Таким образом, в настоящей работе с использованием уравнения Пуассона выведено самосогласованное уравнение для электрического поля амбиполярного потока и получены частные решения этого уравнения.

Авторы выражают благодарность В. П. Шумилину за помощь в работе и Э. А. Перельштейну за полезное обсуждение.

Работа поддержана РФФИ. Гранты № 05-02-08030, № 05-02-16081.

Литература

1. *Schottky W.* Physikalische zeitschrift. 1924. № 25. P. 342.
2. *Грановский В. Л.* Электрический ток в газе. — М.: Наука, 1971.
3. *Райзер Ю. П.* Физика газового разряда. — М.: Наука, Физматлит, 1987.
4. *Чихачев А. С.* Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 6. С. 601—604.

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2006 г.

Structure of an ambipolar stream of breakdown plasma

V. S. Kuleshov, D. N. Novichkov, A. S. Chikhachev
All-Russian Electrotechnical Institute, Moscow, Russia

It is deduced a nonlinear equation for the electric field in low-temperature collisional plasma with streams of charged particles in the form of electrons and heavy positive ions.

УДК 533.9:537.52

Обобщенная модель Томсона высокочастотного индукционного разряда конечной длины

Р. Н. Гайнуллин, А. П. Кирпичников
Казанский государственный технологический университет, г. Казань, Россия

Рассмотрена модель Томсона высокочастотного индукционного разряда конечной длины и получены некоторые важные соотношения для исследования его структуры.

Теории высокочастотного индукционного (ВЧИ) разряда атмосферного давления посвящено в настоящее время большое число работ. Во всех работах, однако, электромагнитное поле в разряде рассматривается лишь в одномерном приближении так называемого “идеального” (в пределе — бесконечно длинного) индуктора, тогда как на практике у большинства высокотемпературных технологических устройств, использующих принцип индукционного нагрева, диаметр индуктора сравним с его длиной. Поэтому представляется полезным на примере достаточно простой физической модели, какой является широко известная каналовая модель Дж. Дж. Томсона, рассмотреть аналитически основные закономерности, присущие квазистационарному электромагнитному полю ВЧИ-разряда конечной длины.

Модель постоянной проводимости, которую можно также называть каналовой моделью ВЧИ-разряда, была в основном завершена Дж. Томсоном в 1926 г. и опубликована годом позже в его известной работе [1]. Сам Томсон рассматривал лишь одномерный вариант теории, нам же для поставленной выше цели существенной представляется именно двухмерная ее постановка. Кроме того, нужно учесть то обстоятельство, что как самого Томсона, так и его последователей (например, авторов работы [2—4]), мало интересовала структура электромагнитного поля ВЧИ-разряда как таковая, закономерности же последнего рассматривались ими при этом обычно лишь с точки зрения возможных физико-технических приложений, касающихся в основном вопросов теплообмена и оптимизации нагрева газа в канале индукционного ВЧ-плазмотрона. Таким образом, нам предстоит продвинуться несколько дальше по пути, указанному Дж. Дж. Томсоном, и, пользуясь его основной идеей, рассмотреть более подробно структуру квазистационарного электромагнитного поля ВЧИ-разряда как в одномерном, так и в двухмерном случае с учетом цилиндрической геометрии последнего.

Одномерная модель Томсона высокочастотного индукционного разряда

Для методологической последовательности изложения кратко остановимся сначала на одномерной модели Томсона. Система уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле ВЧИ-разряда, имеет вид

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E};$$
$$\mathrm{div}\vec{H} = 0; \quad \mathrm{div}\vec{E} = 0, \tag{1}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей;
σ — проводимость в разряде;
c — скорость света в пустоте (в Гауссовой системе единиц).

С учетом цилиндрической симметрии для случая бесконечно длинного плазмоида система уравнений (1) преобразуется к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right) = -\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}; \qquad \frac{\partial H_z}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c}\sigma E_\varphi, \tag{2}$$

где $H_z = H_z(r,t)$ и $E_\varphi = E_\varphi(r,t)$ — мгновенные значения продольного магнитного и азимутального электрического полей, соответственно.

С точки зрения математики основной идеей развитой Томсоном каналовой модели ВЧИ-разряда является введение комплексной записи для характеризующих электромагнитное поле электрических и магнитных величин. При этом уравнения электромагнитного поля переходят в линейные дифференциальные уравнения для комплексных величин, допускающие точные решения, которые можно записать с помощью специальных функций Бесселя и Кельвина.

Следуя Дж. Дж. Томсону, запишем систему максвелловских уравнений, описывающих цилиндрически симметричное электромагнитное поле ВЧИ-разряда (2) для комплексных магнитного $H_z(r,t) = H_z(r)\exp(i\omega t)$ и электрического $E_\varphi(r,t) = E_\varphi(r)\exp(i\omega t)$ полей в разряде. В итоге получим систему уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right) = -\frac{i\omega H_z}{c};$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c}\sigma E_\varphi, \tag{3}$$

в которой $\sigma = \mathrm{const}$,
$H_z(r)$ и $E_\varphi(r)$ — комплексные амплитуды продольного магнитного и азимутального электрического полей, соответственно.

Обозначив ω/c через α, а $4\pi\sigma/c$ — через β, имеем

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{E_\varphi}{r} = i\alpha\beta E_\varphi;$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) = i\beta\alpha H_z$$

или

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} - i\alpha\beta H_z = 0;$$
$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \left(i\alpha\beta + \frac{1}{r^2}\right)E_\varphi.$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющих условию конечности величин H_z и E_φ на оси разряда при $r = 0$, есть, очевидно,

$$H_z(r) = H_0 J_0\left(i\sqrt{i\alpha\beta}r\right) \tag{4}$$

и

$$E_\varphi(r) = E_0 J_1\left(i\sqrt{i\alpha\beta}r\right), \tag{5}$$

где $H_0 = \bar{H}_0 + i\bar{\bar{H}}_0$;
$E_0 = \bar{E}_0 + i\bar{\bar{E}}_0$;
$J_{0,1}$ — функции Бесселя комплексного аргумента, соответственно, нулевого и первого порядков.

Рассмотрим сначала выражение (4) для $H_z(r)$. Расписывая эту формулу через ее действительную и мнимую части, найдем

$$H_z(r) = \left(\bar{H}_0 + i\bar{\bar{H}}_0\right)\left[\mathrm{ber}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right) + i\,\mathrm{bei}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right], \tag{6}$$

где ber и bei — функции Кельвина первого рода нулевого порядка.

Как известно [5, 6], в точке $r = 0$ ber(0) = 1, а bei(0) = 0.

В таком случае из формулы (6) получаем

$$H_z(r=0)=\bar{H}_0+i\bar{\bar{H}}_0,$$

так что физические амплитуда $H_z^a(0)$ и фаза $\varphi_{H_z}(0)$ магнитного поля на оси разряда будут, соответственно,

$$H_z^a(r=0)=\sqrt{\bar{H}_0^2+\bar{\bar{H}}_0^2} \qquad (7)$$

и

$$\varphi_{H_z}(r=0)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{\bar{H}}_0}{\bar{H}_0}\right). \qquad (8)$$

Отсюда, подставляя в формулу (8) граничные условия $H_z^a(0)=\mathrm{const}$ и $\varphi_{H_z}(0)=\frac{\pi}{2}$, установим окончательно, что $\bar{H}_0=0$ и $\bar{\bar{H}}_0=H_z^a(0)$.

В итоге формула для комплексной напряженности аксиального магнитного поля запишется в следующем виде:

$$H_z(r)=H_z^a(0)\left[-\mathrm{bei}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\,\mathrm{ber}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]. \qquad (9)$$

Для амплитуды и фазы физического магнитного поля в разряде тогда по определению имеем

$$H_z^a(r)=H_z^a(0)\sqrt{\mathrm{ber}^2\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\mathrm{bei}^2\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)};$$

$$\varphi_{H_z}(r)=\operatorname{arctg}\left[-\frac{\mathrm{ber}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)}{\mathrm{bei}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)}\right].$$

Рассмотрим теперь в рамках модели Томсона поведение азимутального электрического поля в ВЧИ-разряде. В общем виде радиальная зависимость комплексной величины $E_\varphi(r)$ определяется в этом случае формулой (5). Проще всего, однако, непосредственно получить выражение для $E_\varphi(r)$, используя исходную форму уравнений Максвелла (3). Тогда, подставляя в первое из уравнений этой системы соотношение (9) для $E_\varphi(r)$, найдем

$$E_\varphi(r)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,H_z^a(0)\left[\mathrm{bei}'\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-i\,\mathrm{ber}'\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right],$$

т. е.

$$E_\varphi(r)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\;H_z^a(0)\times$$
$$\times\sqrt{\left[\mathrm{bei}'\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]^2+\left[\mathrm{ber}'\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]^2};$$

$$\varphi_{E_\varphi}=\operatorname{arctg}\left[-\frac{\mathrm{ber}'\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)}{\mathrm{bei}'\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)}\right],$$

или, пользуясь известными соотношениями $\mathrm{ber}'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{ber}_1+\mathrm{bei}_1\right)$, $\mathrm{bei}'=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{ber}_1+\mathrm{bei}_1\right)$,

$$E_\varphi^a(r)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}H_z^a(0)\sqrt{\mathrm{ber}_1^2\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\mathrm{bei}_1^2\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)} \qquad (10)$$

и

$$\varphi_{E_\varphi}(r)=\operatorname{arctg}\left[\frac{\mathrm{ber}_1(\sqrt{\alpha\beta}r)+\mathrm{bei}_1(\sqrt{\alpha\beta}r)}{\mathrm{ber}_1(\sqrt{\alpha\beta}r)-\mathrm{bei}_1(\sqrt{\alpha\beta}r)}\right].$$

Двухмерная модель Томсона высокочастотного индукционного разряда

Двухмерную томсоновскую модель электромагнитного поля ВЧИ-разряда будем строить по аналогии с одномерной моделью, рассмотренной выше.

Система уравнений Максвелла (1) с учетом цилиндрической симметрии разряда для случая индуктора конечной длины может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t};\\
&\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial H_r}{\partial z};\\
&\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\sigma E_\varphi;\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_r\right)+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.
\end{aligned} \qquad (11)$$

В этих уравнениях $H_r\left(r,z,t\right)$ — радиальная компонента магнитного поля в разряде.

Уравнения (11) распишем теперь для комплексных величин $H_z(r,z,t)=H_z(r,z)\exp(i\omega t)$; $H_r(r,z,t)=H_r(r,z)\exp(i\omega t)$ и $E_\varphi(r,z,t)=$ $=E_\varphi(r,z)\exp(i\omega t)$, описывающих магнитное и электрическое поля в разряде. В итоге получим систему для комплексных амплитуд

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)=-\frac{i\omega}{c}H_z; \qquad (12)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial r}-\frac{\partial H_r}{\partial z}=-\frac{4\pi}{c}\sigma E_\varphi; \qquad (13)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} H_r, \qquad (15)$$

откуда следуют уравнения для компонентов электромагнитного поля

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - i\alpha\beta H_z = 0; \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_r}{\partial z^2} - (i\alpha\beta + \frac{1}{r^2})H_r = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} - (i\alpha\beta + \frac{1}{r^2})E_\varphi = 0.$$

Начнем с первого из этих уравнений. Решая его методом разделения переменных, т. е., представляя решение в виде $H_z(r,z) = H_1(r)H_2(z)$, получим систему

$$\frac{\partial^2 H_1(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_1(r)}{\partial r} - (C + i\alpha\beta)H_1 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_2(z)}{\partial z^2} + CH_2(z) = 0, \qquad (17)$$

где C — некоторая положительно определенная константа расщепления (действительное число), точное значение которой должно быть определено из граничных условий.

Решение уравнения (16), как видим, сводится, во-первых, к решению задачи Коши по радиальной координате (для функции $H_1(r)$), и, во-вторых, к решению краевой задачи по продольной координате (для функции $H_2(z)$). Решение второго уравнения из системы (17) является очевидным:

$$H_2(z) = A\sin\left(\sqrt{C}z\right) + B\cos\left(\sqrt{C}z\right).$$

Из условия симметрии для центральной плоскости плазмоида

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

сразу же заключаем, что в нашем случае значение постоянной A должно быть равным нулю. Отсюда имеем

$$H_2(z) = H_2(0)\cos\left(\sqrt{C}z\right).$$

Решение первого уравнения из системы (17) в свою очередь запишется в виде

$$H_1(r) = H_1(0)\ J_0\left(i\sqrt{C + i\alpha\beta}r\right)$$

или

$$H_1(r) = H_1(0)\ J_0\left(\sqrt{(\mathrm{ibr})^2 + \left(i\sqrt{\mathrm{i}\alpha\beta}r\right)^2}\right),$$

где $b = \sqrt{C}$.

В этих решениях $H_1(0)$ и $H_2(0)$ — некоторые, пока еще неизвестные, комплексные величины.

Применяя теперь к правой части последнего равенства теорему сложения Графа для цилиндрических функций [7, 8]

$$e^{i\nu\psi}J_\nu(mR) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m\rho)\ J_{\nu+k}(mr)\ e^{ik\varphi},$$

где $R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi)}$;

$$e^{2i\psi} = \frac{r - \rho e^{-i\varphi}}{r - \rho e^{i\varphi}},$$

перепишем это соотношение в виде суммы бесконечного ряда

$$H_1(r) = H_1(0)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)\ J_n(ibr)J_n\left(i\sqrt{i\alpha\beta}r\right)$$

или, что то же самое,

$$H_1(r) = H_1(0)\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\times$$
$$\times\left[\mathrm{ber}_n(\sqrt{\alpha\beta}r) + i\mathrm{bei}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)\right].$$

.

Общее решение уравнения (16) тогда, очевидно, будет

$$H_z(r,z) = \left(\overline{H}_{z0} + i\overline{\overline{H}}_{z0}\right)\times$$
$$\times\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[\mathrm{ber}_n(\sqrt{\alpha\beta}r) + i\mathrm{bei}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]\right\}\times$$
$$\times\cos(bz)$$

(здесь и выше J_n, I_n, ber_n и bei_n — соответственно, функции Бесселя и Кельвина n-го порядка).

При $r = 0$ $\mathrm{ber}_{1,2} = \mathrm{bei}_{0,1,2} = 0$, а $\mathrm{ber}_0 = I_0 = 0$ и тогда, точно так же, как и в случае одномерной модели, имеем $\overline{H}_{z0} = 0$ и $\overline{\overline{H}}_{z0} = H_z^a(0,0)$, где $H_z^a(0,0)$ — амплитудное значение H_z в центральной точке плазмоида.

В итоге получим соотношение

$$H_z(r,z) = H_z^a(0,0)\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[-\mathrm{bei}_n\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{ber}_n\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]\right\}\times$$
$$\times\cos(bz), \qquad (18)$$

в котором $b=\dfrac{1}{L}\arccos\left[\dfrac{H_z(0,L)}{H_z(0,0)}\right]$.

Дальнейшие преобразования правой части выражения (18) будем производить следующим образом. Замечая, что $I_n=I_{-n}$, $\mathrm{ber}_{-n}=(-1)^n\mathrm{ber}_n$, $\mathrm{bei}_{-n}=(-1)^n\mathrm{bei}_n$, $i^{-n}=(-1)^n i^n$, запишем вспомогательную цепочку равенств

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[-\mathrm{bei}_n\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{ber}_n\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]=$$
$$=I_0(br)\left[-\mathrm{bei}(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} i^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\times$$
$$\times I_n(br)\left[-\mathrm{bei}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n i^n\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)-i\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right]\times$$
$$\times I_n(br)(-1)^n\left[-\mathrm{bei}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]=$$
$$=I_0(br)\left[-\mathrm{bei}(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]+$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty} i^n I_n(br)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left[-\mathrm{bei}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}_n(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]=$$
$$=I_0(br)\left[-\mathrm{bei}(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k} I_{2k}(br)\left[-\mathrm{bei}_{2k}(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}_{2k}(\sqrt{\alpha\beta}r)\right].$$

Теперь, подставляя последнее соотношение в формулу (18), окончательно найдем

$$H_z(r,z)=H_z^a(0,0)\left\{I_0(br)\left[-\mathrm{bei}(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]+\right.$$
$$\left.+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k} I_{2k}(br)\left[-\mathrm{bei}_{2k}(\sqrt{\alpha\beta}r)+i\mathrm{ber}_{2k}(\sqrt{\alpha\beta}r)\right]\right\}\times$$
$$\times\cos(bz). \qquad (19)$$

Как легко видеть, при $b\to 0$ соотношение (19) переходит в соответствующую ему формулу (9) одномерной модели.

Перейдем теперь к уравнению (12) для вихревого электрического поля $E_\varphi(r,z)$ в разряде. Переписывая эту формулу в интегральном виде, получаем зависимость

$$E_\phi(r,z)=-\frac{i\alpha}{r}\int_0^r rH_z(r,z)dr,$$

которая с учетом соотношения

$$H_z(r,z)=iH_z^a(0,0)J_0\left(i\sqrt{b^2+i\alpha\beta r}\right)\cos(bz)$$

сводится к табличному интегралу [6, 9], так что в итоге получаем

$$E_\varphi(r,z)=\frac{\alpha H_z^a(0,0)}{i\sqrt{b^2+i\alpha\beta}}\ J_1\left(i\sqrt{b^2+i\alpha\beta r}\right)\cos(bz),$$

откуда с учетом теоремы сложения Графа имеем

$$E_\varphi(r,z)=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{H_z^a(0,0)}{i\sqrt{i+\dfrac{b^2}{\alpha\beta}}}\sqrt{\frac{\sqrt{i\alpha\beta}-ib}{\sqrt{i\alpha\beta}+ib}}\times$$
$$\times\cos(bz)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)J_n(ibr)J_{n+1}\left(i\sqrt{i\alpha\beta}r\right).$$

Далее с учетом известного тождества $\sqrt{i}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ подкоренное выражение в правой части этой формулы преобразуется согласно равенству

$$\sqrt{\frac{\sqrt{i\alpha\beta}-ib}{\left(\sqrt{i\alpha\beta}+ib\right)\left(i+\dfrac{b^2}{\alpha\beta}\right)}}=\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha\beta}+i\sqrt{\alpha\beta}-ib\sqrt{2}}{\left(\sqrt{\alpha\beta}+i\sqrt{\alpha\beta}+ib\sqrt{2}\right)\left(i+\dfrac{b^2}{\alpha\beta}\right)}},$$

правая часть которого (после замены $\gamma=\dfrac{b}{\sqrt{\alpha\beta}}$) даст нам цепочку формул

$$\sqrt{\frac{1+i-i\gamma\sqrt{2}}{\left(1+i+i\gamma\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{i}-i\gamma\right)\left(\sqrt{i}+i\gamma\right)}}=$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+i-i\gamma\sqrt{2}}{\left(1+i+i\gamma\sqrt{2}\right)\left(1+i-i\gamma\sqrt{2}\right)\left(1+i+i\gamma\sqrt{2}\right)}}=$$
$$=\sqrt{2}\frac{1}{1+i\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-i\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}i\frac{(1+i+\gamma\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2},$$

и тогда

$$E_\varphi(r,z) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{\sqrt{2}}{2}H_z^a(0,0)\frac{1+i+\gamma\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}\cos(bz)\times$$
$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[\mathrm{ber}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$\left.+i\mathrm{bei}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right].$$

Преобразуя далее полученное соотношение тем же путем, что и аналогичное выражение для H_z,

$$E_\varphi(r,z) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{\sqrt{2}}{2}H_z^a(0,0)\frac{1+i+\gamma\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}\cos(bz)\times$$
$$\times\left\{I_0(br)\left[\mathrm{ber}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{bei}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} i^n \exp\left(in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[\mathrm{ber}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{bei}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n i^n \exp\left(-in\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)(-1)^{n-1}\times$$
$$\left.\times\left[\mathrm{ber}_{n-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{bei}_{n-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]\right\}=$$
$$=-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{\sqrt{2}}{2}H_z^a(0,0)\frac{1+i+\gamma\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}\cos(bz)\times$$
$$\left\{I_0(br)\left[\mathrm{ber}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{bei}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} i^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[\mathrm{ber}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-\mathrm{ber}_{n-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$\left.+i\mathrm{bei}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-i\mathrm{bei}_{n-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} i^n\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)I_n(br)\left[\mathrm{ber}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\mathrm{ber}_{n-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$\left.\left.+i\,\mathrm{ber}_{n+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{ber}_{n-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]\right\}=$$
$$=-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{\sqrt{2}}{2}H_z^a(0,0)\frac{1+i+\gamma\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}\cos(bz)\times$$
$$\times\left\{I_0(br)\left[\mathrm{ber}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{bei}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(br)\left[\mathrm{ber}_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-\mathrm{ber}_{2k-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$\left.+i\mathrm{bei}_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}\ \ r\right)-i\,\mathrm{bei}_{2k-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}\ \ r\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(br)\left[\mathrm{ber}_{2k}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\mathrm{ber}_{2k-2}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$\left.\left.+i\mathrm{ber}_{2k}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{ber}_{2k-2}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]\right\},$$

в итоге получим

$$E_\varphi(r,z) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{\sqrt{2}}{2}H_z^a(0,0)\frac{\cos(bz)}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}\times$$
$$\times\left\{I_0(br)\left[-\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)\mathrm{ber}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\mathrm{bei}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-\right.\right.$$
$$\left.-i\mathrm{ber}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-i\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)\mathrm{bei}_1\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}(br)\left[-\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)\mathrm{ber}_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$+\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)\mathrm{ber}_{2k-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+$$
$$+\mathrm{bei}_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-\mathrm{bei}_{2k-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-i\mathrm{ber}_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+$$
$$+i\mathrm{ber}_{2k-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-i\left(1+\sqrt{2}\gamma\right)\mathrm{bei}_{2k+1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+$$
$$\left.+i\left(1+\sqrt{2}\gamma\right)\mathrm{bei}_{2k-1}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(br)\left[\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)\mathrm{ber}_{2k}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+\right.$$
$$+\left(1+\gamma\sqrt{2}\right)\mathrm{ber}_{2k-2}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-\mathrm{bei}_{2k}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)-$$
$$-\mathrm{bei}_{2k-2}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{ber}_{2k}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\mathrm{ber}_{2k-2}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+$$
$$\left.\left.+i\left(1+\sqrt{2}\gamma\right)\mathrm{bei}_{2k}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)+i\left(1+\sqrt{2}\gamma\right)\mathrm{bei}_{2k-2}\left(\sqrt{\alpha\beta}r\right)\right]\right\}. \tag{20}$$

Ясно, что в случае $b = 0$ и с учетом формул, связывающих функции $\mathrm{ber}_1, \mathrm{bei}_1$ и $\mathrm{ber}', \mathrm{bei}'$, соотношение (20) даст нам в точности формулу (10) одномерной постановки задачи.

Наконец, обратимся, к четвертому (15) из уравнений системы (12)—(15) для радиальной компоненты $H_r(r, z)$ магнитного поля в разряде. Соответствующее аналитической выражение будет весьма громоздким, но выписывать его целиком в явном виде нам сейчас уже нет необходимости, поскольку радиальная его часть — с точностью до коэффициентов — совпадает, очевидно, с радиальной частью аналогичной формулы для $E_\varphi(r, z)$, так что можно сразу записать

$$H_r(r,z) = -\frac{i}{\alpha}\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$$

или

$$H_r(r,z) = i\frac{b}{\sqrt{\alpha\beta}}\frac{H_z^a(0,0)}{1+\sqrt{2}\gamma+\gamma^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi(r)\sin(bz),$$

где $\Phi(r)$ — выражение в фигурных скобках формулы (20).

Обсуждение результатов

Оставаясь в рамках томсоновской модели высокочастотного индукционного разряда, можно получить три принципиальных результата, касающихся вопроса структуры квазистационарного электромагнитного поля ВЧ индукционного разряда конечной длины.

Как было показано выше, магнитное и электрическое поля в индукторе нагруженного ВЧИ-плазмотрона при условии $\sigma(r, z) = \text{const}$ во всем объеме плазмоида можно описать следующими комплексными формулами:

$$H_z(r,z) = iH_z^a(0,0)J_0\left(i\sqrt{b^2+i\alpha\beta}r\right)\cos(bz); \quad (21)$$

$$H_r(r,z) = -i\frac{bH_z^a(0,0)}{\sqrt{b^2+i\alpha\beta}}J_1\left(i\sqrt{b^2+i\alpha\beta}r\right)\sin(bz); \quad (22)$$

$$E_\varphi(r,z) = \frac{\omega}{c}\frac{H_z^a(0,0)}{\sqrt{b^2+i\alpha\beta}}J_1\left(i\sqrt{b^2+i\alpha\beta}r\right)\cos(bz), \quad (23)$$

в которых константа расщепления b — действительное число (которое в классической одномерной томсоновской модели есть просто ноль), а $J_{0,1}$ — функции Бесселя, соответственно, нулевого и первого порядков.

Соотношения (21)—(23) дают возможность выявить ряд любопытных результатов, которые в действительности являются центральными результатами томсоновской модели ВЧ индукционного разряда конечной длины. Эти результаты удобно представить в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть квазистационарное цилиндрически симметричное электромагнитное поле ВЧИ-разряда описывается уравнениями (21)—(23). Тогда для всего объема плазмоида справедливы следующие три утверждения:

1) фазовые углы φ_{H_z}, φ_{H_r} и φ_{E_φ} всех трех компонентов электромагнитного поля в разряде не зависят от продольной координаты z;

2) разность фаз между фазой радиальной составляющей магнитного поля φ_{H_r} и фазой азимутального электрического поля φ_{E_φ} есть величина постоянная и равная $\pi/2$

$$\Delta\varphi = \varphi_{H_r}(r) - \varphi_{E_\varphi}(r) = \frac{\pi}{2};$$

3) амплитуды радиального магнитного H_r^a и азимутального электрического E_φ^a полей в разряде связаны соотношениями

$$\frac{\partial H_r^a}{\partial z} = \frac{b^2 c}{\omega}E_\varphi^a \quad \text{и} \quad \frac{\partial E_\varphi^a}{\partial z} = -\frac{\omega}{c}H_r^a. \quad (24)$$

Для доказательства этих утверждений достаточно обратиться к формулам (21)—(23). При этом свойство 1 следует из них автоматически. Для доказательства утверждения 2 заметим, что по определению фазовых углов

$$\varphi_{H_r}(r) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{\bar{H}}_r}{\bar{H}_r}\right)$$

и

$$\varphi_{E_\varphi}(r) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{\bar{E}}_\varphi}{\bar{E}_\varphi}\right),$$

где величины с одной и двумя чертами означают, соответственно, действительную и мнимую части соответствующих комплексных величин. Из соотношений же (22) и (23) заключаем, что в данном случае эти величины связаны зависимостью

$$\frac{\bar{\bar{H}}_r}{\bar{H}_r} = -\frac{\bar{E}_\varphi}{\bar{\bar{E}}_\varphi},$$

так что для разности фаз $\varphi_{H_r}(r) - \varphi_{E_\varphi}(r)$ имеем

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{\bar{H}}_r}{\bar{H}_r}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{\bar{E}}_\varphi}{\bar{E}_\varphi}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{\bar{H}}_r}{\bar{H}_r}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{H}_r}{\bar{\bar{H}}_r}\right) = \frac{\pi}{2}$$

в силу известного тождества $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ теории обратных тригонометрических функций (например, [9, 10]). И, наконец, соотношения (24), равно, как и связанная с ними формула

$$H_r^a(r,z) = \frac{b^2 c}{\omega}\operatorname{tg}(bz)E_\varphi^a(r,z),$$

также с достаточной очевидностью вытекают непосредственно из соотношений (22)—(23).

Интересно отметить, что из первого из соотношений (24) следует, в частности, тот факт, что производная $\frac{\partial H_r^a}{\partial z}$ не может принимать значения, равные нулю, нигде вне оси плазмоида, в том числе и в его центральном сечении, хотя в этом сечении само значение амплитуды $H_r^a\left(z=0\right)=0$.

Выводы

В настоящей работе впервые развита аналитическая теория двухмерной модели Томсона высокочастотного индукционного разряда конечной длины, в рамках которой построены решения в специальных функциях и найдены носящие характер теоремы соотношения между характеристиками радиального магнитного и вихревого электрического полей в разряде. Эту модель можно также назвать обобщенной томсоновской моделью высокочастотного индукционного разряда конечной длины.

Представленные результаты могут быть полезны как работникам в области физики и техники высокочастотного индукционного разряда, так и достаточно широкому кругу специалистов, занимающихся разработкой и оптимизацией различного рода энергетических установок и устройств, основанных на принципе индукционного нагрева проводящих сред.

Литература

1. *Tomson J. J.* Radiation produced by the Passage of Electricity// Philos. Mag. 1926. V. 2. № 9. P. 674.
2. *Eckert H. U.* Diffusion theory of the electrodeless ring discharge// J. Appl. Phys. 1962. V. 39. № 9. P. 2780.
3. *Freeman M. P., Chase J. D.* Energy-Transfer mechanism and typical operating characteristics for the thermal rf plasma generator// Ibid. 1968. V. 39. № 1. P. 180.
4. *Chase J. D.* Magnetic pinch effect in the thermal rf induction plasma// Ibid. 1969. V. 40. № 1. P. 318.
5. Справочник по специальным функциям/ Под. ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1977.
6. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1983.
7. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. — М.: ИЛ, 1963.
8. *Ватсон Д. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. — М.: ИИЛ, 1949.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
10. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Наука, 1986.

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2006 г.

The Thomson's generalized model of high-frequency inductive discharge of the finite length

R. N. Gainullin, A. P. Kirpichnikov
Kazan State Technological University, Kazan, Russia

In the paper Thomson's model of high-frequency inductive (HFI) discharge of the finite length are considered and obtained some important relationships for research of its structure.

УДК 537.52

О взаимном расположении максимумов некоторых характеристик высокочастотного индукционного разряда

Р. Н. Гайнуллин, А. В. Герасимов, О. В. Зеленко, А. П. Кирпичников
Казанский государственный технологический университет, г. Казань, Россия

На основе теоретического анализа распределения проводимости, плотности тока и удельной мощности тепловыделения в высокочастотном индукционном разряде установлен закон сгущения максимумов этих величин.

1. В электроплазменных процессах и энергоустановках, использующих высокочастотную индукционную (ВЧИ) плазму, зона разряда является основной технологической зоной. Информация о распределении основных параметров разряда (проводимость, температура, плотность тока, удельная мощность тепловыделения) и месторасположении их максимальных значений дает возможность определить оптимальные условия нагрева исходного материала и обеспечить высокое качество получаемого продукта.

Результаты, полученные авторами экспериментальных работ [1—3], дали основание высказать предположение о том, что внутри плазмоида ВЧИ-разряда для каждого из его поперечных сечений выполнено неравенство

$$r_1 < r_2 < r_3, \quad (1)$$

в котором $r_1 = r(\sigma_{max})$, $r_2 = r(j_{\varphi\ max})$ и $r_3 = r(W_{max})$ — радиальные координаты, соответствующие максимумам стоящих в скобках физических величин.

В этих соотношениях:

σ — проводимость в разряде;

$j = \sigma E_\varphi$ — плотность вихревого тока;

E_φ — напряженность азимутального электрического поля;