фурье-трансформанты рассматриваемых стационарных случайных процессов, стационарно связанных друг с другом, связаны с СПФ и ВСПФ соотношениями [2, 21, 22]

$$\left\langle \delta n_\omega(i)\delta n_{\omega'}^*(i) \right\rangle = 2\pi\delta(\omega' - \omega)\hat{S}_\omega(i); \quad (6)$$

$$\left\langle \delta n_\omega(i)\delta n_{\omega'}^*(j) \right\rangle = 2\pi\delta(\omega' - \omega)\hat{S}_\omega(i, j), \quad (7)$$

где * означает комплексное сопряжение;

$\langle ... \rangle$ — усреднение по ансамблю;

$\delta(\omega)$ — дельта-функция.

При этом СПФ концентрации электронов являются действительными величинами $\widehat{S}_\omega(i) = \widehat{S}^*_\omega(i)$, в то время как ВСПФ-концентрации электронов являются комплексными величинами, причем матрица ВСПФ обладает свойством эрмитовой сопряженности $\widehat{S}_\omega(i,\ j) = \widehat{S}^*_\omega(j,\ i)$ [4, 17, 22]. СПФ случайных источников равны [7—9]

$$S_{\gamma\omega} = 2(g_{Ts} + r_s)\delta(r - r') = 2((n_s + n_0)/\tau)\delta(r - r'); \quad (8)$$

$$S_{G\omega} = 2G\delta(r - r'); \quad (9)$$

$$S_{jn\omega} = 4D_n n_s \delta(r - r'); \quad (10)$$

$$S_{jp\omega} = 4D_p p_s \delta(r - r'), \quad (11)$$

где $S_{\gamma\omega}$, $S_{G\omega}$, $S_{jn\omega}$, $S_{jp\omega}$ — СПФ, соответствующие случайному характеру процессов тепловой генерации и рекомбинации, внешней генерации, а также случайному характеру рассеяния электронов и дырок, соответственно (причем между СПФ и Фурье-трансформантами соответствующих случайных источников справедливы соотношения, подобные соотношению (6)).

Отметим, что в выражениях (8)—(11) фигурируют СПФ, определенные по положительным частотам. Вместе с тем действительная и мнимая части ВСПФ стационарно связанных случайных процессов являются четной и нечетной функциями частоты, соответственно: $\mathrm{Re}(\widehat{S}_{-\omega}(i,j)) = \mathrm{Re}(\widehat{S}_\omega(i,j))$ и $\mathrm{Im}(\widehat{S}_{-\omega}(i,j)) = -\mathrm{Im}(\widehat{S}_\omega(i,j))$ [4, 17]. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только положительные частоты и определим СПФ-концентрации электронов на положительных частотах и ВСПФ-концентрации электронов в различных точках на положительных частотах соотношениями $S_\omega(i) = 2\widehat{S}_\omega(i)$, $\mathrm{Re}(S_\omega(i,j)) = 2\mathrm{Re}(\widehat{S}_\omega(i,j))$ и $\mathrm{Im}(S_\omega(i,j)) = 2\mathrm{Im}(\widehat{S}_\omega(i,j))$, соответственно.

Выполним следующее преобразование: в системе уравнений (5) распишем в явном виде конечно-разностный оператор, умножим полученную систему на комплексно-сопряженную, усредним и сократим общие множители. В результате получим детерминированную систему линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными величинами являются СПФ и ВСПФ $S_\omega(i)$ и $S_\omega(i, j)$, состоящую из уравнений двух типов. Уравнения первого типа (будем называть их ij-уравнения) получаются путем преобразования уравнений системы (5), соответствующих разным точкам сетки с номерами $i \neq j$, причем вследствие дельта-коррелированности СПФ случайных источников (8)—(11) правые части этих уравнений будут равны нулю. После выделения действительной и мнимой частей ij уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
\left(1 + \omega^2\tau^2 + 4L_{Dn}^2 h^{-2} + 4L_{Dn}^4 h^{-4}\right)\mathrm{Re}(S_\omega(i,j)\big) - \\
-(L_{Dn}^2 h^{-2} + 2L_{Dn}^4 h^{-4})\left\{\mathrm{Re}\left(S_\omega(i+1,j)\right) + \mathrm{Re}(S_\omega\left((i-1,j)\right) + \right. \\
\left. + \mathrm{Re}\left(S_\omega(i,j+1)\right) + \mathrm{Re}\left(S_\omega(i,j-1)\right)\right\} - \omega\tau L_{Dn}^2 h^{-2} \times \\
\times\left\{\mathrm{Im}\left(S_\omega(i+1,j)\right) + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1,j)\right) - \right. \\
\left. -\mathrm{Im}\left(S_\omega(i,j+1)\right) - \mathrm{Im}\left(S_\omega(i,j-1)\right)\right\} + \\
+L_{Dn}^4 h^{-4}\left\{\mathrm{Re}\left(S_\omega(i+1,j+1)\right) + \mathrm{Re}\left(S_\omega(i-1,j-1)\right) + \right. \\
\left. + \mathrm{Re}\left(S_\omega(i-1,j+1)\right) + \mathrm{Re}\left(S_\omega(i+1,j-1)\right)\right\} = 0.
\end{gathered} \quad (12)$$

$$\begin{gathered}
(1 + \omega^2\tau^2 + 4L_{Dn}^2 h^{-2} + 4L_{Dn}^4 h^{-4})\mathrm{Im}\left(S_\omega(i,j)\right) - \\
-(L_{Dn}^2 h^{-2} + 2L_{Dn}^4 h^{-4})\left\{\mathrm{Im}\left(S_\omega(i+1,j)\right) + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1,j)\right) + \right. \\
\left. + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i,j+1)\right) + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i,j-1)\right)\right\} + \\
+\omega\tau L_{Dn}^2 h^{-2}\left\{\mathrm{Re}\left(S_\omega(i+1,j)\right) + \mathrm{Re}\left(S_\omega(i-1,j)\right) - \right. \\
\left. -\mathrm{Re}\left(S_\omega(i,j+1)\right) - \mathrm{Re}\left(S_\omega(i,j-1)\right)\right\} + \\
+L_{Dn}^4 h^{-4}\left\{\mathrm{Im}\left(S_\omega(i+1,j+1)\right) + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1,j-1)\right) + \right. \\
\left. + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1,j+1)\right) + \mathrm{Im}\left(S_\omega(i+1,j-1)\right)\right\} = 0.
\end{gathered} \quad (13)$$

Уравнения второго типа получаются путем рассмотренного выше преобразования уравнений системы (5), соответствующих одной и той же точке сетки с номером i (ii-уравнения). Однако вследствие дельта-коррелированности СПФ случайных источников (8)—(11) правая часть каждого полученного таким образом ii-уравнения оказывается пропорциональной величине $\delta(0)$, что крайне неудобно. Получим ii-уравнения другим способом, для чего рассмотрим две системы уравнений (5), полученные путем аппроксимации на двух малоразличающихся сетках (у которых точки с одинаковым номером i имеют координаты x_i и x'_i, отличающиеся на крайне малую величину $|x_i - x'_i| << h$). Перемножим комплексно-сопряженные уравнения рассматриваемых систем, относящихся к точкам с одинаковыми номерами i, усредним и сократим общие множители. Правые части полученных таким образом ii'-уравнений будут содержать слагаемые, пропорциональные СПФ случайных источников (8)—(11). Затем проинтегрируем каждое ii'-уравнение по нормировочной площади A (по координатам y и z) и по малой окрестности соответствующей точки сетки $x_i \pm \sigma$ ($|x_i - x'_i|) < \sigma < h/2$). При этом интеграл от левой части ii'-уравнения будет равен левой части ii-уравнения, умноженной на величину $2\sigma A$, а интеграл от дельта-функции $\delta(r - r')$ в выражениях для корреляторов случайных источников, соответствующих случайному характеру генерации и рекомбинации (8) и (9) по объему $2\sigma A$, равен единице. Рассчитаем СПФ производных случайных источников, соответствующих случайному характеру рассеяния электронов и дырок $S_{\Delta_h j_n}$ и $S_{\Delta_h j_p}$, соответственно. Распишем в корреляторах $\left\langle \Delta_h j_{n\omega}(i)\Delta_h j^*_{n\omega}(i)\right\rangle$ и $\left\langle \Delta_h j_{p\omega}(i)\Delta_h j^*_{p\omega}(i)\right\rangle$ правые конечно-разностные операторы и воспользуемся соотношениями (6), (10) и (11). Затем проинтегрируем выражения, получившиеся для СПФ производных случайных источников по объему $2\sigma A$ и получим

$$\begin{aligned} S_{\Delta_h j_n} &= 4D_n h^{-2}(n_s(i+1)+n_s(i)); \\ S_{\Delta_h j_p} &= 4D_p h^{-2}(p_s(i+1)+p_s(i)). \end{aligned} \tag{14}$$

После соответствующих подстановок и элементарных преобразований ii-уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})S_\omega(i)- \\ &-2(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\times \\ &\times\left\{\mathrm{Re}\left(S_\omega(i+1,i)\right)+\mathrm{Re}\left(S_\omega(i,i-1)\right)\right\}- \\ &-2\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\left\{\mathrm{Im}\left(S_\omega(i+1,i)\right)-\mathrm{Im}\left(S_\omega(i,i-1)\right)\right\}+ \\ &+L_{Dn}^4h^{-4}\left\{S_\omega(i+1)+2\mathrm{Re}\left(S_\omega(i+1,i-1)\right)+S_\omega(i-1)\right\}= \\ &=(\sigma A)^{-1}\left\{\tau^2G(i)+\tau(n_s(i)+n_0)+\right. \\ &+2[M_p(i)]^2L_{Dn}^2h^{-2}\tau\left(n_s(i+1)+n_s(i)\right)+ \\ &\left.+2[M_n(i)]^2L_{Dp}^2h^{-2}\tau\left(p_s(i+1)+p_s(i)\right)\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

В результате описанного выше преобразования соответствующей одномерному случаю системы уравнений (5), состоящей например из K уравнений, мы получим K^2 уравнений для определения $K^2 - K$ комплексных (ВСПФ) и K действительных (СПФ) неизвестных. Свойство эрмитовой сопряженности ВСПФ позволяет сократить количество комплексных неизвестных и уравнений в два раза, рассматривая, например, только те ij-уравнения, которые получены путем преобразования уравнений системы (5), соответствующих точкам сетки с номерами $i > j$. Мы рассматриваем действительные и мнимые части комплексных ВСПФ как отдельные неизвестные, и поэтому выделили из каждого комплексного ij-уравнения действительное и мнимое. Сформированная таким образом система уравнений (12), (13) и (15), представляет собой основную систему уравнений предложенного метода моделирования флуктуационных явлений в полупроводниковых структурах и приборах и является действительной совместной системой линейных алгебраических уравнений.

Обоснуем теперь один из вариантов выбора величины σ, которую следует рассматривать как параметр метода. Аппроксимируем дельта-функции в уравнениях (8)—(11) так называемыми "размазанными" дельта-функциями $\delta(x_i - x') \simeq \simeq \delta(x_i - x', a) = a/\left(\pi\left(a^2+(x_i-x')^2\right)\right)$ [23]. Очевидно, что параметр размазки a должен удовлетворять условию $a << h/2$. В свою очередь окрестность σ, по которой проводится интегрирование ii'-уравнения, должна удовлетворять неравенству $h/2 > \sigma >> a$. Таким образом, для величины σ справедлива оценка $h/2 > \sigma > h/6$. В дальнейших расчетах будем принимать величину σ равной среднему арифметическому минимальной и максимальной оценок $\sigma = h/3$.

Формирование линейной системы

Правая граница рассматриваемой квазинейтральной области p-типа ($x = 0$, $i = N$) представляет собой границу раздела с областью пространственного заряда p-n-перехода, а левая граница ($x = -d$, где d — ширина квазинейтральной области, $i = 1$) представляет собой блокирующий контакт для неосновных носителей. Поэтому граничное условие для детерминированных уравнений непрерывности на правой границе рассматриваемой области имеет вид $\Delta n = -n_0$ [14, 24], т. е. представляет собой граничное условие Дирихле, а на левой – $\partial n/\partial x = 0$ [14], т. е. представляет собой граничное условие фон Неймана. Граничное условие $\Delta n = -n_0$ на границе раздела квазинейтральной области с областью пространственного заряда имеет простой физический смысл — все электроны из квазинейтральной p-области, попавшие на границу раздела с областью пространственного заряда, выносятся электрическим полем в n-область, что справедливо как в детерминированном случае, так и для флуктуаций. Отсюда следует, что стохастическое граничное условие на правой границе квазинейтральной области p-типа также представляет собой граничное условие Дирихле $\delta n(0) = 0$ и что соответствующие СПФ равны $S_\omega(N)=0$, $\mathrm{Re}(S_\omega(i,N)) = 0$ и $\mathrm{Im}(S_\omega(i,N)) = 0$.

Таким образом, граничное условие Дирихле на правой границе позволяет исключить из рассмотрения точку с номером $i = N$. Конечно-разностная аппроксимация граничного условия Дирихле в детерминированном случае тривиальна, и полученное в соответствии с ним ii-уравнение для точки с номером $i = N-1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} &(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})S_\omega(N-1)- \\ &-2(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Re}\left(S_\omega(N-1,N-2)\right)+ \\ &+2\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\mathrm{Im}\left(S_\omega(N-1,N-2)\right)+L_{Dn}^4h^{-4}S_\omega(N-2)= \\ &=(\sigma A)^{-1}\left\{\tau^2G(N-1)+\tau(n_s(N-1)+n_0)+\right. \\ &+2[M_p(N-1)]^2L_{Dn}^2h^{-2}\tau\left(n_s(N)+n_s(N-1)\right)+ \\ &\left.+2[M_n(N-1)]^2L_{Dp}^2h^{-2}\tau\left(p_s(N)+p_s(N-1)\right)\right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

а ij-уравнения, соответствующие парам точек с номерами $i = N - 1$ и $2 \le j < N - 1$, определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
&(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,j)\big)-\\
&-(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\big\{\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,j+1)\big)+\\
&+\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,j-1)\big)+\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,j)\big)\big\}+\\
&+\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\big\{\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,j+1)\big)+\\
&+\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,j-1)\big)-\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,j)\big)\big\}+L_{Dn}^4h^{-4}\times\\
&\times\big\{\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,j-1)\big)+\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,j+1)\big)\big\}=0;
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,j)\big)+\\
&+(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\big\{\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,j+1)\big)+\\
&+\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,j-1)\big)+\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,j)\big)\big\}+\\
&+\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\big\{\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,j+1)\big)+\\
&+\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,j-1)\big)-\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,j)\big)\big\}-L_{Dn}^4h^{-4}\times\\
&\times\big\{\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,j-1)\big)+\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,j+1)\big)\big\}=0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Конечно-разностную аппроксимацию граничных условий фон Неймана на левой границе рассматриваемой области в детерминированном случае выполним обычным способом [25]. Полученное в соответствии с данной аппроксимацией ii-уравнение для точки с номером $i = 1$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})S_\omega(1)-\\
&-4(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Re}\big(S_\omega(2,1)\big)-\\
&-4\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\mathrm{Im}\big(S_\omega(2,1)\big)+4L_{Dn}^4h^{-4}S_\omega(2)=\\
&=(\sigma A)^{-1}\big\{\tau^2G(1)+\tau\big(n_s(1)+n_0\big)+\\
&+2[M_p(1)]^2L_{Dn}^2h^{-2}\tau\big(n_s(2)+n_s(1)\big)+\\
&+2[M_n(1)]^2L_{Dp}^2h^{-2}\tau\big(p_s(2)+p_s(1)\big)\big\},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

а ij-уравнения, соответствующие парам точек с номерами $2 \le i < (N-1)$ и $j = 1$, определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
&(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Re}\big(S_\omega(i,1)\big)-\\
&-(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\big\{2\mathrm{Re}\big(S_\omega(i,2)\big)+\\
&+\mathrm{Re}\big(S_\omega(i+1,1)\big)+\mathrm{Re}\big(S_\omega(i-1,1)\big)\big\}+\\
&+\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\big\{2\mathrm{Im}\big(S_\omega(i,2)\big)-\mathrm{Im}\big(S_\omega(i+1,1)\big)-\\
&-\mathrm{Im}\big(S_\omega(i-1,1)\big)\big\}+2L_{Dn}^4h^{-4}\times\\
&\times\big\{\mathrm{Re}\big(S_\omega(i+1,2)\big)+\mathrm{Re}\big(S_\omega(i-1,2)\big)\big\}=0;
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Im}\big(S_\omega(i,1)\big)+\\
&+(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\big\{2\mathrm{Im}\big(S_\omega(i,2)\big)+\mathrm{Im}\big(S_\omega(i+1,1)\big)+\\
&+\mathrm{Im}\big(S_\omega(i-1,1)\big)\big\}+(L_{Dn}^2h^{-2}+\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2})\times\\
&\times\big\{2\mathrm{Re}\big(S_\omega(i,2)\big)-\mathrm{Re}\big(S_\omega(i+1,1)\big)-\mathrm{Re}\big(S_\omega(i-1,1)\big)\big\}-\\
&-2L_{Dn}^4h^{-4}\big\{\mathrm{Im}\big(S_\omega(i+1,2)\big)+\mathrm{Im}\big(S_\omega(i-1,2)\big)\big\}=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Полученное в соответствии с принятыми аппроксимациями граничных условий Дирихле и фон Неймана ij-уравнение, соответствующее точкам с номерами $i = N - 1$ и $j = 1$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,1)\big)-\\
&-(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\times\\
&\times\big\{2\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,2)\big)+\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,1)\big)\big\}+\\
&+\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\big\{2\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,2)\big)-\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,1)\big)\big\}+\\
&+2L_{Dn}^4h^{-4}\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,2)\big)=0;
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1+\omega^2\tau^2+4L_{Dn}^2h^{-2}+4L_{Dn}^4h^{-4})\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,1)\big)+\\
&+(L_{Dn}^2h^{-2}+2L_{Dn}^4h^{-4})\big\{2\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,2)\big)+\\
&+\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,1)\big)\big\}+\omega\tau L_{Dn}^2h^{-2}\times\\
&\times\big\{2\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-1,2)\big)-\mathrm{Re}\big(S_\omega(N-2,1)\big)\big\}-\\
&-2L_{Dn}^4h^{-4}\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,2)\big)=0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Выше было обосновано, что имеет смысл рассматривать только те ij-уравнения, которые получены путем преобразования уравнений системы (5), соответствующих точкам сетки с номерами $i > j$. Покажем, что при определенных соотношениях между номерами точек i и j вследствие эрмитовой сопряженности ВСПФ в полученных ij-уравнениях имеют место вырождение и смена знака некоторых членов. Так, из уравнений (12) и (13) видно, что при выполнении условия $i = j + 1$ выполняются соотношения $\mathrm{Im}\big(S_\omega(i-1,j)\big)=0$ и $\mathrm{Im}\big(S_\omega(i,j+1)\big)=0$. Кроме того, при выполнении условия $i = j + 1$ из уравнения (12) видно, что выполняется равенство $\mathrm{Re}\big(S_\omega(i-1,j+1)\big)=\mathrm{Re}\big(S_\omega(i,j)\big)$, а из уравнения (13) видно, что выполняется равенство $\mathrm{Im}\big(S_\omega(i-1,j+1)\big)=-\mathrm{Im}\big(S_\omega(i,j)\big)$. Из уравнения (13) видно также, что при выполнении условия $i = j + 2$ выполняется соотношение $\mathrm{Im}\big(S_\omega(i-1,j+1)\big)=0$. Из уравнений (17) и (18) видно, что при выполнении условия $j = N + 2$ выполняются соотношения $\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-1,j+1)\big)=0$ и $\mathrm{Im}\big(S_\omega(N-2,j)\big)=0$. Кроме того, при выполнении условия $j = N - 2$ из уравнения (17) видно, что выполняется равенство $\mathrm{Re}\left(S_\omega(N-2, j+1)\right) = \mathrm{Re}\left(S_\omega(N-1, j)\right)$, а из уравнения (18) — выполняется равенство $\mathrm{Im}\left(S_\omega(N-2, j+1)\right) = -\mathrm{Im}\left(S_\omega(N-1, j)\right)$. Из уравнения (18) видно также, что при выполнении условия $j = N-3$ выполняется соотношение $\mathrm{Im}\left(S_\omega(N-2, j+1)\right) = 0$. Из уравнений (20) и (21) видно, что при выполнении условия $i = 2$ выполняются соотношения $\mathrm{Im}\left(S_\omega(i, 2)\right) = 0$ и $\mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1, 1)\right) = 0$. Кроме того, при выполнении условия $i = 2$ из уравнения (20) видно, что выполняется равенство $\mathrm{Re}\left(S_\omega(i-1, 2)\right) = \mathrm{Re}\left(S_\omega(i, 1)\right)$, а из уравнения (21) — выполняется равенство $\mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1, 2)\right) = -\mathrm{Im}\left(S_\omega(i, 1)\right)$ и при выполнении условия $i = 3$ выполняется соотношение $\mathrm{Im}\left(S_\omega(i-1, 2)\right) = 0$.

Спектральная плотность флуктуаций тока

Системы уравнений (12), (13) и (15)—(23) позволяют рассчитать СПФ-концентрации электронов для каждой точки сетки и ВСПФ-концентрации электронов для каждой пары точек сетки, обусловленные случайным характером процессов генерации—рекомбинации и рассеяния. Рассмотрим теперь связь этих величин с СПФ электронного тока в квазинейтральной p-области n^+-p-перехода, где, как было отмечено выше, детерминированное электрическое поле и его флуктуации равны нулю. В этом случае из уравнений (3) следует, что для флуктуации плотности электронного тока в точке с номером i справедливо выражение: $\delta J_n(i) = (qD_n/h)\left(\delta n(i) - \delta n(i-1)\right) + qj_n(i)$. Применим к данному соотношению преобразование Фурье, умножим полученное уравнение на комплексно-сопряженное, усредним и, принимая во внимание соотношения (6) и (7), сократим общие множители. При этом используем тот же прием, связанный с интегрированием по нормировочной площади A и малой окрестности рассматриваемой точки сетки $\pm\sigma$, что и при выводе ii-уравнения. Полученное выражение для СПФ-плотности электронного тока имеет вид

$$\begin{gathered} S_{Jn\omega}(i) = (qD_n/h)^2\{S_\omega(i) + S_\omega(i-1) - 2\mathrm{Re}\left(S_\omega(i, i-1)\right)\} - \\ -2(q^2D_n/h)\{\mathrm{Re}\left(C_{n\omega}(i, i-1)\right) - \\ -\mathrm{Re}\left(C_{n\omega}(i, i)\right)\} + 2q^2D_n n_s(i)/(\sigma A), \end{gathered} \tag{24}$$

где $C_{n\omega}(i, j)$ — ВСПФ случайного источника, соответствующего случайному характеру рассеяния электронов в точке с номером i и флуктуаций концентрации электронов в точке с номером j, определенная по положительным частотам: $\mathrm{Re}\left(C_{n\omega}(i, j)\right) = 2\mathrm{Re}\left(\hat{C}_{n\omega}(i, j)\right)$, $\mathrm{Im}\left(C_{n\omega}(i, j)\right) = 2\mathrm{Im}\left(\hat{C}_{n\omega}(i, j)\right)$, $\left\langle j_{n\omega}(i)\delta n^*_{\omega'}(j)\right\rangle = 2\pi\delta(\omega' - \omega) \times \hat{C}_{n\omega}(i, j)$.

Для построения дополнительной системы линейных алгебраических уравнений, предназначенной для расчета ВСПФ $C_{n\omega}(i, j)$, необходимо умножить массив Фурье-трансформант случайных источников, соответствующих случайному характеру рассеяния электронов в точках сетки с номерами $i = 1...N$, на комплексно-сопряженную систему уравнений (5), а затем выполнить те же преобразования, что и при выводе ii- и ij-уравнений. Таким образом, учет случайного характера процессов рассеяния в рамках предложенного метода обусловливает существенное увеличение объема расчетов по сравнению со случаем, когда флуктуации обусловлены только случайным характером процессов генерации—рекомбинации.

Из уравнения (24) видно, что в случае, когда флуктуации обусловлены случайным характером процессов генерации—рекомбинации, а случайным характером процессов рассеяния можно пренебречь, СПФ-плотности электронного тока определяются соотношением

$$\begin{gathered} S_{Jn\omega}(i) = (qD_n/h)^2\{S_\omega(i) + S_\omega(i-1) - \\ -2\mathrm{Re}\left(S_\omega(i, i-1)\right)\}. \end{gathered} \tag{25}$$

СПФ-плотности полного тока рассматриваемого n^+-p-перехода $S_{J\omega}$ равна СПФ-плотности электронного тока на границе раздела области пространственного заряда и квазинейтральной p-области (в точке с номером $i = N$), т. е. $S_{J\omega} = S_{Jn\omega}(N)$. Подставим в выражение (25) граничное условие, поставленное на правой границе квазинейтральной p-области $S_\omega(N) = S_\omega(N, j) = 0$, и получим, что величина $S_{J\omega}$ определяется соотношением

$$S_{J\omega} = (qD_n/h)^2 S_\omega(N-1). \tag{26}$$

Тестирование метода

На основе предложенного метода рассчитаем СПФ диффузионного тока и фототока обратносмещенного p-n-перехода, обусловленную генерационно-рекомбинационным шумом, и сравним результаты численных расчетов с аналитическим решением. Аналитическое решение стохастического уравнения непрерывности в амбиполярной форме в квазинейтральной p-области обратносмещенного n^+-p-перехода, освещенного со стороны

n^+-области, получено в работе [7], где показано, что СПФ-плотности полного тока такого *p-n*-перехода, определенная по положительным частотам, определяется выражением для дробового шума

$$S_{J\omega} = 2q\eta J_{ph} + 2q(n_0/\tau)L_{Dn},$$

где J_{ph} — плотность потока фотонов, падающих на *p-n*-переход;
η — квантовая эффективность.

Заметим, что результаты работы [7] получены для случая *p-n*-перехода с длинной базой и с омическими контактами, в то время как выше был рассмотрен *p-n*-переход с блокирующим контактом. Тем не менее в силу единственности решения в случае, когда стационарная концентрация электронов в точке $x = -d$ в структуре с блокирующим контактом удовлетворяет условию $n_s(-d) \simeq n_0$, возможно корректное сравнение результатов, полученных для этих двух различных n^+-*p*-структур.

В качестве тестовой структуры выберем n^+-*p*-переход на основе $Cd_xHg_{1-x}Te$ состава $x \simeq 0{,}2$, темновой ток которого при криогенных температурах определяется диффузионным механизмом [26]. Расчеты будем проводить при следующих значениях параметров полупроводника: время жизни $\tau = 10^{-8}$ с, диффузионная длина электронов $L_{Dn} = 3$ мкм, собственная концентрация $n_i = 10^{13}$ см$^{-3}$, концентрация акцепторов в *p*-области $N_a = 10^{16}$ см$^{-3}$. Плотность потока фотонов, падающих на *p-n*-переход, примем равной $J_{ph} = 2{,}5 \cdot 10^{16}\ \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, что соответствует углу зрения на фон $\vartheta = 30°$ и температуре фона 300 К. Величину нормировочной площади примем равной $A = 1$ см^2, значения СПФ будем рассчитывать на частоте $\omega = 10^6$ Гц.

При засветке *p-n*-перехода со стороны n^+-области амбиполярное уравнение непрерывности в квазинейтральной области *p*-типа имеет вид

$$\partial^2 \Delta n/\partial x^2 - \Delta n/L_{Dn}^2 + (\alpha J_{ph}/D_n)\exp(\alpha x) = 0, \quad (27)$$

где α — коэффициент поглощения.

Как было отмечено выше, граничное условие на правой границе квазинейтральной области *p*-типа рассматриваемого n^+-*p*-перехода $x = 0$ имеет вид $\Delta n = -n_0$, а граничное условие на левой границе $x = -d$ — вид $\partial \Delta n/\partial x = 0$. При данных граничных условиях в случае отсутствия засветки решение уравнения (27) определяется выражением

$$n_{sd}(x) = n_0\left(1 - \operatorname{ch}\left((x+d)/L_{Dn}\right)/\operatorname{ch}(d/L_{Dn})\right), \quad (28)$$

а при освещении *p-n*-перехода решение уравнения (27) имеет вид

$$\begin{aligned} n_{sph}(x) &= n_0\{1 - \operatorname{ch}((x+d)/L_{Dn})/\operatorname{ch}(d/L_{Dn})\} + \\ &+ \{\alpha J_{ph} L_{Dn}^2 \operatorname{ch}\left((x+d)/L_{Dn}\right)\}/ \\ &/[D_n(\alpha^2 L_{Dn}^2 - 1)\operatorname{ch}(d/L_{Dn})] + \\ &+ \{\alpha^2 J_{ph} L_{Dn}^3 \exp(-\alpha d)\operatorname{sh}(x/L_{Dn})\}/ \\ &/[D_n(\alpha^2 L_{Dn}^2 - 1)\operatorname{ch}(d/L_{Dn})] - \\ &- \{\alpha J_{ph} L_{Dn}^2 \exp(\alpha x)\}/[D_n(\alpha^2 L_{Dn}^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Из выражений (28) и (29) следует, что квантовая эффективность рассматриваемого *p-n*-перехода $\eta = (D_n/J_{ph})(\partial n_{sph}(x)/\partial x - \partial n_{sd}(x)/\partial x)\big|_{x=0}$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \eta = &\{\alpha L_{Dn}/[D_n(\alpha^2 L_{Dn}^2 - 1)]\}\{\operatorname{th}(d/L_{Dn}) - \\ &- \alpha L_{Dn}(1 - \exp(-\alpha d)/\operatorname{ch}(d/L_{Dn})\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассчитаем сначала СПФ-плотности темнового тока тестового n^+-*p*-перехода, длина квазинейтральной *p*-области которого равна $d = 20$ мкм, что обеспечивает хорошее выполнение условия $n_s(-d) \simeq n_0$. Примем число точек сетки равным $N = 251$, и используя распределение электронов по квазинейтральной области (28), решим системы уравнений (12), (13) и (15)—(23), полагая отличными от нуля только случайные источники, соответствующие случайному характеру процессов генерации—рекомбинации. После этого, используя формулу (26), получим, что СПФ-плотность темнового тока рассматриваемого n^+-*p*-перехода равна $S_{Jd\omega} = 1{,}524 \cdot 10^{-23}\ \text{А} \cdot \text{см}^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$. Расчет по формуле для СПФ дробового шума дает СПФ диффузионного тока $S_{Jdiff\,\omega} = 2q(n_0/\tau)L_{Dn} = 1{,}535 \cdot 10^{-23}\ \text{А} \cdot \text{см}^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$.

Рассчитаем теперь СПФ-плотности полного тока освещенного тестового n^+-*p*-перехода, длина квазинейтральной *p*-области которого равна $d = 30$ мкм. В работе [7] показано, что максимальные пороговые характеристики фотодиода реализуются при выполнении условия $L_{Dn} \gg 1/\alpha$. Для выполнения последнего неравенства примем значение коэффициента поглощения равным $\alpha = 2 \cdot 10^4$ см$^{-1}$, что примерно на порядок превышает экспериментально наблюдаемую величину в $Cd_xHg_{1-x}Te$ состава $x \simeq 0{,}2$. Расчеты показывают, что при принятых значениях величин α и J_{ph} в тестовой структуре обеспечивается хорошее выполнение условия $n_s(-d) \simeq n_0$. Примем число точек сетки равным $N = 251$, и используя распределение электронов по квазинейтральной области (29), решим системы уравнений (12), (13) и (15) – (23), полагая отличными от нуля только случайные источники, соответствующие случайному характеру процессов генерации—рекомбинации. После этого, используя формулу (26), получим, что СПФ-плотности полного тока рассматриваемого n^+-p-перехода равна $S_{J\omega} = 1{,}32 \cdot 10^{-21}\,\text{А} \cdot \text{см}^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$. Расчет по формуле для СПФ дробового шума дает СПФ фототока $S_{J\,ph\,\omega} = 2q\eta J_{ph} = 1{,}1 \cdot 10^{-21}\,\text{А} \cdot \text{см}^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$. Таким образом, результаты численных расчетов СПФ полного тока тестового n^+-p-перехода хорошо совпадают с аналитическим решением.

Заключение

Сформулируем основные особенности предложенного метода моделирования стационарных флуктуационных явлений в полупроводниковых структурах и приборах.

- Предложенный метод по существу является модификацией метода Ланжевена.
- Метод пригоден для моделирования флуктуационных явлений в рамках не только диффузионно-дрейфовой модели, но и любых других моделей явлений переноса.
- Флуктуационные явления рассматриваются по существу в рамках тех же допущений, при которых справедливы детерминированные уравнения выбранной модели явлений переноса. При построении основной системы уравнений метода использовались только дополнительные предположения о спектральных плотностях флуктуаций случайных источников.
- Для расчета пространственных и временных корреляторов флуктуирующих величин в рамках предложенного метода необходимо предварительно получить решение детерминированной системы уравнений выбранной модели явлений переноса. При этом в случае, если решение детерминированной системы получено численными методами, предложенный метод моделирования флуктуационных явлений должен быть адаптирован к способу дискретизации детерминированной системы уравнений.
- В рамках метода могут быть рассчитаны флуктуации токов и концентраций подвижных носителей, обусловленные как случайным характером процессов генерации—рекомбинации, так и случайным характером процессов рассеяния, однако в последнем случае необходим значительно больший объем расчетов.
- Метод допускает любую пространственную корреляцию спектральных плотностей флуктуаций ланжевеновских случайных источников, в том числе дельта-корреляцию. Последняя обусловливает введение параметра метода σ.
- Основная система уравнений представляет собой линейную систему алгебраических уравнений, для решения которой могут быть использованы хорошо известные методы вычислительной математики, а не систему стохастических дифференциальных уравнений.
- Результаты тестовых расчетов показывают высокую точность предложенного метода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05—02—08017).

Литература

1. *Лукьянчикова Н. Б.* Флуктуационные явления в полупроводниках и полупроводниковых приборах. — М.: Радио и связь, 1990. — 296 с.
2. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Случайные процессы. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
3. *Дыкман И. М., Томчук П. М.* Явления переноса и флуктуации в полупроводниках. — Киев: Наукова думка, 1981. — 320 с.
4. *Букингем М.*. Шумы в электронных приборах и системах. – М.: Мир, 1986. — 399 с.
5. *Ван дер Зил А.* Шумы при измерениях. — М.: Мир, 1979. — 292 с.
6. *Ван дер Зил А.* Шум. Источники, описание, измерение. — М.: Сов. радио, 1973. — 229 с.
7. *Неустроев Л. Н., Осипов В. В.*// ФТП. 1981. Т. 15. Вып. 11. С. 2186—2196.
8. *Van Vliet K. M.*// IEEE transactions on electron devices. 1976. ED-23. № 11. P. 1236—1246.
9. *Van Vliet K. M.*// Solid State Electronics. 1970. V. 13. № 5. P. 649—657.
10. *Барыбин А. А.* Волны в тонкопленочных полупроводниковых структурах с горячими электронами. — М.: Наука, 1986. Гл. 1.
11. *Зи. С.* Физика полупроводниковых приборов. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984. Т. 1 — 456 с; Т. 2 — 455 с.
12. *Бубенников А. Н.* Моделирование интегральных микротехнологий, приборов и схем. — М.: Высш. шк., 1989. — 320 с.
13. *Shokley W.*// Bell System Technical Journal. 1949. V. 28. P. 435—489.
14. *Reine M. B., Sood A. K., Tredwell T. J.*// Semiconductors and semimetals. — New York: Academic Press, 1981. V. 18. Ch. 6.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. 1959. Гл. XIII. П. 90.
16. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1983. Гл. 1, 2 .
17. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. — М.: Сов. радио, 1974. Гл. 4.
18. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. Гл. 1.
19. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. — М.: Наука, 1977. Гл. VII.
20. *Смит Р.* Полупроводники. — М.: Мир, 1982. Гл. 7.
21. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982. Гл. 2
22. *Жалуд В., Кулешов В. Н.* Шумы в полупроводниковых устройствах. — М.: Сов. радио, 1977. Гл. 1.
23. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1979. Ч. 1. П. 4.

24. *Bloom I., Nemirovsky Y.*// IEEE. transaction on electron devices. 1991. V. 38. № 8. P. 1792—1796.
25. *Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д.* Численные методы. Использование MATLAB; 3-е изд. — М.: Изд. дом "Вильямс", 2001. Гл. 10.
26. *Bovina L. A., Bourlakov I. D., Ivanov V. Y., Golovin S. V., Mansvetov N. G., Soliakov V. N., Stafeev V. I.*// Proc. SPIE. 1998. V. 3819. P. 2—8.

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2007 г.

A new method of numerical analysis of stationary fluctuation phenomena in the semiconductor structures and devices

A. Yu. Selyakov
Orion Research-and-Production Association, Moscow, Russia

On the basis of modification of the Langevin method a new method of numerical analysis of stationary fluctuation phenomena in the semiconductor structures and devices is proposed. The main system of equations of the method is the system of linear algebraic equations for computation of correlators of fluctuations of concentrations of mobile carriers and currents and not a system of stochastic differential equations. The method take into account both the accidental nature of processes of generation—rekombination, and the accidental nature of scattering processes. Results of numeral computation of spectral density of noise of test n^+-p-junction well agree with the analytical solution.

УДК 621.315.592

Определение времени жизни основных и неосновных носителей заряда в CdHgTe *p*-типа методом фотопроводимости в магнитном поле

Д. Ю. Протасов, В. Н. Овсюк
Институт физики полупроводников СО РАН, г. Новосибирск, Россия

В. Я. Костюченко, В. С. Крылов
Сибирская государственная геодезическая академия, г. Новосибирск, Россия

Определено время жизни основных и неосновных носителей заряда в пленках МЛЭ CdHgTe p-типа при низких температурах. Обнаружено, что фотопроводимость в магнитном поле в геометрии Фарадея ($\mathbf{E}\perp\mathbf{B}||\mathbf{k}$) имеет независящую от магнитного поля составляющую, обусловленную вкладом неравновесных основных носителей (дырок). Этот вклад может составлять до 20 % от амплитуды стационарной фотопроводимости, что приводит к завышению определяемого данным методом значения времени жизни электронов.

Тройной сплав $Cd_xHg_{1-x}Te$ (КРТ), где x — мольное содержание Cd, на сегодняшний день является основным материалом для создания фотоприемных устройств (ФПУ) для среднего (3—5 мкм) и дальнего (8—12 мкм) инфракрасного диапазонов [1]. Большеформатные ФПУ изготовляют преимущественно в виде матриц *n*-*p*-переходов, причем база обычно имеет проводимость *p*-типа. Это связано прежде всего с тем, что технологически легче сформировать область с проводимостью *n*-типа в *p*-типе, чем наоборот. При этом ключевыми параметрами материала, которые необходимо контролировать для получения высококачественных ФПУ, являются время жизни и подвижность неосновных носителей заряда (электронов).

В вакансионном *p*-КРТ для x ~0,22 (λ_c ~10 мкм) время жизни носителей заряда при низких температурах ограничено рекомбинацией Шокли-Рида [2]. В этом случае, как показано в работах [3, 4], значение времени жизни зависит от способа его измерения. При использовании для этой цели метода стационарной фотопроводимости обычно предполагается, что изменение проводимости обусловлено только неравновесными неосновными